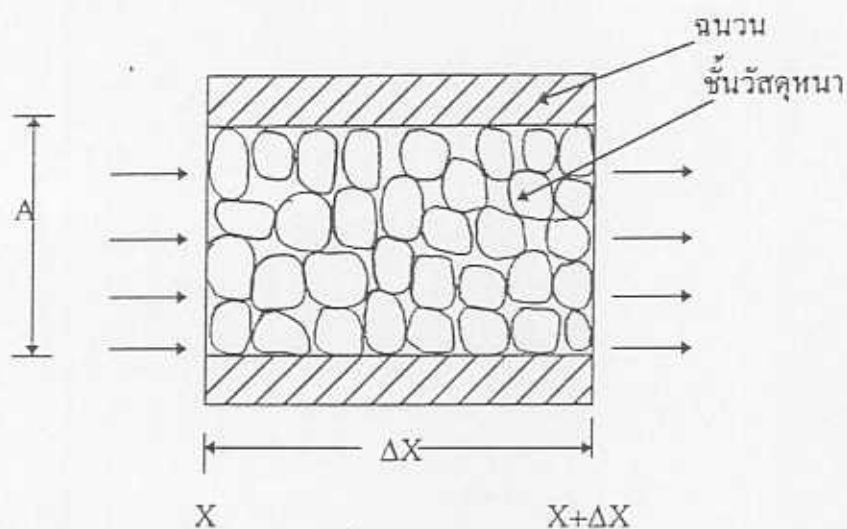


แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการถ่ายเทความร้อนในชั้นวัสดุหนา :
กรณีวัสดุมีอุณหภูมิสม่ำเสมอ

3.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการถ่ายเทความร้อนในชั้นวัสดุหนา :
กรณีวัสดุมีอุณหภูมิสม่ำเสมอ

ในการพิจารณาการถ่ายเทความร้อนระหว่างของไหลและวัสดุตัวกลางภายในชั้นวัสดุหนา กรณีการกระจายอุณหภูมิของวัสดุสม่ำเสมอนี้จะพิจารณาถึงการกระจายของอุณหภูมิที่เกิดขึ้นทั้งในส่วนของการไหลและในส่วนที่เป็นวัสดุแต่จะถือว่าอุณหภูมิภายในวัสดุนั้นเท่ากันทั้งก่อน



รูปที่ 3.1 การไหลของของไหลผ่านชั้นวัสดุหนา

จากการพิจารณาสมดุลของพลังงานในปริมาตรเล็กๆของชั้นวัสดุหนา ในรูป 3.1 สามารถเขียนสมการความสมดุลของพลังงาน โดยสมมติให้ไม่มีการสูญเสียความร้อนให้แก่สิ่งแวดล้อม และไม่มีพลังงานความร้อนที่ผลิตขึ้นเองได้ดังนี้

สมดุลพลังงานของของไหลในปริมาตรควบคุมคือ

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{อัตราการเพิ่ม} \\ \text{ขึ้นของพลังงาน} \\ \text{ภายในปริมาตร} \\ \text{ควบคุม} \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} \text{อัตราของ} \\ \text{พลังงานที่} \\ \text{เข้าสู่ปริมาตร} \\ \text{ควบคุม} \end{array}} - \boxed{\begin{array}{c} \text{อัตราของ} \\ \text{พลังงานที่ออก} \\ \text{จากปริมาตร} \\ \text{ควบคุม} \end{array}}$$

ดังนั้นสมการความสมดุลพลังงานในทิศทางของ x สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \tau} &= Q_x - Q_{x+dx} + \dot{E}_x - \dot{E}_{x+dx} \\ \frac{\partial E}{\partial \tau} &= \frac{\partial Q}{\partial x} dx - \frac{\partial \dot{E}}{\partial x} dx \end{aligned} \quad (3.1)$$

โดยที่ E คือพลังงานภายในของของไหลในปริมาตรควบคุม (J)

