

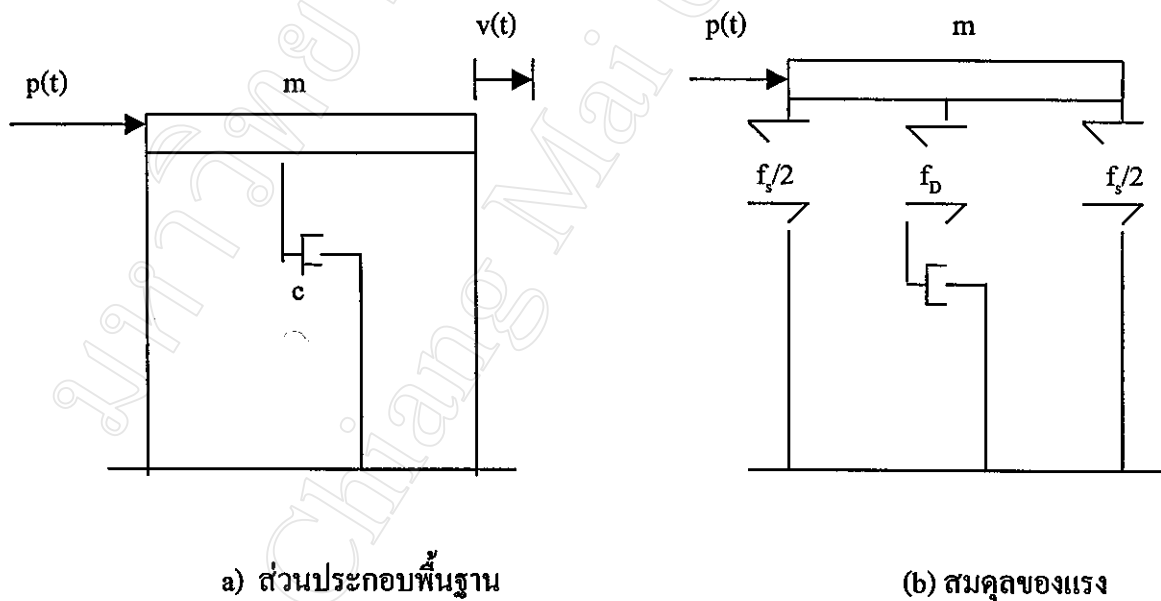
บทที่ 2

ทฤษฎีพื้นฐาน

2.1 ทฤษฎีพลศาสตร์ของโครงสร้าง (Theory of Structural Dynamics)

2.1.1 พลศาสตร์ของระบบหนึ่งตัวแปรอิสระ (Dynamic of The Single Degree of Freedom System)

ในการหาสมการการเคลื่อนที่ของโครงสร้าง จะอาศัยหลักการของความสมดุลของแรงกระทำ ดังแสดงในรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 ระบบหนึ่งตัวแปรอิสระ

จากรูปที่ 2.1 เมื่อมีแรง $P(t)$ มากระทำต่อมวลของโครงสร้าง ทำให้เกิดการเคลื่อนที่ที่เป็นระยะ $v(t)$ ซึ่งจะทำให้เกิดแรงต้าน 3 แรง คือ แรงยืดหยุ่น (Elastic Force, f_s) แรงหน่วง (Damping Force, f_D) และแรงเฉื่อย (Inertia Force, f_i) จาก d'Alembert's principle จะได้ว่า

$$f_i + f_D + f_s = p(t) \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

โดย $f_i = m \ddot{v}$ (2.2)

$f_D = c \dot{v}$ (2.3)

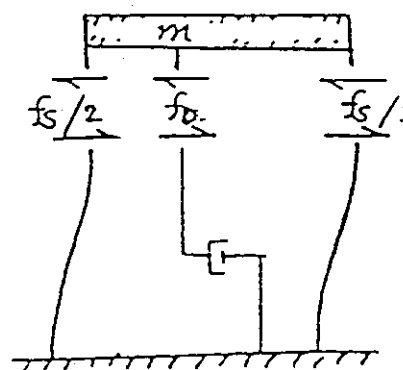
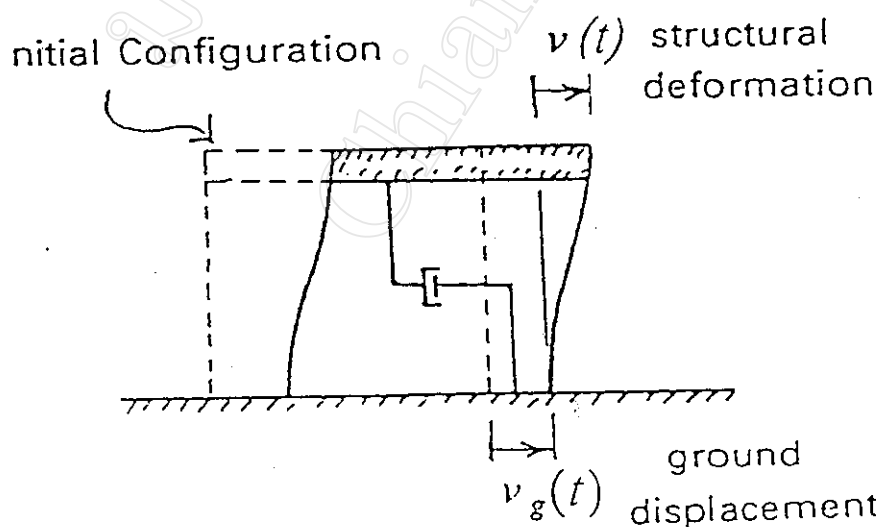
$f_s = k v$ (2.4)

