



แบบจำลองทางคณิตศาสตร์การถ่ายเทความร้อนในชั้นวัสดุหนา:
กรณีวัสดุมีอุณหภูมิไม่สม่ำเสมอโดยการวิเคราะห์เชิงเลข

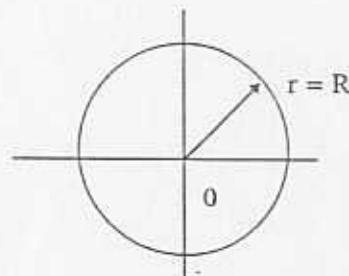
4.1 การถ่ายเทความร้อนกรณีการกระจายอุณหภูมิภายในวัสดุไม่สม่ำเสมอ

จากการศึกษาในบทที่ผ่านมาสามารถศึกษาโดยถือว่าการกระจายอุณหภูมิของวัสดุสม่ำเสมอเนื่องจากถือว่าวัสดุมีค่าการนำความร้อนที่สูงมากและถือว่าวัสดุมีขนาดเล็กทำให้อุณหภูมิของวัสดุเท่ากันทั้งก้อน แต่ในการใช้งานจริงบางครั้งอาจจำเป็นต้องใช้วัสดุส่งถ่ายความร้อนที่มีขนาดใหญ่หรืออาจต้องการความแม่นยำในการทำนายอุณหภูมิสูง แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในกรณีที่ผ่านมาจะทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนในการใช้งาน ในบทนี้จึงศึกษาการถ่ายเทความร้อนในชั้นวัสดุหนาโดยพิจารณาการกระจายของอุณหภูมิเกิดขึ้นภายในวัสดุด้วย กำหนดให้ระบบไม่มีการสูญเสียความร้อนให้แก่สิ่งแวดล้อมและไม่มีพลังงานที่เกิดขึ้นโดยการผลิตของระบบ ข้อสมมุติฐานในการศึกษามีดังนี้

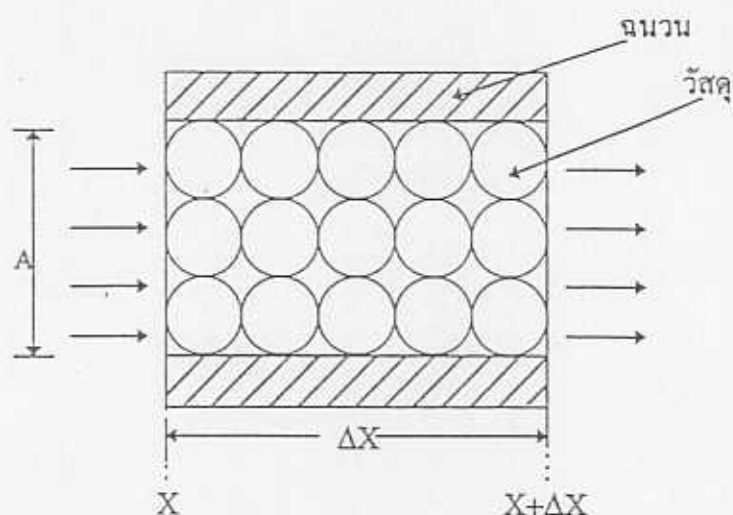
1. ไม่คิดการนำความร้อนภายในของไหลและไม่คิดการนำความร้อนระหว่างก้อนวัสดุ
2. ไม่มีการถ่ายเทมวล
3. ไม่คิดผลการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของของไหลและวัสดุที่มีผลจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ

4. ความเร็วและความดันของของไหลภายในชั้นหนาถือว่ามีความคงที่ตลอดชั้นหนา
5. ไม่คิดการถ่ายเทความร้อนในแนวรัศมีของชั้นหนา
6. คุณสมบัติทางความร้อนของวัสดุและของไหลขึ้นอยู่กับอุณหภูมิเท่านั้น

ในการศึกษาในบทนี้จะกำหนดให้วัสดุที่อยู่ภายในชั้นหนา มีลักษณะเป็นทรงกลมและมีการวางเป็นลำดับชั้น ดังรูปที่ 4.1 และ รูปที่ 4.2



รูปที่ 4.1 การนำความร้อนภายในวัสดุ



รูปที่ 4.2 การไหลของของไหลผ่านชั้นวัสดุหนา

พิจารณาความสมดุลพลังงานในปริมาตรเล็กๆ ในรูปที่ 4.2 สามารถเขียนสมการความสมดุลพลังงานได้ดังนี้