$\dot{E}$ คืออัตราพลังงานที่ไหลเข้าและไหลออกจากปริมาตรควบคุม (J/s)

Q คืออัตราการถ่ายเทความร้อนที่เข้าและออกจากปริมาตรควบคุมโดยแบ่งออกเป็น
การถ่ายเทความร้อนแบบการพาความร้อนและแบบการนำความร้อน (J/s)

τ คือเวลา (s)

อัตราการถ่ายเทความร้อนที่เข้าและออกจากปริมาตรควบคุมแบ่งออกเป็น

อัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานความร้อนโดยการนำความร้อนของของไหล

$$K_a \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right] A_a$$

โดยที่ K_a คือสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของของไหล ($\text{W/m}^\circ\text{C}$)

T คืออุณหภูมิของของไหล ($^\circ\text{C}$)

A_a คือพื้นที่ในการถ่ายเทความร้อนของของไหล (m^2)

อัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานความร้อนโดยการพาความร้อน

$$h_v(\theta - T)A dx$$

โดยที่ h_v คือสัมประสิทธิ์การพาความร้อนเชิงปริมาตร ($\text{W/m}^3\text{ }^\circ\text{C}$)

θ คืออุณหภูมิของวัสดุ ($^\circ\text{C}$)

อัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานที่ไหลผ่านปริมาตรควบคุม

$$\frac{\partial \dot{E}}{\partial x} dx = \frac{\partial E}{\partial x} u$$

เนื่องจาก $\frac{\partial \dot{E}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (e \rho_a A_a dx)$

ดังนั้น

$$A_a u \frac{\partial E}{\partial x} = A_a u \frac{\partial \rho_a e}{\partial x} dx$$

และ

$$\frac{\partial E}{\partial x} = A_a \frac{\partial \rho_a e}{\partial x} dx$$

โดยที่ u คือความเร็วของของไหล (m/s)

ρ_a คือความหนาแน่นของของไหล (kg/m^3)

e คือพลังงานภายในจำเพาะ (J/kg)

แทนค่าปริมาณต่างลงในสมการ (3.1)

$$A_a \frac{\partial \rho_a e}{\partial \tau} = A_a \frac{\partial}{\partial x} \left[K_a \frac{\partial T}{\partial x} \right] + h_v A (\theta - T) - u A_a \frac{\partial \rho_a e}{\partial x} \quad (3.2)$$

เนื่องจาก $h = e + \frac{p}{\rho}$

โดยที่ p คือความดัน (N/m^2)

h คือเอนทาลปี (J/kg)

ถ้าสมมติให้ ความหนาแน่น ความดัน และสัมประสิทธิ์การนำความร้อนมีค่าคงที่ แทนค่าพลังงานภายในลงในสมการ (3.2) จะได้

$$A_a \rho_a \left[\frac{\partial h}{\partial \tau} + u \frac{\partial h}{\partial x} \right] = A_a K_a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + h_v A (\theta - T) \quad (3.3)$$

กำหนดให้แก๊สที่ใช้เป็นแก๊สในอุดมคติ

$$dh = C_p dT \quad (3.4)$$

โดยที่ C_p คือความจุความร้อนจำเพาะของของไหลที่ความดันคงที่ ($J/kg^\circ C$)

จากการแทนค่า h สมการ (3.3) จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\rho_a C_p A_a \left[\frac{\partial T}{\partial \tau} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right] = A_a K_a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + h_v A (\theta - T) \quad (3.5)$$

พื้นที่ที่ใช้ในการถ่ายเทความร้อนของของไหล $A_a = \epsilon A$

โดยที่ ϵ คืออัตราส่วนช่องว่าง

A คือพื้นที่ภาคตัดขวางของชั้นวัสดุหนา

ดังนั้นสมการความสมดุลพลังงานของของไหล

$$\rho_a C_p \epsilon A \left[\frac{\partial T}{\partial \tau} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right] = \epsilon A K_a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + h_v A (\theta - T) \quad (3.6)$$