เมื่อ	m คือ มวลของระบบ	หน่วย กิโลกรัม
	c คือ ค่าคงที่ของการหน่วง	หน่วย นิวตัน-วินาที/เมตร
	k คือ สติฟเนสของระบบ	หน่วย นิวตัน/เมตร
	v คือ ระยะของการเคลื่อนที่ของระบบ	หน่วย เมตร
	$\dot{v}$ คือ ความเร็วของระบบ	หน่วย เมตร/วินาที
	$\ddot{v}$ คือ ความเร่งของระบบ	หน่วย เมตร/วินาที ²

แทนสมการที่ (2.2) , (2.3) และ (2.4) ลงในสมการที่ (2.1) จะได้สมการการเคลื่อนที่ของระบบหนึ่งตัวแปรแบบอิสระ ที่มีแรงภายนอกที่มีขนาด $p(t)$ กระทำดังนี้

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = p(t) \quad \text{..... (2.5)}$$

สำหรับกรณีที่ดินบริเวณจุดรองรับของโครงสร้างเกิดการเคลื่อนที่เนื่องจากแผ่นดินไหวเป็นระยะ $v_g(t)$ ดังแสดงในรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 การเคลื่อนที่ของโครงสร้างเนื่องจากแผ่นดินไหว

จากรูปที่ 2.2 เมื่อพิจารณาสมดุลของแรง จะได้ว่า

$$f_i + f_D + f_s = 0 \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

การเคลื่อนที่รวมทั้งหมุดที่ตำแหน่งมวล = $v_g(t) + v(t)$ ซึ่งจะได้ว่า

$$f_i = m(\ddot{v}_g(t) + \ddot{v}(t)) \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

เมื่อ $\ddot{v}_g(t)$ คือ ความเร่งที่ผิวดินที่เวลา t ใด ๆ

แทนสมการที่ (2.7) ลงในสมการที่ (2.6) จะได้สมการการเคลื่อนที่ของระบบเนื่องจากแผ่นดินไหว ดังนี้

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = -m\ddot{v}_g(t) \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

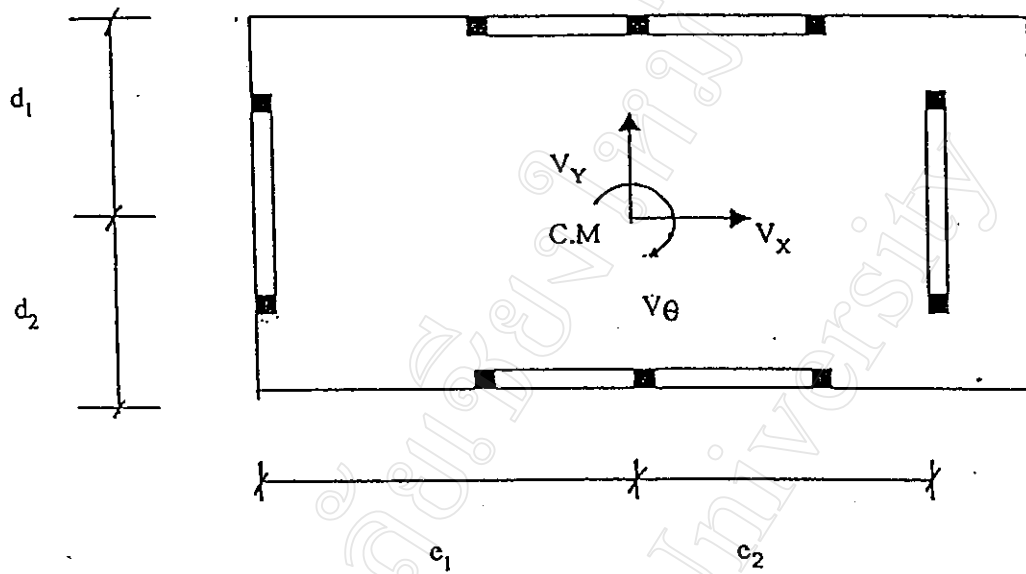
หรือ

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = P_{eff}(t) \quad \dots\dots\dots (2.9)$$

เมื่อ $P_{eff}(t)$ คือ แรงแผ่นดินไหวประสิทธิผล (Effective Earthquake Force) ซึ่งมีขนาดเท่ากับ $-m\ddot{v}_g(t)$

2.1.2 การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของอาคารในสามมิติ (Three - Dimensional Building Vibration Analysis)

