

บทที่ 3

ผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้มุ่งเน้นที่จะแสดงผลกระทบของการมีความโค้งเริ่มแรกที่มีต่อการเปลี่ยนแปลงแรงเฉือนและโมเมนต์คดภายในคาน-เสา ดังนั้นบทนี้จะนำผลที่ได้จากบทที่ 2 ซึ่งอยู่ในรูปสมการระยะแอมมาแปลงเป็นสมการแรงเฉือนและโมเมนต์คด แล้วแสดงผลออกมาในรูปกราฟ โดยตัวแปรต่างๆ ที่ใช้ในบทนี้ได้แสดงไว้ในบทที่ 2 แล้ว

ตัวแปรสำคัญที่จะใช้ในการพิจารณาอยู่ 3 ตัวคือ ความโค้งเริ่มแรก, แรงอัดในแนวแกน และโมดูลัสของฐานรากยึดหย่อน ดังนั้นในการแสดงผลจะกำหนดให้ตัวแปรดังกล่าวมีการเปลี่ยนแปลงค่า กล่าวคือ

ก. ความโค้งเริ่มแรก ผลกระทบของการมีความโค้งเริ่มแรก ที่มีต่อแรงเฉือนและโมเมนต์คดนั้นจะอยู่ในรูปฟังก์ชันตรีโกณมิติ $\cos \frac{n\pi x}{l}$ และ $\sin \frac{n\pi x}{l}$ ตามลำดับ และเนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิตินี้มีรูปร่างที่เป็นมาตรฐานอยู่แล้ว ดังนั้นความโค้งเริ่มแรกจะมีผลเปลี่ยนแปลงแรงเฉือนและโมเมนต์คดภายในคาน-เสามากน้อยเพียงใดจึงขึ้นอยู่กับตัวคงที่ที่คูณกับฟังก์ชันตรีโกณมิติดังกล่าว ซึ่งในการแสดงผลจะนำเฉพาะค่าคงที่มาเขียนกราฟ

ข. แรงอัดในแนวแกน จะพิจารณาเปลี่ยนค่าแรงอัดในแนวแกนตั้งแต่เป็นศูนย์แล้วเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ จนเข้าใกล้แรงโก่งคดของคาน-เสา

ค. โมดูลัสของฐานรากยึดหย่อน จะพิจารณาผลกระทบของฐานรากยึดหย่อนเมื่อฐานรากอ่อน ปานกลาง และแข็ง โดยใช้ตัวแทนเป็นค่า $\frac{kl^4}{EI} = 1, 50, 100$ และ 200 ตามลำดับ ซึ่งผลที่ได้ แยกเป็นหัวข้อดังนี้

3.1 แรงโก่งเคาะของคาน-เสารองรับโดยฐานรากยึดหยุ่น

การแสดงผลในบทนี้มีขอบเขตอยู่ที่แรงโก่งเคาะของคาน-เสา ดังนั้นจึงต้องมีการหาแรงโก่งเคาะของคาน-เสาไว้ก่อน ซึ่งแรงโก่งเคาะของคาน-เสารองรับโดยฐานรากยึดหยุ่นสามารถหาได้โดยใช้สมการ (1.1) นั่นคือ

$$P = P_e \left(m^2 + \frac{kl^4}{m^2 \pi^4 EI} \right)$$

ซึ่งค่า $\frac{kl^4}{EI}$ ที่ทำให้ค่า m เริ่มเปลี่ยนจาก 1 ไปเป็น 2, 2 ไปเป็น 3, 3 ไปเป็น 4, ... สามารถหาได้โดยใช้ความสัมพันธ์

$$m^2 + \frac{kl^4}{m^2 \pi^4 EI} = (m+1)^2 + \frac{kl^4}{(m+1)^2 \pi^4 EI} \quad \dots\dots\dots(3.1)$$

เมื่อต้องการหาค่า $\frac{kl^4}{EI}$ ที่ทำให้ค่า m เริ่มเปลี่ยนจาก 1 ไปเป็น 2 แทนค่าได้เป็น

$$1^2 + \frac{kl^4}{1^2 \pi^4 EI} = 2^2 + \frac{kl^4}{2^2 \pi^4 EI} \quad \dots\dots\dots(3.2)$$