พิจารณาความสมดุลพลังงานของวัสดุ

$$\begin{bmatrix} \text{อัตราเพิ่ม} \\ \text{ขึ้นของพลังงาน} \\ \text{ภายในปริมาตร} \\ \text{ควบคุม} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{อัตราของ} \\ \text{พลังงานที่} \\ \text{เข้าสู่ปริมาตร} \\ \text{ควบคุม} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{อัตราของ} \\ \text{พลังงานที่ออก} \\ \text{จากปริมาตร} \\ \text{ควบคุม} \end{bmatrix}$$

แต่เนื่องจากวัสดุไม่มีการเคลื่อนที่ดังสมการความสมดุลพลังงานที่ได้คือ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} &= Q_x - Q_{x+dx} \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} &= \frac{\partial Q}{\partial x} dx \end{aligned}$$

(3.7)

อัตราการถ่ายเทความร้อนที่เข้าและออกจากปริมาตรควบคุมแบ่งออกเป็น

อัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานความร้อนโดยการนำความร้อนของวัสดุ

$$K_b \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \right] A_b$$

โดยที่ K_b คือสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของวัสดุ ($\text{W/m}^\circ\text{C}$)

θ คืออุณหภูมิของวัสดุ ($^\circ\text{C}$)

A_b คือพื้นที่ในการถ่ายเทความร้อนของวัสดุ (m^2)

อัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานความร้อนโดยการพาความร้อน

$$h_v(T-\theta)A_b dx$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานภายในปริมาตรควบคุมของวัสดุคือ

$$\frac{\partial E}{\partial \tau} = A_b \frac{\partial \rho_b e}{\partial \tau} dx$$

โดยที่ ρ_b คือความหนาแน่นของวัสดุ (kg/m^3)

C_b คือความจุความร้อนจำเพาะของวัสดุที่ความดันคงที่ ($\text{J/kg}^\circ\text{C}$)

แทนค่าปริมาณต่างลงในสมการ (3.7)

$$A_b \frac{\partial \rho_b e}{\partial \tau} = A_b \frac{\partial}{\partial x} \left[K_b \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + h_v A (T - \theta) \quad (3.8)$$

เนื่องจาก $h = e + \frac{p}{\rho}$

ถ้าสมมติให้ ความหนาแน่น ความดัน และสัมประสิทธิ์การนำความร้อนมีค่าคงที่ แทนค่าพลังงานภายในลงในสมการ (3.8) จะได้

$$A_b \rho_b \left[\frac{\partial h}{\partial \tau} \right] = A_b K_b \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + h_v A (T - \theta) \quad (3.9)$$

แต่ $dh = C_b d\theta$ แทนค่า h ในสมการ (3.9)

$$\rho_b C_b A_b \left[\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right] = A_b K_b \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + h_v A (T - \theta) \quad (3.10)$$

แต่พื้นที่ในการถ่ายเทความร้อนของวัสดุ $A_b = (1-\epsilon)A$

ดังนั้นสมการความสมดุลพลังงานของวัสดุคือ

$$\rho_b C_b (1-\varepsilon) A \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \right] = (1-\varepsilon) A K_b \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + h_v A (T - \theta) \quad (3.11)$$

ข้อสมมุติฐานเพิ่มเติมในการพิจารณาการถ่ายเทความร้อนในชั้นวัสดุหนากรณีวัสดุมีอุณหภูมิสม่ำเสมอคือ

1. ไม่คิดการถ่ายเทความร้อนในแนวรัศมีของชั้นหนา
2. ไม่คิดค่าการนำความร้อนระหว่างก้อนของวัสดุและค่าการนำความร้อนของของไหล
3. ถือว่าไม่มีการถ่ายเทมวล
4. ความเร็วและความดันของของไหลถือว่ามีความคงที่ตลอดชั้นหนา
5. ไม่คิดผลของการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของของไหลและวัสดุที่มาจากการเปลี่ยนแปลง