การวิเคราะห์โครงสร้างอาคารในสามมิติสำหรับการวิจัยครั้งนี้ จะพิจารณาระบบโครงสร้างอาคารที่ประกอบไปด้วยโครงข้อแข็งที่ถูกยึดด้วยพื้นที่มีความแข็งแรงในระนาบ (Rigid Diaphragm) ทำให้ทุก ๆ จุดบนระนาบพื้นไม่มีการเสียรูปในระนาบ และในแต่ละชั้นของอาคาร สามารถเคลื่อนที่ได้สามทิศทาง คือ ทิศทางในแนวแกน x แกน y และการหมุนรอบตัวอาคาร นั่นคือในแต่ละชั้นของอาคารจะมี 3 ตัวแปรอิสระ ซึ่งการเคลื่อนที่ทั้งสามทิศทางจะคิดที่จุดศูนย์กลางมวล (Center of Mass, C.M.) สำหรับอาคารที่มีความสมมาตรในแปลน การเคลื่อนที่ทั้งสามทิศทางจะเป็นอิสระต่อกัน แต่อาคารที่มีความไม่สมมาตรในแปลนแล้ว การเคลื่อนที่แบบหมุนรอบตัวอาคารจะมีความสัมพันธ์กับการเคลื่อนที่ในแนวแกน x หรือแกน y หรือทั้งสองแกนขึ้นอยู่กับว่าโครงสร้างของอาคารไม่สมมาตรในทิศทางใด ทิศทางหนึ่งหรือทั้งสองทิศทาง แต่ทั้งนี้การเคลื่อนที่ในแนวแกน x และแนวแกน y จะเป็นอิสระต่อกัน สำหรับลักษณะแปลนทั่วไปของอาคารใด ๆ ที่มีความสูง N ชั้น แสดงในรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 ลักษณะแปลนของอาคารความสูง N ชั้น

จากสมการการเคลื่อนที่แบบไม่มีการหน่วงสำหรับอาคารความสูง N ชั้นใดๆ จะได้ว่า

$$[M] \{\ddot{v}\} + [K] \{v\} = P(t) \quad \text{..... (2.10)}$$

เมื่อ

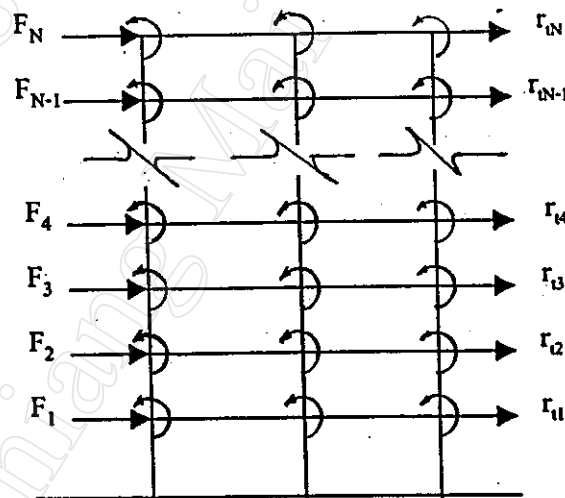
$$[M] = \begin{bmatrix} [m_1] & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & [m_2] & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & [m_i] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [m_N] \end{bmatrix} \quad \text{.....(2.11)}$$

โดยที่ $[m_i]$ คือ มวลของอาคารในชั้นที่ i ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$[m_i] = \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & J_i \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.12)$$

เมื่อ J_i คือ อินเนอร์เซียการหมุนรอบจุดศูนย์กลางมวล หน่วย กิโลกรัม - (เมตร)²

สำหรับการหาค่าสติฟเนสด้านข้างในแต่ละทิศทางของอาคารที่มีความสูง N ชั้น สามารถกระทำได้โดยการแยกพิจารณาหาค่าสติฟเนสด้านข้างของ โครงข้อแข็งแต่ละตัวที่ประกอบเป็น โครงสร้างอาคารในทิศทางที่พิจารณา ซึ่งพิจารณาได้จากรูปที่ 2.4 ดังนี้



รูปที่ 2.4 ลักษณะการเคลื่อนที่ของโครงสร้างอาคาร N ชั้น

จากรูปที่ 2.4 แสดงลักษณะการเคลื่อนที่ของโครงข้อแข็งความสูง N ชั้น ที่มีตัวแปริอิสระของการเคลื่อนที่หลายตัวแปริอิสระ แต่จากสมมติฐานที่ว่าในแต่ละชั้นของโครงข้อแข็งถูกยึดด้วยพื้นอาคารที่มีความแข็งแรงในระนาบ ทำให้การเคลื่อนที่ทางด้านข้างจะมีแค่ N ตัวแปริอิสระ จึงสามารถบีบ (Condense) ตัวแปริอิสระของการเคลื่อนที่ทั้งหมดให้เหลือ N ตัวแปร ซึ่งจากสมมูลของแรงในรูปที่ 2.4 จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} [K_{LL}] & [K_{Lo}] \\ [K_{oL}] & [K_{oo}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{r_L\} \\ \{r_o\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_L\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (2.13)$$

โดย

$[K_{LL}]$ คือ สติฟเนสของการเคลื่อนที่ทางด้านข้าง

$[K_{Lo}]$ คือ สติฟเนสของการเคลื่อนที่ทางด้านข้างเนื่องจากการหมุนของข้อต่อ

$[K_{oL}]$ คือ สติฟเนสของการหมุนเนื่องจากการเคลื่อนที่ทางด้านข้าง

$[K_{oo}]$ คือ สติฟเนสของการหมุนเนื่องจากการหมุนของข้อต่อ

$\{r_L\}$ คือ การเคลื่อนที่ทางด้านข้าง

$\{r_o\}$ คือ การหมุนของข้อต่อ

$\{F_L\}$ คือ แรงกระทำทางด้านข้าง

จากสมการ (2.13) จะได้ว่า

$$[K_{LL}]\{r_L\} + [K_{oL}]\{r_o\} = \{F_L\} \quad \dots\dots\dots(2.14)$$

$$[K_{oL}]\{r_L\} + [K_{oo}]\{r_o\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots(2.15)$$