ความสมดุลพลังงานของของไหลในปริมาตรควบคุมคือ

$$\left[\begin{array}{l} \text{การเปลี่ยนแปลงพลังงานภายใน} \\ \text{ของของไหลเมื่อผ่านปริมาตรควบคุม} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{อัตราการถ่ายเทความร้อน} \\ \text{โดยการพาความร้อน} \end{array} \right]$$

$$\epsilon \rho_a C_a u \frac{\partial T}{\partial x} = h_v (\theta - T) \quad (4.1)$$

ความสมดุลพลังงานภายในวัสดุในปริมาตรควบคุมคือ

$$\left[\begin{array}{l} \text{อัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงาน} \\ \text{ภายในของวัสดุ} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{อัตราการถ่ายเทความร้อน} \\ \text{โดยการนำความร้อน} \end{array} \right]$$

$$(1 - \epsilon) \rho_b C_b \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = K_b (1 - \epsilon) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \quad (4.2)$$

ความสมดุลพลังงานที่ผิวของวัสดุคือ

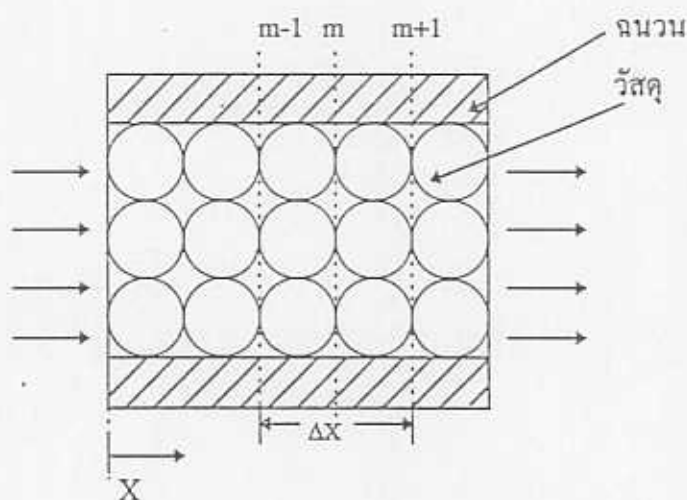
$$\left[\begin{array}{l} \text{อัตราการถ่ายเทความร้อนโดย} \\ \text{การนำความร้อนที่ผิวของวัสดุ} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{อัตราการถ่ายเทความร้อน} \\ \text{โดยการนำความร้อน} \end{array} \right]$$

$$-K_b \frac{\partial \theta}{\partial r} = h(\theta - T) \quad (4.3)$$

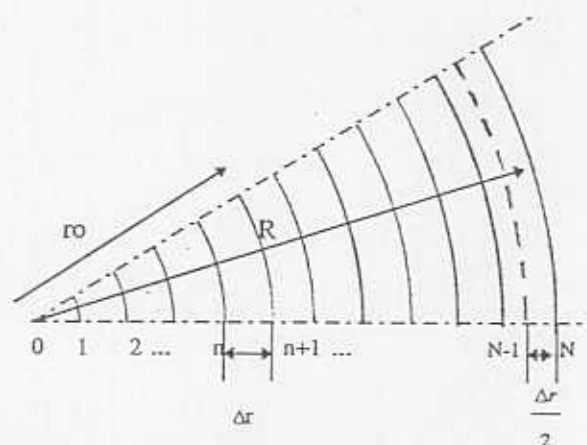
4.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์การถ่ายเทความร้อนในชั้นวัสดุหนา

กรณีวัสดุมีอุณหภูมิไม่สม่ำเสมอโดยการวิเคราะห์เชิงเลข

เป็นการศึกษาการถ่ายเทความร้อนโดยอุณหภูมิวัสดุกระจาย ไม่สม่ำเสมอโดยการใช่วิธีการวิเคราะห์เชิงเลข และคิดการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในวัสดุตามแนวรัศมี



รูปที่ 4.3 รูปแสดงการประมาณโดยการวิเคราะห์เชิงเลขของชั้นวัสดุหนา



รูปที่ 4.4 รูปแสดงการประมาณโดยการวิเคราะห์เชิงเลขของวัสดุที่เป็นทรงกลม

จากสมการ (4.1) (4.2) และ (4.3) และจากรูปที่ 4.3 และ 4.4 สามารถเขียนสมการทั้งสามใหม่ให้อยู่ในรูปแบบของสมการวิเคราะห์เชิงเลข ได้ดังนี้

จากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของของไหลสมการ (4.1) เขียนสมการให้อยู่ในรูปการวิเคราะห์เชิงเลขได้เป็น

$$\varepsilon \rho_a C_a u \frac{T_{m+1}^i - T_{m-1}^i}{\Delta x} = h_v (\theta_R^i - T_m^i)$$

