

1 บทนำ

ใน [1] ได้กล่าวถึง ลักษณะของผลเฉลยของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ในเซตของจำนวนเต็มเกาส์ และ [2] ได้แสดงว่า สมการ $x^4 - y^4 = z^2$ ไม่มีผลเฉลยในเซตของจำนวนเต็มเกาส์ที่ $xyz \neq 0$ ในที่นี้ ได้อาศัยแนวคิดของ [1] และ [2] พิสูจน์ว่า เมื่อกำหนดให้ $\mu = 1+i, 1-i, -1+i, -1-i$ แล้ว

สมการ $x^4 + \mu y^4 = z^2$ ไม่มีผลเฉลยในเซตของจำนวนเต็มเกาส์ที่ $xyz \neq 0$

สมการ $x^4 + \mu y^4 = z^4$ ไม่มีผลเฉลยในเซตของจำนวนเต็มเกาส์ที่ $xyz \neq 0$

สมการ $x^4 + \mu y^4 = 2z^2$ ไม่มีผลเฉลยในเซตของจำนวนเต็มเกาส์ที่ $xyz \neq 0$

สมการ $x^4 + \mu y^4 = 2z^4$ ไม่มีผลเฉลยในเซตของจำนวนเต็มเกาส์ที่ $xyz \neq 0$

สมการ $\frac{1}{x^4} + \frac{\mu}{y^4} = \frac{1}{z^4}$ ไม่มีผลเฉลยในเซตของจำนวนเต็มเกาส์

2 ความรู้พื้นฐาน

ต่อไปนี้จะกล่าวถึงคุณสมบัติบางประการที่จำเป็นต้องรู้จักของจำนวนเต็มเกาส์

เซตของจำนวนเต็มเกาส์ (Gaussian Integers) เป็นเซตย่อยของเซตของจำนวนเชิงซ้อน (Complex Numbers) มีคุณสมบัติเป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม (Integral Domain) สมาชิกเขียนอยู่ในรูปของ $a+bi$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนเต็ม $i = \sqrt{-1}$ และเขียนแทนเซตของจำนวนเต็มเกาส์ด้วย $\mathbb{Z}[i]$ สำหรับ α, β ใน $\mathbb{Z}[i]$ จะกล่าวว่า α หาร β ลงตัวใน $\mathbb{Z}[i]$ ถ้ามี γ ใน $\mathbb{Z}[i]$ ที่ $\alpha\gamma = \beta$ และเขียนแทนด้วย $\alpha|\beta$ สำหรับ $\alpha = a+bi$ ใน $\mathbb{Z}[i]$ ค่าประจำ (norm) ของ α (เขียนแทนด้วย $N(\alpha)$) คือ $N(\alpha) = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$ จะเห็นว่า ค่าประจำของจำนวนเต็มเกาส์ใด ๆ จะเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และทุก α, β ใน $\mathbb{Z}[i]$ $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$, ถ้า $\alpha \neq 0$ และ $\alpha | \beta$ แล้ว $N(\alpha) | N(\beta)$ ในเซตของจำนวนเต็ม จำนวนเต็มเกาส์ ϵ ใดๆ จะเรียกว่า สมาชิกหนึ่งหน่วย (unit) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็มเกาส์ ϵ' ที่ $\epsilon\epsilon' = 1$ ซึ่งสามารถแสดงต่อไปได้ว่า $N(\epsilon) = 1$ และสมาชิกหนึ่งหน่วยของ $\mathbb{Z}[i]$ จะมีเพียง 4 จำนวนเท่านั้น คือ $1, -1, i, -i$ และจำนวนเต็มเกาส์ α, β จะเรียกว่า เป็นสมาชิกกลุ่มเดียวกัน (Associate) ถ้ามีสมาชิกหนึ่งหน่วย ϵ ใน $\mathbb{Z}[i]$ ที่ $\alpha\epsilon = \beta$ และจะเรียก α ว่าเป็นจำนวนเฉพาะ (Prime) ใน $\mathbb{Z}[i]$ ก็ต่อเมื่อ α ไม่เป็นสมาชิกหนึ่งหน่วย และถ้า $p|\alpha$ ใน $\mathbb{Z}[i]$ แล้ว p จะเป็นสมาชิกหนึ่งหน่วยหรือเป็นสมาชิกกลุ่มเดียวกับ α

(2)

ถ้า $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ จะกล่าวว่า p เป็น ห.ร.ม. (Greatest Common Divisor) ของ α กับ β ถ้า $p|\alpha, p|\beta$ และถ้ามี γ ใน $Z[i]$ ที่ $\gamma|\alpha, \gamma|\beta$ แล้ว $\gamma|p$ ถ้า ห.ร.ม. ของจำนวนเต็มเกาส์ α กับ β เป็นสมาชิกหนึ่งหน่วย เราจะเรียก α กับ β ว่าเป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน(Relatively Prime) ใน $Z[i]$

ในการกำหนดจำนวนเต็มเกาส์คู่และจำนวนเต็มเกาส์คี่นั้น จะใช้ $1+i$ ทำหน้าที่คล้าย 2 ในเซตของจำนวนเต็ม ใน [4] ได้แสดงว่า จำนวนเต็มเกาส์ $a+bi$ หารด้วย $1+i$ ลงตัว ก็ต่อเมื่อ $a+b$ หารด้วย 2 ลงตัว ในเซตของจำนวนเต็ม และยังพบว่า สำหรับจำนวนเต็มเกาส์ α ใดๆ α หารด้วย $1+i$ ลงตัว หรือ $\alpha -1$ หารด้วย $1+i$ ลงตัว เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น และจะเรียก α ใน $Z[i]$ ที่หารด้วย $1+i$ ลงตัวว่า จำนวนเต็มเกาส์คู่ และเรียก α ใน $Z[i]$ ที่ $\alpha-1$ หารด้วย $1+i$ ลงตัวว่า จำนวนเต็มเกาส์คี่