จากสมการที่ (2.15) จะได้ว่า

$$\{r_o\} = -[K_{oo}]^{-1}[K_{oL}]\{r_L\} \quad \dots\dots\dots(2.16)$$

แทนสมการที่ (2.16) ลงในสมการที่ (2.14) จะได้

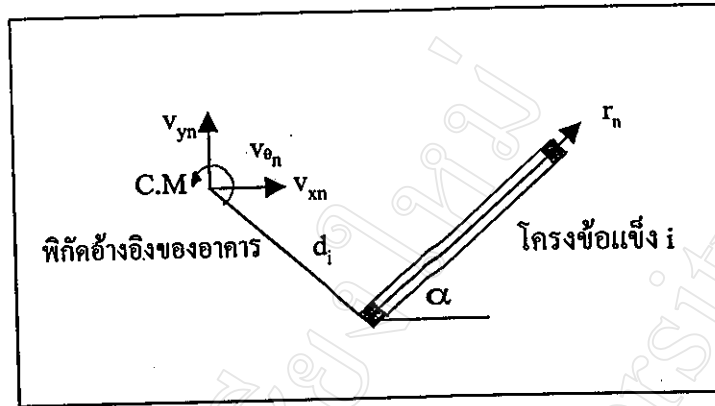
$$([K_{LL}] - [K_{oL}][K_{oo}]^{-1}[K_{oL}])\{r_L\} = \{F_L\} \quad \dots\dots\dots(2.17)$$

$$\text{ให้} \quad [K_{LL}^*] = ([K_{LL}] - [K_{oL}][K_{oo}]^{-1}[K_{oL}]) \quad \dots\dots\dots(2.18)$$

$$\text{จะได้ว่า} \quad [K_{LL}^*]\{r_L\} = \{F_L\} \quad \dots\dots\dots(2.19)$$

โดยที่ $[K_{LL}^*]$ คือ สติฟเนสทางด้านข้างของโครงข้อแข็งที่พิจารณา

สำหรับสติฟเนสทางด้านข้างของอาคารสามารถหาได้จากผลรวมของค่าสติฟเนสทางด้านข้างของโครงข้อแข็งทั้งหมดในทิศทางที่พิจารณา ดังนี้



รูปที่ 2.5 ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดอ้างอิงของโครงข้อแข็ง i ใดๆ กับพิกัดอ้างอิงของอาคาร
พิจารณาจากรูปที่ 2.5 จะได้ความสัมพันธ์ของระหว่างพิกัดอ้างอิงของโครงข้อแข็ง i กับพิกัดอ้างอิงของอาคารในชั้นที่ n ของอาคารดังนี้

$$\{r_n\}_i = \{ \cos\alpha_i \quad \sin\alpha_i \quad d \} \begin{Bmatrix} v_{xn} \\ v_{yn} \\ v_{\theta_n} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(2.20)$$

ให้ $\{a\}_i = \{ \cos\alpha_i \quad \sin\alpha_i \quad d \}$ \dots\dots\dots(2.21)

และ $\{v_n\}_i = \begin{Bmatrix} v_{xn} \\ v_{yn} \\ v_{\theta_n} \end{Bmatrix}$ \dots\dots\dots(2.22)

สมการ (2.20) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\{r_n\}_i = \{a\}_i \{v_n\}_i \quad \dots\dots\dots(2.23)$$

สำหรับอาคารจำนวน N ชั้นจะได้

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ \dots \\ r_N \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \{a\}_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \{a\}_2 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \{a\}_N \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \{v_1\} \\ \{v_2\} \\ \dots \\ \dots \\ \{v_N\} \end{Bmatrix}_i \quad \dots\dots\dots(2.24)$$

จากสมการ (2.24) เขียนในรูปอย่างง่ายได้เป็น

$$\{r\}_i = [a]_i \{v\}_i \quad \dots\dots\dots(2.25)$$

แทนสมการ (2.25) ลงในสมการ (2.19) จะได้

$$[K_{LL}]_i [a]_i \{v\}_i = \{F_L\}_i \quad \dots\dots\dots(2.26)$$

คูณทั้งสองข้างของสมการ (2.26) ด้วย $[a]_i^T$ จะได้

$$[a]_i^T [K_{LL}]_i [a]_i \{v\}_i = [a]_i^T \{F_L\}_i \quad \dots\dots\dots(2.27)$$

$$\text{ให้} \quad [K_{\pi}]_i = [a]_i^T [K_{LL}]_i [a]_i \quad \dots\dots\dots(2.28)$$

$$\text{และ} \quad \{P\}_i = [a]_i^T \{F_L\}_i \quad \dots\dots\dots(2.29)$$

$$\text{จะได้} \quad [K_{\pi}]_i \{v_{\pi}\}_i = \{P\}_i \quad \dots\dots\dots(2.30)$$

โดย $[K_{\pi}]_i$ คือ เมทริกซ์สติฟเนสด้านข้างของโครงข้อแข็ง i ในทิศทางอ้างอิงของอาคาร