อุณหภูมิ

6. เนื่องจากถือว่าวัสดุที่ใช้ในการส่งถ่ายความร้อนมีค่าการนำความร้อนสูงมากและวัสดุมีขนาดเล็ก ดังนั้นถือว่าอุณหภูมิของวัสดุเท่ากันทั้งก้อน

7. คุณสมบัติทางความร้อนของวัสดุและของไหลขึ้นอยู่กับอุณหภูมิเท่านั้น

ดังนั้นสมการ (3.6) และ (3.11) จะเปลี่ยนเป็น

$$\varepsilon \rho_a C_a \left[\frac{\partial T}{\partial \tau} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right] = h_v (\theta - T) \quad (3.12)$$

$$(1-\varepsilon) \rho_b C_b \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \right] = h_v (T - \theta) \quad (3.13)$$

จากการศึกษาของ Maclaine-Cross (1980) ได้พบว่าถ้าอัตราส่วนค่าความจุความร้อนของวัสดุต่อความจุความร้อนของของไหลมีค่ามากกว่า 100 จะถือว่าค่าอัตราค่าการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของของไหลสามารถตัดทิ้งได้

$$\frac{\rho_b C_b (1-\varepsilon)}{\rho_a C_a \varepsilon} > 100$$

สมการ (3.12) จะเปลี่ยนเป็น

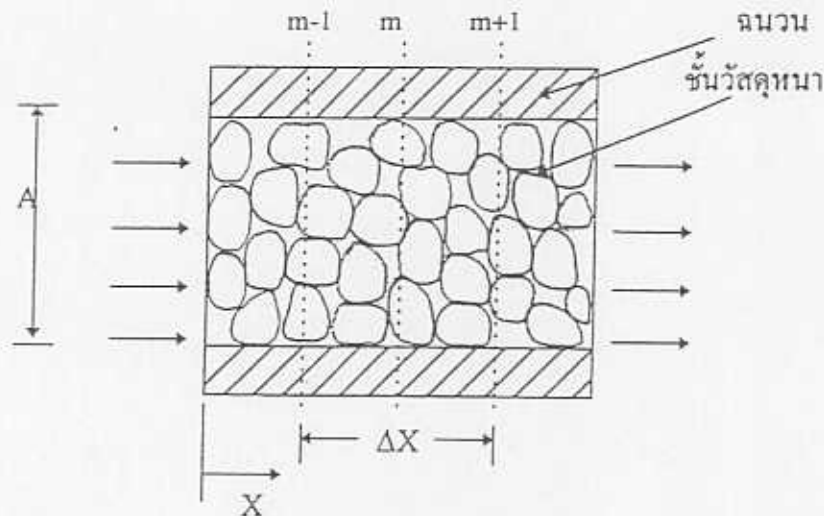
$$\varepsilon \rho_a C_a \frac{\partial T}{\partial x} = h_v (\theta - T) \quad (3.14)$$

จากสมการ (3.13)

$$(1 - \varepsilon) \rho_b C_b \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \right] = h_v (T - \theta)$$

จะได้ว่า

$$\varepsilon \rho_a C_a \frac{\partial T}{\partial x} = -(1 - \varepsilon) \rho_b C_b \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \quad (3.15)$$



รูปที่ 3.2 การศึกษาโดยใช้การวิเคราะห์เชิงเลขของชั้นวัสดุหนา

ในการศึกษาการถ่ายเทความร้อนในชั้นวัสดุหนาที่มีการกระจายอุณหภูมิในวัสดุสม่ำเสมอ จะใช้วิธีการวิเคราะห์เชิงเลข เนื่องจากสมการที่ได้สามารถแก้สมการได้ง่ายและยังสามารถทำการคำนวณได้อย่างรวดเร็วอีกด้วย โดยในการศึกษาจะแบ่งชั้นวัสดุหนาออกเป็นชั้นบางๆ ดังรูปที่ 3.2 แล้วทำการหาค่าของอุณหภูมิของวัสดุและของไหลที่เปลี่ยนแปลงตามระยะทางและเวลาในแต่ละช่วง จากสมการ (3.14) สามารถเขียนสมการความสมดุลพลังงานของของไหลใหม่โดยใช้วิธีการวิเคราะห์เชิงเลข คือ

$$T_{m+1}^i - T_{m-1}^i = \frac{h_v \Delta x}{\rho_a C_a \varepsilon u} (\theta_m^i - T_m^i)$$