จากการกำหนดจำนวนเต็มเกาส์คู่และจำนวนเต็มเกาส์คี่ จะได้ว่า

1. ผลบวกของจำนวนเต็มเกาส์คู่หรือผลบวกของจำนวนเต็มเกาส์คี่ จะเป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่
2. ผลบวกของจำนวนเต็มเกาส์คู่กับจำนวนเต็มเกาส์คี่ จะเป็นจำนวนเต็มเกาส์คี่
3. ผลคูณของจำนวนเต็มเกาส์คู่กับจำนวนเต็มเกาส์คู่หรือคี่ จะเป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่
4. ให้ α เป็นจำนวนเต็มเกาส์ใด ๆ
 - 4.1 ถ้า α^2 เป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่ แล้ว α จะเป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่
 - 4.2 ถ้า α^2 เป็นจำนวนเต็มเกาส์คี่ แล้ว α จะเป็นจำนวนเต็มเกาส์คี่
5. จำนวนเฉพาะคู่จะมีเพียง 4 ตัวเท่านั้นคือ $1+i, 1-i, -1+i, -1-i$

ทฤษฎีบทประกอบ 2.1 ให้ α, β เป็นจำนวนเต็มเกาส์ ถ้า $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์ แล้ว

$\frac{\alpha}{\beta}$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์

พิสูจน์ ให้ α, β เป็นจำนวนเต็มเกาส์ที่ $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์ เราสามารถสมมติให้ ห.ร.ม. ของ α กับ β เป็นสมาชิกหนึ่งหน่วย จาก $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์ จะมีจำนวนเต็มเกาส์ γ ที่ $\alpha^2 = \gamma\beta^2$ นั่นคือ $\beta|\alpha^2$ จาก ห.ร.ม. ของ α กับ β เป็นสมาชิกหนึ่งหน่วย จะได้ $\beta|\alpha$

เพราะฉะนั้น $\frac{\alpha}{\beta}$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์ □

3 ผลเฉลยของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $Z[i]$ เมื่อ μ เป็นจำนวนเฉพาะคู่

ในการหาผลเฉลยของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $Z[i]$ นี้ จำเป็นต้องรู้จักนิยามและคุณสมบัติบางอย่าง เพื่อนำไปสู่ทฤษฎีหลักที่สำคัญต่อไป ในงานวิจัยนี้จะสนใจเฉพาะผลเฉลยของสมการที่ไม่ใช่ศูนย์เท่านั้น

เราทราบว่า

(α, β, γ) เป็นผลเฉลยของ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $Z[i] - \{0\}$ ก็ต่อเมื่อ $(p\alpha, p\beta, p\gamma)$ เป็นผลเฉลยของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $Z[i] - \{0\}$ เมื่อ p เป็นจำนวนเต็มเกาส์ใด ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์ ดังนั้นเราจึงสนใจเฉพาะผลเฉลย (α, β, γ) ของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $Z[i] - \{0\}$ ที่ไม่มีตัวหารร่วมกัน (ยกเว้นสมาชิกหนึ่งหน่วย)

ยิ่งไปกว่านั้น เรายังทราบว่า ถ้า (α, β, γ) เป็นผลเฉลยของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $Z[i] - \{0\}$ แล้ว $(-\alpha, \beta, \gamma), (-\alpha, -\beta, \gamma), (\alpha, \beta, -\gamma)$ และยังมีอื่นๆอีก ต่างก็เป็นผลเฉลยของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $Z[i] - \{0\}$

ดังนั้น ถ้ากำหนดความสัมพันธ์ระหว่างผลเฉลยของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $Z[i] - \{0\}$ ดังต่อไปนี้ กำหนดให้ (α, β, γ) และ $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ เป็นผลเฉลยของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $Z[i] - \{0\}$ และกำหนด $(\alpha, \beta, \gamma) \sim (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิกหนึ่งหน่วย $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ที่ $\alpha = \varepsilon_1 \alpha_1, \beta = \varepsilon_2 \beta_1, \gamma = \varepsilon_3 \gamma_1$ จะได้ว่า $\sim$ เป็นความสัมพันธ์สมมูล ดังนั้นผลเฉลยของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $Z[i] - \{0\}$ จะถูกแบ่งออกเป็นกลุ่มสมมูล และเขียน $[(\alpha, \beta, \gamma)]$ แทนกลุ่มสมมูลที่มี (α, β, γ) เป็นสมาชิก และจะถือว่าผลเฉลยของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $Z[i] - \{0\}$ ที่อยู่ในกลุ่มสมมูลเดียวกันไม่แตกต่างกัน

เมื่อกำหนดให้ (α, β, γ) เป็นผลเฉลยของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $Z[i] - \{0\}$ ที่ไม่มีตัวหารร่วมกัน (ยกเว้นสมาชิกหนึ่งหน่วย) จะทำให้ได้ความสัมพันธ์ของผลเฉลยแต่ละคู่ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1 ถ้า (α, β, γ) เป็นผลเฉลยของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $Z[i] - \{0\}$ ที่ไม่มีตัวหารร่วมกัน (ยกเว้นสมาชิกหนึ่งหน่วย) แล้วแต่ละคู่ของ α, β, γ จะเป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน

พิสูจน์ ให้ (α, β, γ) เป็นผลเฉลยของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $Z[i] - \{0\}$ ที่ไม่มีตัวหารร่วมกัน (ยกเว้นสมาชิกหนึ่งหน่วย)

(4)