ผลที่ได้คือ

$$\frac{kl^4}{EI} = 389.636 > 200 \quad \dots\dots\dots(3.3)$$

นั่นคือ คาน-เสาในงานวิจัยนี้จะเกิดการโก่งเคาะเป็นรูป $m = 1$ เท่านั้น ทำให้ได้สมการสำหรับคำนวณแรงโก่งเคาะคือ

$$P = P_e \left(1 + \frac{kl^4}{\pi^4 EI} \right) \quad \dots\dots\dots(3.4)$$

เมื่อนำค่า $\frac{kl^4}{EI}$ ตามที่นำมาพิจารณาในงานวิจัยนี้ แทนในสมการ (3.4) ทำให้ได้ค่าแรงโก่งเคาะของคาน-เสารองรับโดยฐานรากยึดหยุ่น ดังนี้

$$\text{เมื่อ } \frac{kl^4}{EI} = 1 \text{ แรงโก่งเคาะ คือ } P_{cr} = 1.010P_e \quad \dots\dots\dots(3.5)$$

$$\text{เมื่อ } \frac{kl^4}{EI} = 50 \text{ แรงโก่งเคาะ คือ } P_{cr} = 1.513P_e \quad \dots\dots\dots(3.6)$$

$$\text{เมื่อ } \frac{kl^4}{EI} = 100 \text{ แรงโก่งเคาะ คือ } P_{\alpha} = 2.027 P_e \quad \dots\dots\dots(3.7)$$

$$\text{เมื่อ } \frac{kl^4}{EI} = 200 \text{ แรงโก่งเคาะ คือ } P_{\alpha} = 3.053 P_e \quad \dots\dots\dots(3.8)$$

3.2 แรงเฉือนและโมเมนต์คัตของคาน-เสารองรับโดยฐานรากยึดหยุ่น

หัวข้อนี้จะแสดงลักษณะแรงเฉือนและโมเมนต์คัตของคาน-เสารองรับโดยฐานรากยึดหยุ่นรับน้ำหนักบรรทุกทุกทั้ง 3 กรณีดังแสดงในบทที่ 2 ในรูปกราฟ โดยคิดว่าคาน-เสามีความเที่ยงตรงอย่างในอุดมคติ นั่นคือตัดเทอมที่เกิดจากการมีความโค้งเริ่มแรก

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \text{ ออก ซึ่งขั้นแรกต้องสร้างสมการแรงเฉือนและสมการ}$$

โมเมนต์คัตก่อน แล้วจึงนำสมการที่ได้ไปเขียนกราฟ ซึ่งผลที่ได้แยกตามกรณีดังนี้

3.2.1 แรงเฉือนของคาน-เสารองรับโดยฐานรากยึดหยุ่น

ในหัวข้อนี้จะแยกแสดงกราฟและสมการแรงเฉือนของคาน-เสาออกเป็น 3 กรณี ตามลักษณะน้ำหนักบรรทุกทุก ดังนี้

3.2.1.1 แรงเฉือนของคาน-เสารองรับโดยฐานรากยึดหยุ่นรับน้ำหนักบรรทุกทุกกระจายสม่ำเสมอ

สมการแรงเฉือนสำหรับกรณีนี้ สามารถหาได้โดยการนำสมการระยะแอนดั่งแสดงในหัวข้อ 2.4.1.3 ไปแทนในสมการ (2.8) ซึ่งผลที่ได้มีดังนี้

$$\text{ก. เมื่อ } p^4 - 16\beta^4 < 0$$

สมการแรงเฉือนสำหรับกรณีนี้คือ

$$\begin{aligned} V_{ideal} = & \frac{q(m_1^2 + m_2^2)}{8m_1m_2\beta^4(\cosh m_1l + \cos m_2l)} \left\{ m_1(m_1^2 + m_2^2 + p^2) \left[\sin m_2(l-x) \cosh m_1x \right. \right. \\ & - \sin m_2x \cosh m_1(l-x) \left. \right] + m_2(m_1^2 + m_2^2 - p^2) \left[\cos m_2x \sinh m_1(l-x) \right. \\ & \left. \left. - \cos m_2(l-x) \sinh m_1x \right] \right\} \quad \dots\dots\dots(3.9) \end{aligned}$$