โดยที่ $B = \frac{\varepsilon \rho_a C_a u}{h_v \Delta x}$

ดังนั้น

$$T_{m+1}^i - T_{m-1}^i = \frac{1}{B} (\theta_R^i - T_m^i) \quad (4.4)$$

โดยการประมาณ

$$T_m^i = \frac{(T_{m+1}^i + T_{m-1}^i)}{2} \quad (4.5)$$

แทนค่าสมการ (4.5) ลงในสมการ (4.4) สมการการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของของไหล คือ

$$T_{m+1}^i = \frac{2}{2B+1} (2\theta_R^i + (2B-1)T_{m-1}^i) \quad (4.6)$$

จากสมการการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิในวัสดุสมการ (4.2) เขียนสมการให้อยู่ในรูปการวิเคราะห์เชิงเลขได้เป็น

$$\rho_b C_b \Delta V_n \left(\frac{\theta_n^{i+1} - \theta_n^i}{\Delta \tau} \right) = K_b \left[\frac{\theta_{n-1}^i - \theta_n^i}{R_{n-1}} + \frac{\theta_{n+1}^i - \theta_n^i}{R_{n+1}} \right]$$

โดยที่ R_n คือ ค่าความต้านทานในการส่งถ่ายความร้อน

ΔV_n คือ ปริมาตรที่จุด n

$$R_{n-1} = \frac{\Delta r}{4\pi \left(n\Delta r - \frac{\Delta r}{2} \right)^2}$$

$$R_{n+1} = \frac{\Delta r}{4\pi \left(n\Delta r + \frac{\Delta r}{2} \right)^2}$$

$$\Delta V_n = 4\pi (n\Delta r)^2 \Delta r$$

ให้ $C = \frac{\rho_b C_b \Delta V_n}{K_b \Delta \tau}$

ดังนั้นสมการการกระจายอุณหภูมิภายในวัสดุคือ

$$\theta_n^{i+1} = \frac{1}{C} \left[\frac{\theta_{n-1}^i}{R_{n-1}} + \frac{\theta_{n+1}^i}{R_{n+1}} + \left(1 - \frac{1}{R_{n-1}} - \frac{1}{R_{n+1}} \right) \theta_n^i \right] \quad (4.7)$$

จากสมการการถ่ายเทความร้อนที่ผิวของวัสดุสมการ (4.3) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปการวิเคราะห์เชิงเลขได้เป็น

$$\rho_b C_b \Delta V_N \left(\frac{\theta_N^{i+1} - \theta_N^i}{\Delta \tau} \right) = K_b \left[\frac{\theta_N^i - \theta_{N-1}^i}{R_N} \right] + Ah [T_m^i - \theta_N^i]$$