กำหนดให้ $B = \frac{\rho_a C_a \varepsilon u}{h_v \Delta x}$

ดังนั้น $T_{m+1}^i - T_{m-1}^i = \frac{1}{B} (\theta_m^i - T_m^i)$ (3.16)

จากสมการ (3.15) สามารถเขียนสมการความสมดุลพลังงานของวัสดุใหม่โดยใช้วิธีการวิเคราะห์เชิงเลข คือ

$$(1 - \varepsilon) \rho_b C_b \frac{\Delta x}{\Delta t} (\theta_m^{i+1} - \theta_m^i) = \rho_a C_a \varepsilon u (T_{m-1}^i - T_{m+1}^i)$$

กำหนดให้ $C = \frac{(1 - \varepsilon) \rho_b C_b \Delta x}{\rho_a C_a \varepsilon \Delta t}$

ดังนั้น

$$\theta_m^{i+1} - \theta_m^i = \frac{1}{C} (T_{m-1}^i - T_{m+1}^i)$$
 (3.17)

โดยการประมาณ

$$T_m^i = \frac{T_{m+1}^i + T_{m-1}^i}{2}$$
 (3.18)

นำสมการ (3.18) แทนค่าลงในสมการ (3.16) จะได้สมการการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของไหลคือ

$$T_{m+1}^i = \frac{1}{1 + 2B} (2\theta_m^i + (2B - 1)T_m^i)$$
 (3.19)

นำสมการ (3.18) แทนค่าลงในสมการ (3.17) สมการการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัสดุคือ

$$\theta_{m+1}^{i+1} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{2}{C} + 1 - 2B \right) T_m^i + \left(1 + 2B - \frac{2}{C} \right) T_{m+1}^i \right)$$
 (3.20)