ดังนั้น สติฟเนสด้านข้างของอาคารจะมีค่าเท่ากับ

$$[K_{\pi}] = \sum_{i=1}^m [k_{\pi}]_i \quad \dots\dots\dots(2.31)$$

เมื่อ m คือ จำนวนโครงข้อแข็งในทิศทางที่พิจารณา

สำหรับค่าสตีเฟนสของการบิดของอาคารหาได้จากการพิจารณารูปที่ 2.3 ซึ่งจะได้ว่า

$$[K_{00}] = \sum_{i=1}^n [K_{xx}]_i \cdot d_i^2 + \sum_{i=1}^r [K_{yy}]_i \cdot e_i^2 \quad \dots\dots\dots (2.32)$$

- เมื่อ $[K_{xx}]_i$ คือ ค่าสตีเฟนสทางด้านข้างของโครงข้อแข็ง i ในทิศทาง x
 $[K_{yy}]_i$ คือ ค่าสตีเฟนสทางด้านข้างของโครงข้อแข็ง i ในทิศทาง y
 $[K_{00}]$ คือ ผลรวมค่าสตีเฟนสของโครงสร้างในทิศการบิดเนื่องจากการหมุนของอาคาร
 d_i คือ ระยะทางในแนวแกน y จากโครงข้อแข็งที่ i ถึงจุดศูนย์กลางมวล
 e_i คือ ระยะทางในแนวแกน x จากโครงข้อแข็งที่ i ถึงจุดศูนย์กลางมวล
 n คือ จำนวนโครงข้อแข็งในทิศทางแกน x
 r คือ จำนวนโครงข้อแข็งในทิศทางแกน y

2.1.3 การสั่นสะเทือนแบบอิสระ (Free Vibration)

การสั่นสะเทือนแบบอิสระ เป็นการสั่นสะเทือนของระบบที่ถูกทำให้เคลื่อนที่ออกจากตำแหน่งสมดุล เกิดการเคลื่อนที่โดยไม่มีแรงภายนอกกระทำขณะเคลื่อนที่ ระบบจะสั่นด้วยคุณสมบัติตามธรรมชาติของระบบเอง โดยค่าการขจัดและความเร็วเริ่มต้นขณะที่วัตถุเริ่มเคลื่อนที่จะเป็นตัวกำหนดการขจัดของการเคลื่อนที่ระยะเวลาใด ๆ

2.1.3.1 การสั่นสะเทือนแบบอิสระของโครงสร้างอาคารหลายชั้น (Free Vibration of Multistory Building)

การศึกษาคุณสมบัติธรรมชาติของโครงสร้างอันได้แก่ ความถี่ธรรมชาติ โหมดรูปร่างของโครงสร้างอาคารจำนวน N ชั้น สามารถกระทำได้ โดยพิจารณาให้โครงสร้างเป็นระบบไม่มีการหน่วง (Undamped System) ทั้งนี้เนื่องจากโครงสร้างอาคารทั่วไปมีค่าอัตราส่วนความหน่วงน้อย ทำให้การวิเคราะห์หาค่าคุณสมบัติธรรมชาติของโครงสร้างดังกล่าว ไม่แตกต่างไปจากค่าที่วิเคราะห์เมื่อคิดผลของการหน่วง จากเหตุผลดังกล่าวจะทำให้ได้สมการการเคลื่อนที่แบบอิสระของโครงสร้างอาคารหลายชั้น โดยอาศัยสมการที่ (2.10) ดังนี้

$$[M] \{\ddot{v}\} + [K] \{v\} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.33)$$

ในการวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติกระทำได้โดยสมมุติคำตอบของสมการที่ (2.33) ดังนี้

$$\{v\} = \{\phi\} \sin \omega t \quad \text{..... (2.34)}$$

เมื่อ $\{\phi\}$ เป็นรูปร่างของการสั่นสะเทือน (Vibration Shape) ของโครงสร้าง ดังนั้น

$$\{\ddot{v}\} = -\omega^2 \{\phi\} \sin \omega t \quad \text{..... (2.35)}$$

แทนสมการที่ (2.34) และ (2.35) ลงในสมการที่ (2.33) จะได้

$$(-\omega^2 [M] + [K]) \{\phi\} \sin \omega t = 0 \quad \text{..... (2.36)}$$

สมการที่ (2.36) เรียกว่า Eigenvalue Problems ซึ่งมีคำตอบที่ไม่เป็นศูนย์ ก็ต่อเมื่อ

$$\det (-\omega^2 [M] + [K]) = 0 \quad \text{..... (2.37)}$$

สมการที่ (2.37) เป็น Characteristic Equation ซึ่งถ้ากระจายดีเทอร์มิแนนต์จะทำให้ได้สมการพหุนามในเทอมของ ω^2 ยกกำลัง N ซึ่งสมการนี้จะให้รากจำนวน N ราก ที่เป็นจำนวนจริงและเป็นบวก

รากของสมการที่ (2.37) จะให้ค่าความถี่ธรรมชาติเชิงมุม จำนวน N ค่า ซึ่งเรียกว่า Eigenvalue ดังนี้

$$\omega = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \dots \\ \omega_N \end{Bmatrix} \quad \text{..... (2.38)}$$