พิจารณา ท.ร.ม. ของ α และ β

สมมติว่ามี p เป็นจำนวนเฉพาะที่เป็นตัวหารร่วมของ α และ β ดังนั้น $p | (\alpha^2 + \mu\beta^2)$ หรือ $p | \gamma^2$ จาก p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ $p | \gamma$ นั่นคือ p เป็นตัวหารร่วมของ α, β และ γ แต่ α, β และ γ ไม่มีตัวหารร่วมกัน (ยกเว้นสมาชิกหนึ่งหน่วย) ดังนั้นเป็นไปได้ นั่นคือ α และ β เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน

พิจารณา ท.ร.ม. ของ β และ γ สามารถทำได้ทำนองเดียวกับการพิจารณา ท.ร.ม. ของ α และ β

พิจารณา ท.ร.ม. ของ α และ γ

สมมติว่ามี p เป็นจำนวนเฉพาะที่เป็นตัวหารร่วมของ α และ γ ดังนั้น $p^2 | (\gamma^2 - \alpha^2)$ หรือ $p^2 | \mu\beta^2$ จาก μ และ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ $p | \beta$ นั่นคือ p เป็นตัวหารร่วมของ α, β และ γ แต่ α, β และ γ ไม่มีตัวหารร่วมกัน (ยกเว้นสมาชิกหนึ่งหน่วย) ดังนั้นเป็นไปได้ นั่นคือ α และ γ เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน $\square$

นิยาม 3.1 อันดับสามชั้น (α, β, γ) เป็นผลเฉลยปฐมฐาน(Primitive root) ของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $Z[i] - \{0\}$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละคู่ของ α, β, γ เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน

นั่นคือ (α, β, γ) เป็นผลเฉลยปฐมฐานของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $Z[i] - \{0\}$ ก็ต่อเมื่อ α, β, γ ไม่มีตัวหารร่วมกัน(ยกเว้นสมาชิกหนึ่งหน่วย)

ทฤษฎีบทประกอบ 3.2 ถ้า (α, β, γ) เป็นผลเฉลยปฐมฐานของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $Z[i] - \{0\}$ แล้ว α, γ เป็นจำนวนเต็มเกาส์คือ

พิสูจน์ สมมติให้ α เป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่ จะได้ α^2 เป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่ จาก μ เป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่ จะได้ $\gamma^2 = \alpha^2 + \mu\beta^2$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่ นั่นคือ γ เป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่ ขัดแย้งกับ α, γ เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน เพราะฉะนั้น α ต้องเป็นจำนวนเต็มเกาส์คี่ และ $\gamma^2 = \alpha^2 + \mu\beta^2$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์คี่ จะได้ γ เป็นจำนวนเต็มเกาส์คี่ $\square$

ทฤษฎีบท 3.3 ถ้า (α, β, γ) เป็นผลเฉลยปฐมฐานของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $Z[i] - \{0\}$ แล้ว 2 เป็น ท.ร.ม. ของ $\gamma + \alpha$ และ $\gamma - \alpha$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบทประกอบ 3.2 จะได้ $\gamma + \alpha$ และ $\gamma - \alpha$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่ ดังนั้น $\mu | (\gamma + \alpha)$ และ $\mu | (\gamma - \alpha)$ นั่นคือ $\mu^2 | (\gamma + \alpha)(\gamma - \alpha)$ จาก $\mu\beta^2 = (\gamma + \alpha)(\gamma - \alpha)$ จะได้



$\mu^2 | \mu\beta^2$ จาก μ เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ $\mu | \beta$ นั่นคือ $\mu^3 | \mu\beta^2$ เพราะฉะนั้น $\mu^3 | (\gamma + \alpha)(\gamma - \alpha)$

จาก μ เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ $\mu^2 | (\gamma + \alpha)$ หรือ $\mu^2 | (\gamma - \alpha)$ จาก $\mu^2 | 2$ ดังนั้น $\mu^2 | 2\alpha$

พิจารณา ถ้า $\mu^2 | (\gamma + \alpha)$ แล้ว $\mu^2 | [(\gamma + \alpha) - 2\alpha]$ หรือ $\mu^2 | (\gamma - \alpha)$

ถ้า $\mu^2 | (\gamma - \alpha)$ แล้ว $\mu^2 | [(\gamma - \alpha) + 2\alpha]$ หรือ $\mu^2 | (\gamma + \alpha)$

ดังนั้นสรุปได้ว่า $\mu^2 | (\gamma + \alpha)$ และ $\mu^2 | (\gamma - \alpha)$ จาก $2 | \mu^2$ ดังนั้น $2 | (\gamma + \alpha)$ และ $2 | (\gamma - \alpha)$

เพราะฉะนั้น 2 เป็นตัวหารร่วมของ $\gamma + \alpha$ และ $\gamma - \alpha$

สมมติให้ p เป็นตัวหารร่วมของ $\gamma + \alpha$ และ $\gamma - \alpha$ จะได้ $p | [(\gamma + \alpha) + (\gamma - \alpha)]$ และ

$p | [(\gamma + \alpha) - (\gamma - \alpha)]$ ดังนั้นจะได้ $p | 2\gamma$ และ $p | 2\alpha$ จาก α และ γ เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน จะได้ $p | 2$

นั่นคือ 2 เป็น ห.ร.ม. ของ $\gamma + \alpha$ และ $\gamma - \alpha$ $\square$

ทฤษฎีบท 3.4 ถ้า (α, β, γ) เป็นผลเฉลยปฐมฐานของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $Z[i] - \{0\}$

แล้ว $\frac{\gamma + \alpha}{2}, \gamma - \alpha$ เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน หรือ $\frac{\gamma - \alpha}{2}, \gamma + \alpha$ เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน

พิสูจน์ จาก 2 เป็น ห.ร.ม. ของ $\gamma + \alpha$ หรือ $\gamma - \alpha$ จะได้ว่า $\frac{\gamma + \alpha}{2}$ และ $\frac{\gamma - \alpha}{2}$ เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน นั่นคือ $\frac{\gamma + \alpha}{2}$ หรือ $\frac{\gamma - \alpha}{2}$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์คือ