ค่าเงื่อนไขเริ่มต้น ที่ i (เวลา) = 0

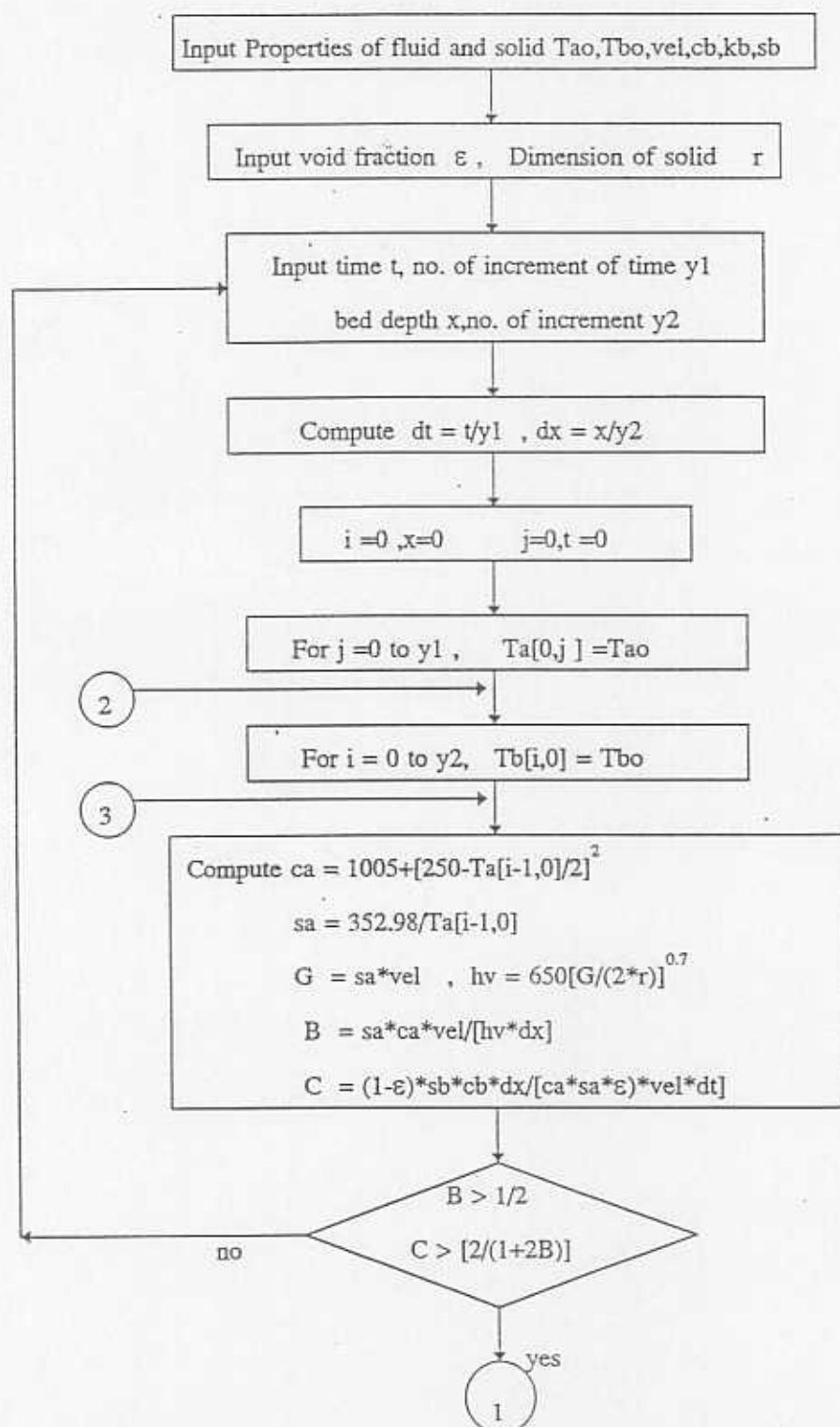
อุณหภูมิเฉลี่ยของของไหลที่ทุกจุดในชั้นวัสดุหามีค่าเท่าอุณหภูมิเริ่มต้น = T_i

อุณหภูมิเฉลี่ยของวัสดุที่ทุกจุดในชั้นวัสดุหามีค่าเท่าอุณหภูมิเริ่มต้น = θ_i

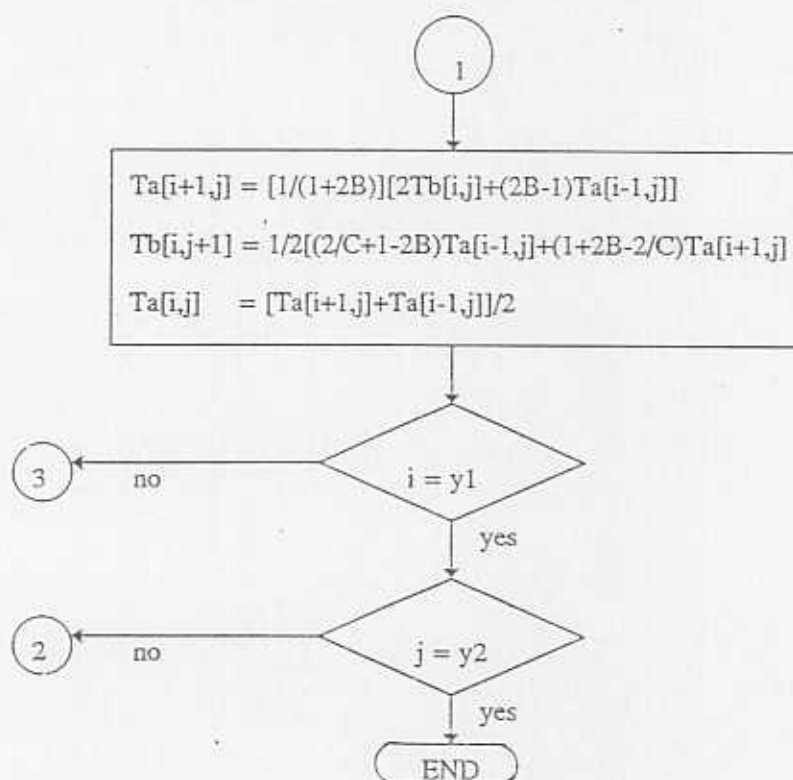
ค่าเงื่อนไขขอบเขต ที่ m (ระยะทาง) = 0 $T = T_o$