จากค่าความถี่ธรรมชาติเชิงมุมในสมการที่ (2.38) สามารถแก้ปัญหในสมการที่ (2.36) เพื่อหาโหมดรูปร่าง โหมดใด ๆ ของโครงสร้างได้ สำหรับโหมดรูปร่างโหมดที่ i ใด ๆ หาได้โดยการแทนค่าความถี่ธรรมชาติเชิงมุมในโหมดที่ i ลงในสมการที่ (2.36) ซึ่งจะได้ว่า

$$(-\omega_i^2 [M] + [K]) \{\phi_i\} = 0 \quad \text{..... (2.39)}$$

โดยที่

$$\{\phi_i\} = \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \phi_{3i} \\ \dots \\ \phi_{Ni} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (2.40)$$

จากสมการที่ (2.40) ถ้าทำการนอร์มอลไลซ์เทียบกับสมาชิกตัวแรกโดยการกำหนดให้สมาชิกตัวแรกคือ ϕ_{1i} มีค่าเท่ากับ 1 ก็จะสามารถแก้สมการที่ (2.39) ได้ โดยใช้วิธี Gauss Elimination เพื่อหาค่าของ $\phi_{2i}, \phi_{3i}, \dots, \phi_{Ni}$ ดังนั้นโหมดรูปร่างของโหมด i ใด ๆ คือ

$$\{\phi_i\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \phi_{2i} \\ \phi_{3i} \\ \dots \\ \phi_{Ni} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (2.41)$$

2.1.4 เงื่อนไข Orthogonality

Betti's Law กล่าวว่า งานเนื่องจากแรงของระบบที่ 1 ที่กระทำต่อการเคลื่อนที่ของระบบที่ 2 จะเท่ากับงานเนื่องจากแรงของระบบที่ 2 ที่กระทำต่อการเคลื่อนที่ของระบบที่ 1 ดังนั้นงานของโหมดที่ n เนื่องจากแรงเฉื่อยของโหมดที่ m (f_{im}) จะเท่ากับงานของโหมดที่ m เนื่องจากแรงเฉื่อยของโหมดที่ n (f_{in}) นั่นคือ

$$- \{f_{in}\}^T \{\phi_m\} = - \{f_{im}\}^T \{\phi_n\} \dots\dots\dots (2.42)$$

จากสมการที่ (2.2) และ (2.34) จะได้ว่า

$$\{f_{in}\}^T = \{\omega_n^2 [m] \{\phi_n\}\}^T \sin \omega_n t \dots\dots\dots (2.43)$$

และ

$$\{f_{1m}\}^T = \{\omega_m^2[m] \{\phi_m\}\}^T \sin \omega_m t \quad \dots\dots\dots(2.44)$$

เมื่อแทนสมการที่ (2.43) และ (2.44) ลงในสมการที่ (2.42) จะได้ว่า

$$\{\omega_n^2[m] \{\phi_n\}\}^T \{\phi_m\} = \{\omega_m^2[m] \{\phi_m\}\}^T \{\phi_n\} \quad \dots\dots\dots(2.45)$$

หรือ

$$\omega_n^2 \{\phi_n\}^T [m]^T \{\phi_m\} = \omega_m^2 \{\phi_m\}^T [m]^T \{\phi_n\} \quad \dots\dots\dots(2.46)$$

เนื่องจาก $\{\phi_n\}^T [m]^T \{\phi_m\}$ เป็นปริมาณสเกลาร์ ดังนั้น

$$\{\phi_n\}^T [m]^T \{\phi_m\} = (\{\phi_n\}^T [m]^T \{\phi_m\})^T \quad \dots\dots\dots(2.47)$$

หรือ

$$\{\phi_n\}^T [m]^T \{\phi_m\} = \{\phi_m\}^T [m] \{\phi_n\} \quad \dots\dots\dots(2.48)$$

แทนสมการที่ (2.48) ลงในสมการที่ (2.46) และอาศัยคุณสมบัติสมมาตรของ $[m]$

คือ $[m]^T = [m]$ จะได้ว่า

$$(\omega_m^2 - \omega_n^2) \{\phi_m\}^T [m] \{\phi_n\} = 0 \quad \dots\dots\dots(2.49)$$

$$\text{นั่นคือ} \quad \{\phi_m\}^T [m] \{\phi_n\} = 0 \quad \text{เมื่อ } m \neq n \quad \dots\dots\dots(2.50)$$

$$\text{ทำนองเดียวกัน} \quad \{\phi_m\}^T [k] \{\phi_n\} = 0 \quad \text{เมื่อ } m \neq n \quad \dots\dots\dots(2.51)$$

$$\text{สำหรับ } m = n ; \quad \{\phi_n\}^T [m] \{\phi_n\} = M_n \quad \dots\dots\dots(2.52)$$

$$\text{ทำนองเดียวกัน} \quad \{\phi_n\}^T [k] \{\phi_n\} = K_n \quad \dots\dots\dots(2.53)$$

โดยที่ M_n คือ มวลที่เจเนอรัลไลซ์ของโหมดที่ n

K_n คือ สติฟเนสที่เจเนอรัลไลซ์ของโหมดที่ n

สำหรับโปรแกรมคอมพิวเตอร์นั้น จะทำการ نرمอลไลเซชัน โหมด (Normalization of Modes) โดยจะทำให้ $M_n = 1$ ดังนี้