โดยที่

$$R_N = \frac{\Delta r}{4\pi \left(N\Delta r - \frac{\Delta r}{2} \right)^2}$$

$$\Delta V_N = 4\pi (N\Delta r)^2 \frac{\Delta r}{2}$$

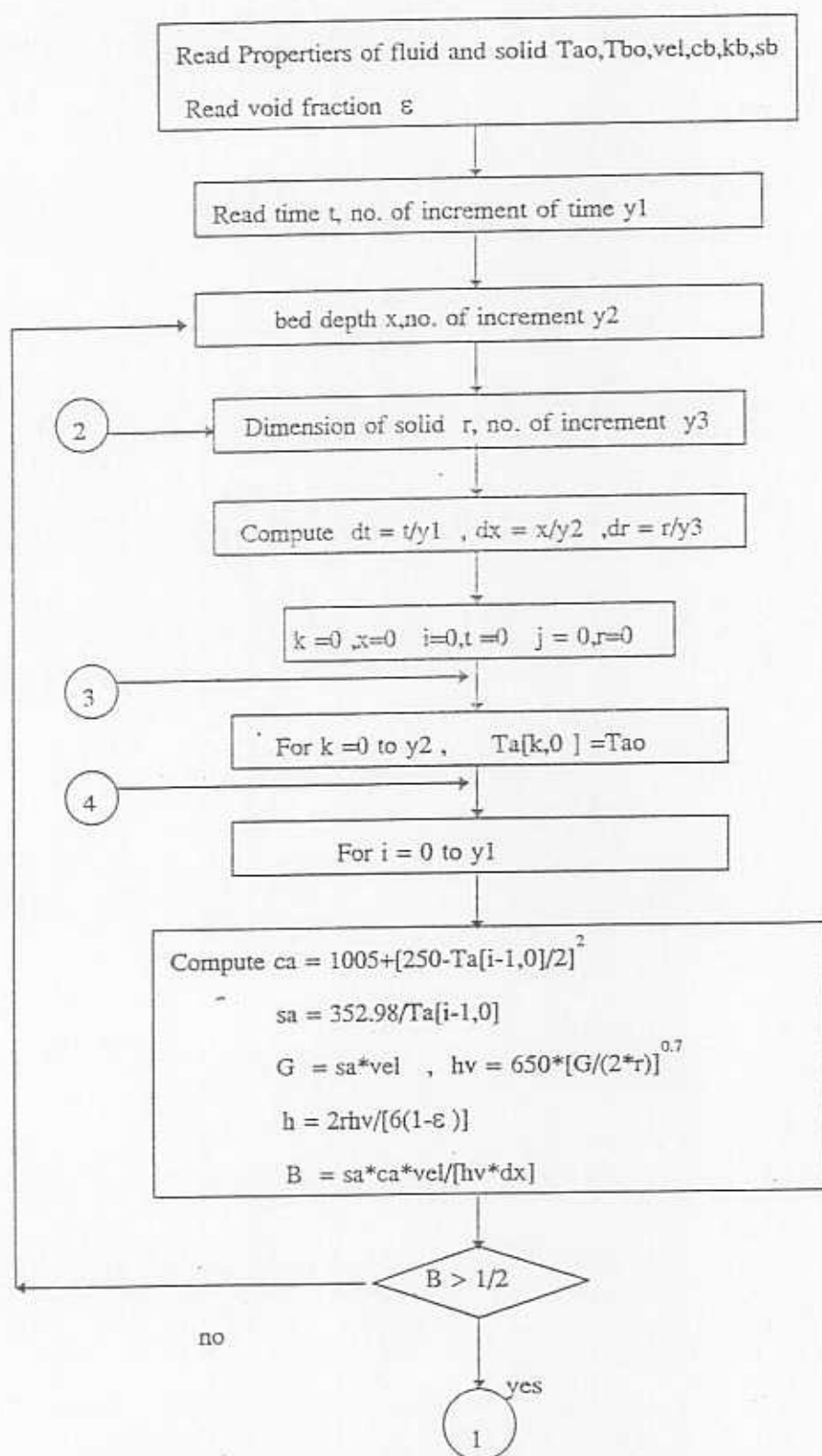
ให้ $D = \frac{\rho_b C_b \Delta V_N}{K_b \Delta \tau}$ และ $E = \frac{\rho_b C_b \Delta V_N}{Ah \Delta \tau}$

ดังนั้นสมการการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ผิวของวัสดุคือ