3.2 ขั้นตอนการคำนวณ

ในการคำนวณหาอุณหภูมิของวัสดุและของไหลโดยการวิเคราะห์เชิงเลขนี้สมการที่ใช้คือ สมการที่ (3.19) และ (3.20) ข้อควรระวังในการใช้สมการเชิงเลขคือ ในการเลือกใช้ค่า Δx และ Δt เนื่องจากความแม่นยำในการคำนวณจะมีผลโดยตรงจากสองค่านี้คือ หากเลือกค่า Δx และ Δt ที่มีขนาดใหญ่เกินไปนอกจากจะทำให้ค่าอุณหภูมิที่คำนวณได้ขาดความแม่นยำแล้วยังจะทำให้การคำนวณขาดความเสถียรอีกด้วย เพื่อให้การคำนวณมีความเสถียรเราจะต้องเลือกค่า Δx และ Δt ที่ทำให้ค่า $B > 1/2$ และ $C > (2/(1+2B))$ ดังนั้นในการคำนวณหากต้องการความแม่นยำในการคำนวณและป้องกันการเกิดความไม่เสถียรแล้วควรเลือกค่า Δx และ Δt ที่มีขนาดเล็กไว้ก่อน แต่ผลที่จากการเลือกค่า Δx และ Δt ที่มีขนาดเล็กก็คือ เวลาที่ใช้ในการคำนวณก็จะเพิ่มขึ้น ข้อมูลที่จะต้องใช้ในการคำนวณคือ ความยาวของชั้นวัสดุหนา จำนวนในการแบ่งของชั้นวัสดุหนา เส้นผ่าศูนย์กลางของวัสดุ เวลาที่ใช้ในการทดลอง จำนวนในการแบ่งเวลา อัตราส่วนช่องว่าง ความจุความร้อนของของไหล ความหนาแน่นของของไหล อุณหภูมิเริ่มต้นของของไหล ความจุความร้อนของวัสดุ ความหนาแน่นของวัสดุ และอุณหภูมิเริ่มต้นของวัสดุ จากข้อมูลที่ได้ขั้นตอนต่อไปในการคำนวณเราจะต้องทำการตรวจสอบค่า B และ C ก่อน หากค่าที่ได้ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข เราจะต้องเพิ่มจำนวนในการแบ่งชั้นวัสดุหนาและเวลาให้มากขึ้นจนกว่าค่า B และ C จะสอดคล้องกับเงื่อนไข จากนั้นทำการคำนวณหาอุณหภูมิของของไหลและของวัสดุ โดยขั้นตอนในการคำนวณจะเป็นไปตามรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 ขั้นตอนการคำนวณการถ่ายเทความร้อนในชั้นวัสดุหนากรณีการกระจายอุณหภูมิในวัสดุสม่ำเสมอ



รูปที่ 3.3 ขั้นตอนการคำนวณการถ่ายเทความร้อนในชั้นวัสดุหนากรณีการกระจายอุณหภูมิในวัสดุสม่ำเสมอ (ต่อ)