จากสมการที่ (2.52) ถ้าให้ $\{\bar{\phi}_n\}$ เป็น Normalized Eigenvector โดย

$$\{\bar{\phi}_n\} = (1/\sqrt{M_n})\{\phi_n\} \quad \text{..... (2.54)}$$

จะได้ว่า

$$\{\bar{\phi}_n\}^T [m] \{\bar{\phi}_n\} = 1 \quad \text{..... (2.55)}$$

2.1.5 การวิเคราะห์หาแรงต้านข้างในแต่ละชั้นของโครงสร้าง

ในกรณีเกิดแผ่นดินไหว อาคารจะเกิดสั่นสะเทือน ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการการเคลื่อนที่ของอาคารได้ ดังนี้

$$[M] \{\ddot{v}\} + [C] \{\dot{v}\} + [K] \{v\} = -[M] \{1\} \ddot{v}_g \quad \text{..... (2.56)}$$

กำหนดการเคลื่อนที่ให้อยู่ในรูปของสมการโหมดรูปร่างและแอมพลิจูด ดังนี้

$$\{v\} = [\phi] \{y\} \quad \text{..... (2.57)}$$

เมื่อ $\{y\}$ เป็นเมตริกซ์แอมพลิจูดในแต่ละโหมดรูปร่าง

แทนสมการที่ (2.57) ในสมการที่ (2.56) และไม่คิดเครื่องหมายลบของแรงแผ่นดินไหวจะได้

$$[M] [\phi] \{\ddot{y}\} + [C] [\phi] \{\dot{y}\} + [K] [\phi] \{y\} = [M] \{1\} \ddot{v}_g \quad \text{..... (2.58)}$$

คูณสมการที่ (2.58) ด้วย $[\phi]^T$ จะได้

$$[\phi]^T [M] [\phi] \{\ddot{y}\} + [\phi]^T [C] [\phi] \{\dot{y}\} + [\phi]^T [K] [\phi] \{y\} = [\phi]^T [M] \{1\} \ddot{v}_g \quad \text{..... (2.59)}$$

จากเงื่อนไข Orthogonality จะได้ว่า

$$[M] \{\ddot{y}\} + [C] \{\dot{y}\} + [K] \{y\} = [\zeta] \ddot{v}_g \quad \text{..... (2.60)}$$

โดย

$$\begin{aligned} [M] & \text{ เป็น เมทริกซ์ของมวลที่เจเนอรัลไลซ์ มีสมาชิกเป็น } \{\phi\}^T [M] \{\phi\} \\ [C] & \text{ เป็น เมทริกซ์ของความหน่วงที่เจเนอรัลไลซ์มีสมาชิกเป็น } \{\phi\}^T [C] \{\phi\} \\ [K] & \text{ เป็น เมทริกซ์ของสติฟเนสที่เจเนอรัลไลซ์ มีสมาชิกเป็น } \{\phi\}^T [K] \{\phi\} \\ [\zeta] & \text{ เป็น เมทริกซ์เฉียง มีสมาชิกเป็น } \{\phi\}^T [M] \{1\} \end{aligned}$$

สำหรับการสั่นสะเทือนในโหมดที่ n จะได้สมการการเคลื่อนที่เป็น

$$M_n \cdot \ddot{y}_n + C_n \cdot \dot{y}_n + K_n \cdot y_n = \zeta_n \cdot \ddot{v}_g \quad \text{..... (2.61)}$$

แก้สมการที่ (2.61) ด้วยวิธี Duhamel Integral จะได้

$$y_n = \zeta_n \cdot V_n(t) / (M_n \cdot \omega_n) \quad \text{..... (2.62)}$$

เมื่อ

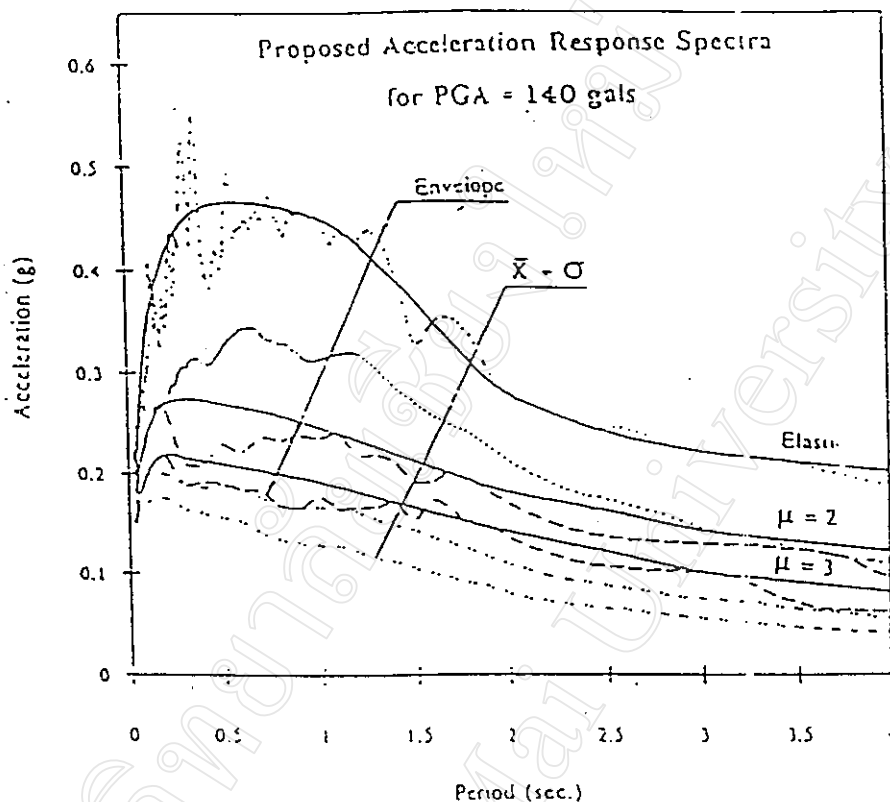
$$V_n(t) = \int_0^t v_g(\tau) \exp(-\xi \omega_n(t-\tau)) \sin \omega_n(t-\tau) d\tau \quad \text{..... (2.63)}$$