พิจารณา กรณีที่ $\frac{\gamma + \alpha}{2}$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์คือ

ให้ p เป็นตัวหารร่วมของ $\gamma(\gamma + \alpha, 2)$ และ $\gamma - \alpha$ ดังนั้น $p | \gamma(\gamma + \alpha, 2)$ และ $p | (\gamma - \alpha)$

เนื่องจาก $\frac{\gamma + \alpha}{2}$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์คือ ดังนั้น p เป็นจำนวนเต็มเกาส์คือ เพราะฉะนั้น p และ 2 เป็น

จำนวนเฉพาะต่อกัน จาก $p | (\gamma - \alpha)$ และ $2 | (\gamma - \alpha)$ จะได้ $2p | (\gamma - \alpha)$ จาก $p | \frac{\gamma + \alpha}{2}$ เพราะฉะนั้น

$2p | [(\gamma - \alpha) + (\gamma + \alpha)]$ นั่นคือ $2p | 2\gamma$ หรือ $p | \gamma$ ในทำนองเดียวกัน จะได้ $p | \alpha$ จาก α กับ γ

เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน จะได้ว่า p ต้องเป็นสมาชิกหนึ่งหน่วย เพราะฉะนั้น จะได้ $\frac{\gamma + \alpha}{2}$ และ $\gamma - \alpha$

เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน

กรณีที่ $\frac{\gamma - \alpha}{2}$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์คือ จะสามารถทำได้ทำนองเดียวกับ กรณี $\frac{\gamma + \alpha}{2}$ เป็นจำนวนเต็ม

เกาส์คือ ซึ่งในกรณี $\frac{\gamma - \alpha}{2}$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์คือนี้จะสรุปได้ว่า $\frac{\gamma - \alpha}{2}$ และ $\gamma + \alpha$ เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน $\square$

(6)

จากทฤษฎีบท 3.4 นี้ทำให้เราทราบว่า ถ้า (α, β, γ) เป็นผลเฉลยปฐมฐานของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $\mathbb{Z}[i] - \{0\}$ แล้ว $\frac{\gamma + \alpha}{2}$ กับ $\gamma - \alpha$ เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน หรือ $\gamma + \alpha$ กับ $\frac{\gamma - \alpha}{2}$ เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน

ต่อไปนี้จะกำหนด $\theta = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } \mu = 1+i \text{ หรือ } -1-i \\ -1 & \text{ถ้า } \mu = 1-i \text{ หรือ } -1+i \end{cases}$ ซึ่งจะทำให้ $\mu^2 = 2\theta i$

จะพิจารณากรณีที่ $\frac{\gamma + \alpha}{2}$ กับ $\gamma - \alpha$ เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน ซึ่งจะได้ว่า $\frac{\gamma + \alpha}{2}$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์คือ และ $\frac{\gamma + \alpha}{2\theta}$ กับ $\frac{\gamma - \alpha}{i\mu}$ เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน

$$\begin{aligned} \text{จาก } \alpha^2 + \mu\beta^2 &= \gamma^2 \text{ จะได้ } \mu\beta^2 = (\gamma + \alpha)(\gamma - \alpha) \\ \frac{\beta^2}{\mu^2} &= \frac{(\gamma + \alpha)(\gamma - \alpha)}{\mu^3} \\ \left(\frac{\beta}{\mu}\right)^2 &= \frac{(\gamma + \alpha)(\gamma - \alpha)}{2\theta i\mu} \\ \left(\frac{\beta}{\mu}\right)^2 &= \left(\frac{\gamma + \alpha}{2\theta}\right)\left(\frac{\gamma - \alpha}{i\mu}\right) \end{aligned}$$

จาก $\frac{\gamma + \alpha}{2\theta}$ และ $\frac{\gamma - \alpha}{i\mu}$ เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน และ $\mathbb{Z}[i]$ มีคุณสมบัติเป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็มที่มีการแยกตัวประกอบออกเป็นจำนวนเฉพาะได้แบบเดียว (Unique Factorization Domain) จะได้ว่า มีสมาชิกหนึ่ง

หน่วย $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ และจำนวนเต็มเกาส์ ρ, λ ที่

$$\frac{\gamma + \alpha}{2\theta} = \varepsilon_1 \rho^2 \text{ และ } \frac{\gamma - \alpha}{i\mu} = \varepsilon_2 \lambda^2$$

ทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้จะเป็นการแสดงว่า $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ สามารถเลือกเป็น 1 ได้

ทฤษฎีบทประกอบ 3.5 ถ้า (α, β, γ) เป็นผลเฉลยปฐมฐานของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $\mathbb{Z}[i] - \{0\}$ ที่มี $\frac{\gamma + \alpha}{2}$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์คือ แล้วจะมี $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ ใน $[(\alpha, \beta, \gamma)]$ และจำนวนเต็มเกาส์ ρ, λ ที่

$$\frac{\gamma_1 + \alpha_1}{2\theta} = \rho^2 \text{ และ } \frac{\gamma_1 - \alpha_1}{i\mu} = \lambda^2$$

(7)

พิสูจน์ จาก $\frac{\gamma+\alpha}{2\theta} = \varepsilon_1 \rho^2$ และ $\frac{\gamma-\alpha}{i\mu} = \varepsilon_2 \lambda^2$

จะได้ว่า $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \rho^2 \lambda^2 = \left(\frac{\gamma+\alpha}{2\theta}\right) \left(\frac{\gamma-\alpha}{i\mu}\right) = \left(\frac{\beta}{\mu}\right)^2$

นั่นคือ $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \left(\frac{\beta}{\mu \rho \lambda}\right)^2$