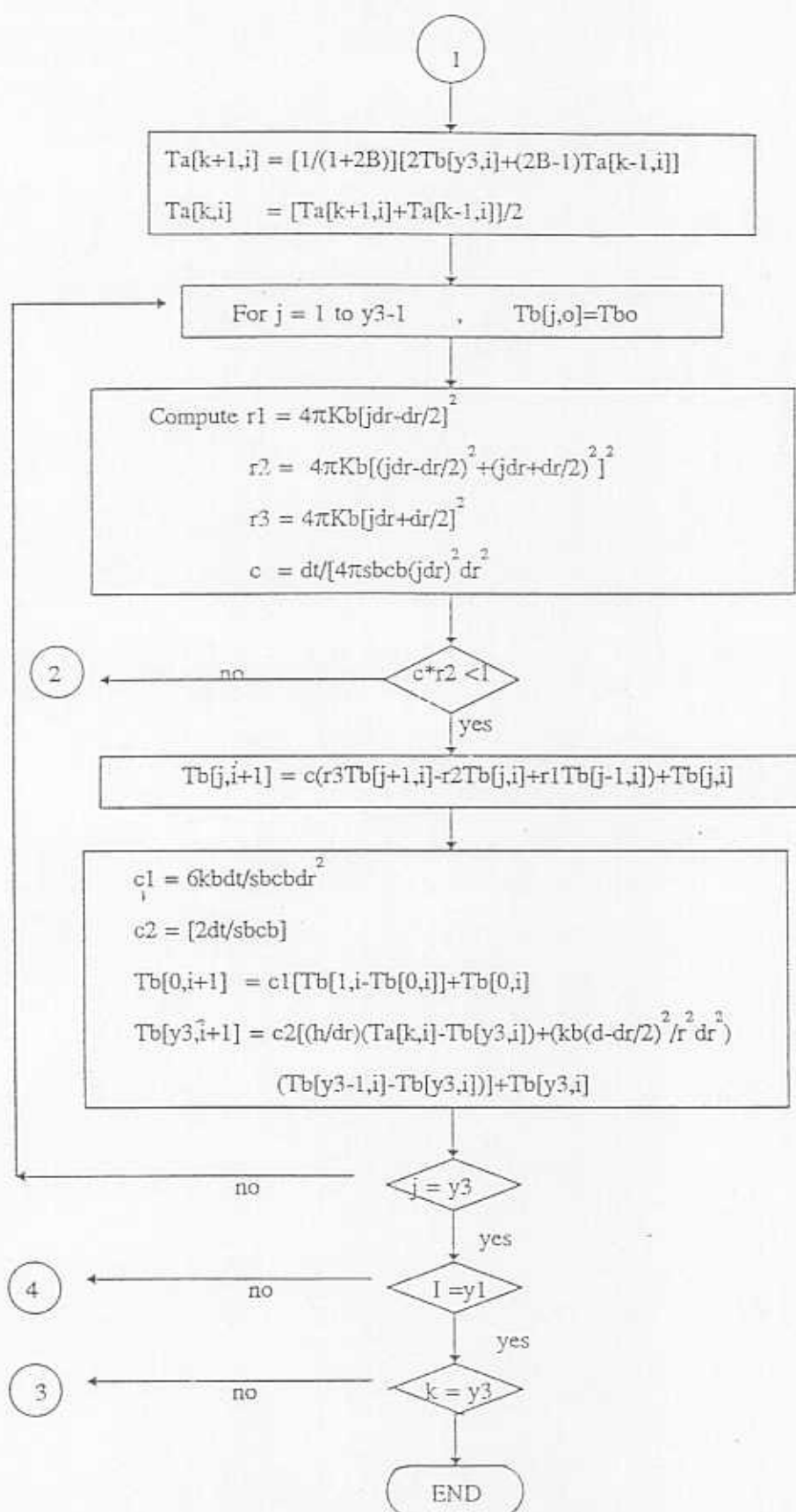
$$\theta_N^{i+1} = \frac{1}{E} T_m^i + \left[1 + \frac{1}{DR_N} - \frac{1}{E} \right] \theta_N^i - \frac{1}{DR_N} \theta_{N-1}^i \quad (4.9)$$

4.3 ขั้นตอนการคำนวณ

สมการที่ใช้ในการคำนวณหาอุณหภูมิของของไหลคือสมการ (4.6) สมการ (4.7) ใช้ในการหาอุณหภูมิภายในวัสดุ และสมการ (4.8) ใช้หาอุณหภูมิที่ผิวของวัสดุ ข้อมูลที่จะต้องใช้ในการคำนวณคือ ความยาวของชั้นวัสดุหนา จำนวนในการแบ่งของชั้นวัสดุหนา เส้นผ่านศูนย์กลางของวัสดุ จำนวนในการแบ่งชั้นภายในวัสดุ เวลาที่ใช้ในการทดลอง จำนวนในการแบ่งเวลา อัตราส่วนช่องว่าง ความจุความร้อนของของไหล ความหนาแน่นของของไหล อุณหภูมิเริ่มต้นของของไหล ความจุความร้อนของวัสดุ ความหนาแน่นของวัสดุ และอุณหภูมิเริ่มต้นของวัสดุ ค่าการนำความร้อนของวัสดุ จากข้อมูลที่ได้ขั้นตอนต่อไปในการคำนวณเราจะต้องทำการตรวจสอบค่า B D และ E ก่อน โดยที่ $B > 1/2$ $D > ((E-1)/(R_N))$ และ $R_{n-1} + R_{n+1} < 1$ หากค่าที่ได้ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข เราจะต้องเพิ่มจำนวนชั้นภายในวัสดุ, จำนวนในการแบ่งชั้นวัสดุหนาและเวลาให้มากขึ้นจนกว่าค่า B D และ E จะสอดคล้องกับเงื่อนไข จากนั้นทำการคำนวณหาค่าอุณหภูมิของของไหลและของวัสดุ โดยขั้นตอนในการคำนวณจะเป็นไปตามรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.5 ขั้นตอนการคำนวณการถ่ายเทความร้อนในชั้นวัสดุหนากรณีการกระจายอุณหภูมิในวัสดุ
ไม่สม่ำเสมอโดยการวิเคราะห์เชิงเลข



รูปที่ 4.5 ขั้นตอนการคำนวณการถ่ายเทความร้อนในชั้นวัสดุหนากรณีการกระจายอุณหภูมิในวัสดุไม่สม่ำเสมอโดยการวิเคราะห์เชิงเลข (ต่อ)