ค่า $V_n(t)$ มีค่าสูงสุดเท่ากับสเปกตรัมการตอบสนองของอัตราเร็ว $S_v(\xi, T)$

$$\text{และ } S_v(\xi, T) = \omega S_d(\xi, T) = S_d(\xi, T) / \omega \quad \text{..... (2.64)}$$

โดย $S_d(\xi, T)$ คือ สเปกตรัมการตอบสนองของการเคลื่อนที่
 $S_a(\xi, T)$ คือ สเปกตรัมการตอบสนองของอัตราเร่ง

สำหรับประเทศไทย นพค. (2539) ได้ทำการวิจัยและเสนอสเปกตรัมการตอบสนองในช่วงอินfrasติกสำหรับออกแบบอาคารต้านแรงแผ่นดินไหว โดยใช้แบบจำลองที่มีอัตราเร่งที่พื้นดินเท่ากับ 140 ซม./วินาที)² ผลที่ได้แสดงในรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 สเปกตรัมการตอบสนองของอัตราเร่ง สำหรับประเทศไทย นพค. อุทกาสณะดีกุล (2539)

จากสมการที่ (2.57), (2.62) และ (2.64) จะได้การเคลื่อนที่ของโครงสร้างในโหมดที่ n ดังนี้

$$\{v_n(t)\} = \{\phi_n\}(\zeta_n) \cdot S_{an} / (M_n \omega_n^2) \quad \dots\dots\dots (2.65)$$

สำหรับแรงกระทำที่ขึ้นต่าง ๆ ($\{f_s\}$) ของโครงสร้าง หาได้จาก

$$\{f_s\} = [K] \{v(t)\} = [K] \{\phi_n\}(\zeta_n) \cdot S_{an} / (M_n \omega_n^2) \quad \dots\dots\dots (2.66)$$

จากสมการที่ (2.39) จะได้ว่า

$$[K] \{\phi_n\} = [M] \{\phi\} \omega_n^2 \quad \dots\dots\dots (2.67)$$

แทนค่าสมการที่ (2.67) ลงในสมการที่ (2.66) จะได้

$$\{f_s\} = [M] \{\phi\}(\zeta_n) \cdot S_{an} / M_n \quad \dots\dots\dots (2.68)$$

สำหรับแรงเฉือนที่ฐานหาได้จากผลรวมของแรงดัดข้างที่ได้จากสมการที่ (2.68) ดังนี้

$$V = \sum_{i=1}^N (f_i) \quad \dots\dots\dots (2.69)$$

เมื่อ N คือ จำนวนชั้นของโครงสร้างอาคาร
 V คือ แรงเฉือนที่ฐานที่โหนดใด ๆ

สำหรับการหาแรงดัดข้างสูงสุดในแต่ละชั้นสามารถรวมแรงแต่ละ โหนดโดยอาศัยวิธีการซ้อนทับ (Mode superposition) แต่เนื่องจากค่าแรงสูงสุดในแต่ละ โหนดเกิดขึ้นในเวลาต่างกัน จึงไม่สามารถนำผลของแรงในแต่ละโหนดมารวมโดยตรงได้ การรวมแรงดังกล่าวจึงอาศัยวิธี Square – Root – of – Sum – of – Squares (SRSS) ซึ่งมีวิธีการดังนี้

พิจารณาการกระจายแรงดัดข้างสูงสุดในแต่ละชั้นของอาคาร จะได้ผลรวมแรง n โหนด ในชั้นที่ i ดังนี้

$$(f_i)_{\max} = \sqrt{(f_i)_1^2 + (f_i)_2^2 + (f_i)_3^2 + \dots + (f_i)_m^2 + \dots + (f_i)_n^2} \quad \dots\dots\dots (2.70)$$

เมื่อ $(f_i)_{\max}$ คือ ผลรวมแรงดัดข้างสูงสุดในจำนวน n โหนดในชั้นที่ i
 $(f_i)_m$ คือ แรงดัดข้างสูงสุดที่ชั้น i ในโหนดที่ m

สำหรับแรงเฉือนที่ฐานสูงสุดหาได้จากนำค่าแรงเฉือนที่ฐานที่ได้จากสมการ 2.69 ในแต่ละ โหนด มารวมกันโดยวิธี SRSS ดังนี้

$$(V)_{\max} = \sqrt{(V)_1^2 + (V)_2^2 + (V)_3^2 + \dots + (V)_m^2 + \dots + (V)_n^2} \quad \dots\dots\dots (2.71)$$

เมื่อ $(V)_{\max}$ คือ ผลรวมแรงเฉือนที่ฐานจำนวน n โหนด
 $(V)_m$ คือ แรงเฉือนที่ฐานของโหนดที่ m