ดังนั้น สรุปได้ว่า $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ เป็นสมาชิกหนึ่งหน่วย ที่สามารถเขียนอยู่ในรูปของกำลังสอง ดังนั้น $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \pm 1$

พิจารณา กรณีที่ $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1$ จะสามารถแบ่งได้เป็น 4 กรณี คือ

กรณีที่ 1 เมื่อ $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ จะได้ $\frac{\gamma+\alpha}{2\theta} = \rho^2$ และ $\frac{\gamma-\alpha}{i\mu} = \lambda^2$

กรณีที่ 2 เมื่อ $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$ จะได้ $\frac{\gamma+\alpha}{2\theta} = -\rho^2$ และ $\frac{\gamma-\alpha}{i\mu} = -\lambda^2$

$$\frac{\gamma+\alpha}{2\theta} = (i\rho)^2 \text{ และ } \frac{\gamma-\alpha}{i\mu} = (i\lambda)^2$$

กรณีที่ 3 เมื่อ $\varepsilon_1 = i$ และ $\varepsilon_2 = -i$ จะได้ $\frac{\gamma+\alpha}{2\theta} = i\rho^2$ และ $\frac{\gamma-\alpha}{i\mu} = -i\lambda^2$

$$\frac{\gamma i + \alpha i}{2\theta} = (i\rho)^2 \text{ และ } \frac{\gamma i - \alpha i}{i\mu} = \lambda^2$$

กรณีที่ 4 เมื่อ $\varepsilon_1 = -i$ และ $\varepsilon_2 = i$ จะได้ $\frac{\gamma+\alpha}{2\theta} = -i\rho^2$ และ $\frac{\gamma-\alpha}{i\mu} = i\lambda^2$

$$\frac{\gamma i + \alpha i}{2\theta} = \rho^2 \text{ และ } \frac{\gamma i - \alpha i}{i\mu} = (i\lambda)^2$$

ในการพิจารณา กรณีที่ $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1$ จะทำได้คล้ายกับ กรณี $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1$

นั่นคือ เราสามารถหา (α, β, γ) ใน $[(\alpha, \beta, \gamma)]$ และจำนวนเต็มเกาส์ ρ, λ ที่

$$\frac{\gamma_1 + \alpha_1}{2\theta} = \rho^2 \text{ และ } \frac{\gamma_1 - \alpha_1}{i\mu} = \lambda^2 \quad \square$$

จาก $[(\alpha, \beta, \gamma)]$ เป็นกลุ่มสมมูลที่เป็นผลเฉลยปฐมฐานของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $Z[i] - \{0\}$

ที่มี $\frac{\gamma+\alpha}{2}$ เป็นจำนวนเต็มเกาส์ก็ จะได้ว่า

$$\frac{\gamma+\alpha}{2\theta} = \rho^2 \text{ และ } \frac{\gamma-\alpha}{i\mu} = \lambda^2$$

เมื่อ ρ เป็นจำนวนเต็มเกาส์ก็ λ เป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่ และ ρ, λ เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน

(8)

จาก $\frac{\gamma+\alpha}{2\theta} = \rho^2$ และ $\frac{\gamma-\alpha}{i\mu} = \lambda^2$
 $\gamma+\alpha = 2\theta\rho^2$ และ $\gamma-\alpha = i\mu\lambda^2$
 $2\gamma = 2\theta\rho^2 + i\mu\lambda^2$ และ $2\alpha = 2\theta\rho^2 - i\mu\lambda^2$

จาก λ เป็นจำนวนเต็มเกาส์คู่ ดังนั้น $\lambda = \mu\delta$ บาง δ ที่เป็นจำนวนเต็มเกาส์

ดังนั้น $2\gamma = 2\theta\rho^2 + i\mu(\mu^2\delta^2)$ และ $2\alpha = 2\theta\rho^2 - i\mu(\mu^2\delta^2)$
 $2\gamma = 2\theta\rho^2 + i\mu(2\theta i\delta^2)$ และ $2\alpha = 2\theta\rho^2 - i\mu(2\theta i\delta^2)$
 $2\gamma = 2\theta\rho^2 - 2\theta\mu\delta^2$ และ $2\alpha = 2\theta\rho^2 + 2\theta\mu\delta^2$
 $\gamma = \theta(\rho^2 - \mu\delta^2)$ และ $\alpha = \theta(\rho^2 + \mu\delta^2)$

จาก $\alpha^2 + \mu\beta^2 = \gamma^2$ จะได้ $\mu\beta^2 = (\gamma + \alpha)(\gamma - \alpha)$
 $\frac{\beta^2}{\mu^2} = \frac{(\gamma+\alpha)(\gamma-\alpha)}{\mu^3}$
 $(\frac{\beta}{\mu})^2 = \frac{(\gamma+\alpha)(\gamma-\alpha)}{2\theta i\mu}$
 $(\frac{\beta}{\mu})^2 = (\frac{\gamma+\alpha}{2\theta})(\frac{\gamma-\alpha}{i\mu}) = \rho^2\lambda^2$
 $\beta^2 = (\mu\rho\lambda)^2$

ดังนั้น จะได้ $\beta = \mu\rho\lambda$ หรือ $\beta = -\mu\rho\lambda$
 $\beta = \mu\rho(\mu\delta)$ หรือ $\beta = -\mu\rho(\mu\delta)$
 $\beta = \mu^2\rho\delta$ หรือ $\beta = -\mu^2\rho\delta$

จากทฤษฎีบท 3.4 ที่ว่า ถ้า (α, β, γ) เป็นผลเฉลยปฐมฐานของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $\mathbb{Z}[i] - \{0\}$ แล้ว $\frac{\gamma+\alpha}{2}, \gamma - \alpha$ เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน หรือ $\frac{\gamma-\alpha}{2}, \gamma + \alpha$ เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน

ในกรณีที่ $\frac{\gamma+\alpha}{2}, \gamma - \alpha$ เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน เราได้ว่า

$$\alpha = \theta(\rho^2 + \mu\delta^2) \quad \beta = \pm\mu^2\rho\delta \quad \gamma = \theta(\rho^2 - \mu\delta^2)$$

เมื่อ ρ เป็นจำนวนเต็มเกาส์คี่, δ เป็นจำนวนเต็มเกาส์ และ ρ, δ เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน

(9)

ในการกระทำแบบเดียวกัน ในกรณีที่ $\frac{\gamma-\alpha}{2}, \gamma+\alpha$ เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน จะได้ว่า

$$\alpha = -\theta(p^2 + \mu\delta^2) \quad \beta = \pm\mu^2p\delta \quad \gamma = \theta(p^2 - \mu\delta^2)$$

เมื่อ p เป็นจำนวนเต็มเกาส์ , δ เป็นจำนวนเต็มเกาส์ และ p, δ เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน

ดังนั้น เมื่อรวมทั้งสองกรณีเข้าด้วยกัน จะได้

$$\alpha = \pm\theta(p^2 + \mu\delta^2) \quad \beta = \pm\mu^2p\delta \quad \gamma = \theta(p^2 - \mu\delta^2)$$

จาก (α, β, γ) เป็นผลเฉลยปฐมฐานของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $Z[i] - \{0\}$

ซึ่งเมื่อเลือกเครื่องหมายแล้ว จะได้หลายผลเฉลย แต่อย่างไรก็ตาม ผลเฉลยทั้งหมดนี้ ถือว่าไม่แตกต่างกัน นั่นคือ ผลเฉลยทั้งหมดจะอยู่ในกลุ่มสมมูลเดียวกัน ซึ่งจะแทนได้ด้วย

$$[(p^2 + \mu\delta^2, \mu^2p\delta, p^2 - \mu\delta^2)]$$

ดังนั้น จากที่กล่าวมา สามารถสรุปเป็นทฤษฎีได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.6 ถ้า (α, β, γ) เป็นผลเฉลยปฐมฐานของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $Z[i] - \{0\}$

แล้ว จะมี p เป็นจำนวนเต็มเกาส์ , δ เป็นจำนวนเต็มเกาส์ และ p, δ เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน ที่

$$\alpha = p^2 + \mu\delta^2$$

$$\beta = \mu^2p\delta$$

$$\gamma = p^2 - \mu\delta^2$$

4 ผลเฉลยของสมการ $x^4 + \mu y^4 = z^2$ ใน $Z[i]$ เมื่อ μ เป็นจำนวนเฉพาะคู่

ต่อไปจะนำทฤษฎีบท 3.6 มาพิสูจน์ทฤษฎีหลักในงานวิจัยนี้

ทฤษฎีบท 4.1 สมการ $x^4 + \mu y^4 = z^2$ ไม่มีผลเฉลยใน $Z[i] - \{0\}$

พิสูจน์ สมมุติว่ามี (α, β, γ) เป็นผลเฉลยของ $x^4 + \mu y^4 = z^2$ ใน $Z[i] - \{0\}$

ให้ $S = \{ N(\beta) \mid (\alpha, \beta, \gamma) \text{ เป็นผลเฉลยของ } x^4 + \mu y^4 = z^2 \text{ ใน } Z[i] - \{0\} \}$

เนื่องจาก S เป็นเซตย่อยของเซตของจำนวนเต็มบวกที่ไม่เป็นเซตว่าง ดังนั้น S จะมีสมาชิกตัวที่น้อยที่สุด

(10)

ให้ $N(\beta)$ เป็นสมาชิกตัวที่น้อยที่สุดใน S ดังนั้นจะมี α, γ อยู่ใน $Z[i] - \{0\}$ ที่ (α, β, γ) เป็นผลเฉลยของ $x^4 + \mu y^4 = z^2$

(จะแสดงว่า (α, β, γ) เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน)

สมมติให้ $(\alpha, \beta, \gamma) = \lambda$ และ λ ไม่ใช่สมาชิกหนึ่งหน่วย ดังนั้นจะมีจำนวนเฉพาะ π ที่ $\pi | \lambda$ ดังนั้น $\pi | \alpha$, $\pi | \beta$ และ $\pi | \gamma$ จาก (α, β, γ) เป็นผลเฉลยของสมการ $x^4 + \mu y^4 = z^2$ จะได้ว่า

$$\alpha^4 + \mu \beta^4 = \gamma^2$$

หรือ

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 + \mu \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^4 = \left(\frac{\gamma}{\pi^2}\right)^2$$

จาก $\pi | \alpha$, $\pi | \beta$ จะได้ $\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 + \mu \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^4$ อยู่ใน $Z[i]$ เพราะฉะนั้น $\left(\frac{\gamma}{\pi^2}\right)^2$ อยู่ใน $Z[i]$ จากทฤษฎีบทประกอบ

2.1 จะได้ว่า $\frac{\gamma}{\pi^2}$ อยู่ใน $Z[i]$ นั่นคือ $\left(\frac{\alpha}{\pi}, \frac{\beta}{\pi}, \frac{\gamma}{\pi^2}\right)$ เป็นผลเฉลยของสมการ $x^4 + \mu y^4 = z^2$ ใน

$Z[i] - \{0\}$ นั่นคือ $N\left(\frac{\beta}{\pi}\right)$ อยู่ใน S จาก $N(\pi) > 1$ และ $N(\beta) = N(\pi \frac{\beta}{\pi}) = N(\pi)N\left(\frac{\beta}{\pi}\right)$ จะได้

$N(\beta) > N\left(\frac{\beta}{\pi}\right)$ ซึ่งขัดแย้ง กับ $N(\beta)$ เป็นสมาชิกตัวที่น้อยที่สุดใน S เพราะฉะนั้น (α, β, γ) เป็นจำนวน

เฉพาะต่อกัน

นั่นคือ $(\alpha^2, \beta^2, \gamma)$ เป็นผลเฉลยปฐมฐานของสมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ใน $Z[i] - \{0\}$ จากทฤษฎีบท 3.6

จะได้ว่า มี ρ เป็นจำนวนเต็มเกาส์ , δ เป็นจำนวนเต็มเกาส์ และ ρ, δ เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน ที่

$$\alpha^2 = \rho^2 + \mu \delta^2$$

$$\beta^2 = \mu^2 \rho \delta$$

$$\gamma = \rho^2 - \mu \delta^2$$

ดังนั้น $\frac{\beta^2}{\mu^2} = \rho \delta$ และ ρ, δ เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน จะได้ว่า มีจำนวนเต็มเกาส์ ρ_1, δ_1 และสมาชิกหนึ่ง

หน่วย ϵ_1, ϵ_2 ซึ่ง $\rho = \epsilon_1 \rho_1^2, \delta = \epsilon_2 \delta_1^2$ แทนค่าจะได้

$$\frac{\beta^2}{\mu^2} = \rho \delta = (\epsilon_1 \rho_1^2)(\epsilon_2 \delta_1^2) = \epsilon_1 \epsilon_2 \rho_1^2 \delta_1^2 \text{ หรือ } \left(\frac{\beta}{\mu \rho_1 \delta_1}\right)^2 = \epsilon_1 \epsilon_2$$

นั่นคือ $\epsilon_1 \epsilon_2$ เป็นสมาชิกหนึ่งหน่วยที่สามารถเขียนได้ในรูปกำลังสอง เพราะฉะนั้น $\epsilon_1 = \pm \epsilon_2$ และ $\epsilon_1^2 = \epsilon_2^2$

แทนค่า $\rho = \epsilon_1 \rho_1^2, \delta = \epsilon_2 \delta_1^2$ ลงในสมการ $\alpha^2 = \rho^2 + \mu \delta^2$ จะได้

$$\alpha^2 = (\epsilon_1 \rho_1^2)^2 + \mu (\epsilon_2 \delta_1^2)^2 = \epsilon_1^2 \rho_1^4 + \mu \epsilon_2^2 \delta_1^4 \text{ หรือ } \alpha^2 = \epsilon_1^2 (\rho_1^4 + \mu \delta_1^4)$$

(11)

กำหนดให้ $\alpha_1 = \frac{\alpha}{\varepsilon_1}$ เพราะฉะนั้น จะได้ $\alpha_1^2 = \rho_1^4 + \mu\delta_1^4$

นั่นคือ $(\rho_1, \delta_1, \alpha_1)$ เป็นผลเฉลยของ $x^4 + \mu y^4 = z^2$ ใน $Z[i] - \{0\}$ เพราะฉะนั้น $N(\delta_1)$ อยู่ใน S

จาก $\beta^2 = \mu^2 \rho \delta$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } N(\beta^2) &= N(\mu^2 \rho \delta) \\ &= N(\mu^2 \varepsilon_1 \rho_1^2 \varepsilon_2 \delta_1^2) \\ &= N(\mu)N(\mu)N(\varepsilon_1)N(\rho_1)N(\rho_1)N(\varepsilon_2)N(\delta_1)N(\delta_1) \\ &= 4(N(\rho_1))^2(N(\delta_1))^2\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $N(\beta) = 2N(\rho_1)N(\delta_1)$

ดังนั้นจะได้ $N(\beta) > N(\delta_1)$ ซึ่งขัดแย้งกับ $N(\beta)$ เป็นจำนวนที่น้อยที่สุดใน S

เพราะฉะนั้นจะสรุปได้ว่า สมการ $x^4 + \mu y^4 = z^2$ ไม่มีผลเฉลยใน $Z[i] - \{0\}$ $\square$

จากทฤษฎีบทนี้ จะทำให้สามารถแสดงได้โดยง่ายว่าสมการ $x^4 + \mu y^4 = z^4$ ไม่มีผลเฉลยใน $Z[i] - \{0\}$ ดังนี้

ทฤษฎีบท 4.2 สมการ $x^4 + \mu y^4 = z^4$ ไม่มีผลเฉลยใน $Z[i] - \{0\}$

พิสูจน์ สมมุติว่า (α, β, γ) เป็นผลเฉลยของสมการ $x^4 + \mu y^4 = z^4$ ใน $Z[i] - \{0\}$ จะได้ว่า $(\alpha, \beta, \gamma^2)$ เป็นผลเฉลยของสมการ $x^4 + \mu y^4 = z^2$ ใน $Z[i] - \{0\}$ ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบท 4.1 เพราะฉะนั้น สมการ $x^4 + \mu y^4 = z^4$ ไม่มีผลเฉลยใน $Z[i] - \{0\}$ $\square$

จากทฤษฎีบท 4.1 และทฤษฎีบท 4.2 จะสามารถนำไปพิจารณาผลเฉลยของสมการ ต่าง ๆ ต่อไปนี้ได้อีกเช่น

ทฤษฎีบท 4.3 สมการ $x^4 + \mu y^4 = 2z^2$ ไม่มีผลเฉลยใน $Z[i] - \{0\}$

พิสูจน์ สมมุติให้ (α, β, γ) เป็นผลเฉลยของสมการ $x^4 + \mu y^4 = 2z^2$ ใน $Z[i] - \{0\}$

เพราะฉะนั้น จะได้ $\alpha^4 + \mu\beta^4 = 2\gamma^2$

หรือ $(\alpha^4 + \mu\beta^4)^2 = (2\gamma^2)^2$

$$\alpha^8 + 2\mu\alpha^4\beta^4 + \mu^2\beta^8 = 4\gamma^4$$

$$\alpha^8 - 2\mu\alpha^4\beta^4 + \mu^2\beta^8 = 4\gamma^4 - 4\mu\alpha^4\beta^4$$

(12)

$$(\alpha^4 - \mu\beta^4)^2 = 4(\gamma^4 - \mu\alpha^4\beta^4)$$

$$\left(\frac{\alpha^4 - \mu\beta^4}{2}\right)^2 = \gamma^4 - \mu\alpha^4\beta^4$$

นั่นคือ $(\gamma, \alpha\beta, \frac{\alpha^4 - \mu\beta^4}{2})$ เป็นผลเฉลยของสมการ $x^4 + \mu y^4 = z^2$ ใน $Z[i]$ จากทฤษฎีบท 4.1

จะได้ว่า $\gamma = 0$ หรือ $\alpha\beta = 0$ หรือ $\frac{\alpha^4 - \mu\beta^4}{2} = 0$ แต่จาก (α, β, γ) เป็นผลเฉลยของสมการ

$x^4 + \mu y^4 = 2z^2$ ใน $Z[i] - \{0\}$ ดังนั้นจะได้ $\gamma \neq 0$ และ $\alpha\beta \neq 0$ เพราะฉะนั้น $\frac{\alpha^4 - \mu\beta^4}{2} = 0$

ซึ่งทำให้ $\alpha^4 - \mu\beta^4 = 0$ หรือ $\mu = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4$ ซึ่งขัดแย้งกับ μ เป็นจำนวนเฉพาะ

นั่นคือสรุปได้ว่า สมการ $x^4 + \mu y^4 = 2z^2$ ไม่มีผลเฉลยใน $Z[i] - \{0\}$ $\square$

จากทฤษฎีบทนี้ จะทำให้สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4.2

ทฤษฎีบท 4.4 สมการ $x^4 + \mu y^4 = 2z^4$ ไม่มีผลเฉลยใน $Z[i] - \{0\}$

ทฤษฎีบท 4.5 สมการ $\frac{1}{x^4} + \frac{\mu}{y^4} = \frac{1}{z^4}$ ไม่มีผลเฉลยใน $Z[i]$

พิสูจน์ สมมติให้ (α, β, γ) เป็นผลเฉลยของสมการ $\frac{1}{x^4} + \frac{\mu}{y^4} = \frac{1}{z^4}$ ใน $Z[i]$ เพราะฉะนั้น

จะได้ว่า $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$ และ $\frac{1}{\alpha^4} + \frac{\mu}{\beta^4} = \frac{1}{\gamma^4}$

หรือ $(\beta\gamma)^4 + \mu(\alpha\gamma)^4 = (\alpha\beta)^4$

นั่นคือ $(\beta\gamma, \alpha\gamma, \alpha\beta)$ เป็นผลเฉลยของสมการ $x^4 + \mu y^4 = z^4$ ใน $Z[i] - \{0\}$ ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบท

4.1 ดังนั้น สมการ $\frac{1}{x^4} + \frac{\mu}{y^4} = \frac{1}{z^4}$ ไม่มีผลเฉลยใน $Z[i] - \{0\}$ $\square$



5 บทสรุป

จากที่กล่าวมาแล้ว จะสามารถสรุปได้ว่า

สมการ $x^4 + \mu y^4 = z^2$ ไม่มีผลเฉลยใน $\mathbb{Z}[i] - \{0\}$

ซึ่งจากผลที่ได้นี้ยังส่งผลให้สามารถพิสูจน์ได้ว่า

สมการ $x^4 + \mu y^4 = z^4$ ไม่มีผลเฉลยใน $\mathbb{Z}[i] - \{0\}$

สมการ $x^4 + \mu y^4 = 2z^2$ ไม่มีผลเฉลยใน $\mathbb{Z}[i] - \{0\}$

สมการ $x^4 + \mu y^4 = 2z^4$ ไม่มีผลเฉลยใน $\mathbb{Z}[i] - \{0\}$

สมการ $\frac{1}{x^4} + \frac{\mu}{y^4} = \frac{1}{z^4}$ ไม่มีผลเฉลยใน $\mathbb{Z}[i]$

นอกจากนั้น ยังสามารถพิสูจน์สมการอื่น ๆ ได้โดยง่าย เช่น

สมการ $x^{4n} + \mu y^{4m} = z^{2k}$ เมื่อ n, m, k เป็นจำนวนเต็มบวก ไม่มีผลเฉลยใน $\mathbb{Z}[i] - \{0\}$

บรรณานุกรม

- [1] สมจิต โชติชัยสถิตย์ การแก้สมการ $x^2 + \mu y^2 = z^2$ ในจำนวนเต็มเกาส์ โดยที่ $\mu = 1+i, 1-i, -1+i, -1-i$ วารสารวิทยาศาสตร์ ม.ช. ปีที่ 24 ฉบับที่ 2 เมษายน - มิถุนายน 2539 หน้า 100 - 111
- [2] สมจิต โชติชัยสถิตย์ การแก้สมการ $x^4 - y^4 = z^2$ ในจำนวนเต็มเกาส์ วารสารวิทยาศาสตร์ ม.ช. ปีที่ 20-22 ฉบับพิเศษ กรกฎาคม-กันยายน 2537 หน้า 237 - 246
- [3] A.O.Gelfond, Solving Equations in Integres, English translation Mir Publishers, Moscow, 1981
- [4] Jams T. Cross, Primitive Pythagorean Triples of Gaussian Integers, Mathematics Magazine Vol. 59 , No. 2 , April 1986, p. 106-110
- [5] Fraleigh, John B. A First Course in Abstract Algebra . Third edition , Addison-Wesley, 1981. 478 p.