ข. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 = 0$

สมการแรงเฉือนสำหรับกรณีนี้คือ

$$V_{ideal} = \frac{p^3 q}{64\beta^4 \cos^2 \frac{pl}{2\sqrt{2}}} \left\{ px \cos \frac{p(l-x)}{\sqrt{2}} - p(l-x) \cos \frac{px}{\sqrt{2}} \right. \\ \left. + 3\sqrt{2} \left[\sin \frac{p(l-x)}{\sqrt{2}} - \sin \frac{px}{\sqrt{2}} \right] \right\} \dots\dots\dots(3.10)$$

ค. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 > 0$

สมการแรงเฉือนสำหรับกรณีนี้คือ

$$V_{ideal} = \frac{m_3 m_4 q}{4(m_3^2 - m_4^2)\beta^4 \sin m_3 l \sin m_4 l} \left\{ (p^2 - m_3^2) m_4 \sin m_4 l \left[\cos m_3(l-x) - \cos m_3 x \right] \right. \\ \left. - (p^2 - m_4^2) m_3 \sin m_3 l \left[\cos m_4(l-x) - \cos m_4 x \right] \right\} \dots\dots\dots(3.11)$$

โดยที่

V_{ideal} คือ แรงเฉือนภายในคาน-เสาองรับโดยฐานรากยึดหุ่นซึ่งไม่รวมส่วนที่เกิดจากการมีความโค้งเริ่มแรก

3.2.1.2 แรงเฉือนของคาน-เสารองรับโดยฐานรากยึดหุ่นรับน้ำหนักบรรทุกทุกเป็นจุด

สมการแรงเฉือนสำหรับกรณีนี้ สามารถหาได้โดยการนำสมการระยะแอนดังแสดงใน
หัวข้อ 2.4.2.3 ไปแทนในสมการ (2.8) ซึ่งผลที่ได้มีดังนี้

ก. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 < 0$

สมการแรงเฉือนสำหรับกรณีนี้ได้แก่

$$V_{ideal} = \frac{Q}{4m_1m_2(\cos 2m_2l - \cosh 2m_1l)} \left\{ 2m_1m_2 \left[\cos m_2(d-2l-x) \cosh m_1(d-x) \right. \right. \\ \left. \left. - \cos m_2(d-x) \cosh m_1(d-2l-x) + \cos m_2(d-2l+x) \cosh m_1(d+x) \right. \right. \\ \left. \left. - \cos m_2(d+x) \cosh m_1(d-2l+x) \right] \right. \\ \left. + (m_1^2 - m_2^2 + p^2) \left[\sin m_2(d-2l-x) \sinh m_1(d-x) - \sin m_2(d-x) \sinh m_1(d-2l-x) \right. \right. \\ \left. \left. + \sin m_2(d-2l+x) \sinh m_1(d+x) - \sin m_2(d+x) \sinh m_1(d-2l+x) \right] \right\} \\ \text{สำหรับช่วง } 0 \leq x \leq d \quad \dots\dots\dots(3.12)$$

$$V_{ideal} = \frac{Q}{4m_1m_2(\cos 2m_2l - \cosh 2m_1l)} \left\{ 2m_1m_2 \left[\cos m_2(d-x) \cosh m_1(d+2l-x) \right. \right. \\ \left. \left. - \cos m_2(d+2l-x) \cosh m_1(d-x) + \cos m_2(d-2l+x) \cosh m_1(d+x) \right. \right. \\ \left. \left. - \cos m_2(d+x) \cosh m_1(d-2l+x) \right] \right. \\ \left. + (m_1^2 - m_2^2 + p^2) \left[\sin m_2(d-x) \sinh m_1(d+2l-x) - \sin m_2(d+2l-x) \sinh m_1(d-x) \right. \right. \\ \left. \left. + \sin m_2(d-2l+x) \sinh m_1(d+x) - \sin m_2(d+x) \sinh m_1(d-2l+x) \right] \right\} \\ \text{สำหรับช่วง } d \leq x \leq l \quad \dots\dots\dots(3.13)$$

ข. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 = 0$

สมการแรงเฉือนสำหรับกรณีนี้ได้แก่

$$V_{ideal} = \frac{Q}{8 \sin^2 \frac{pl}{\sqrt{2}}} \left[2 \cos \frac{p(d-x)}{\sqrt{2}} - 2 \cos \frac{p(d-2l-x)}{\sqrt{2}} \right. \\ + 2 \cos \frac{p(d+x)}{\sqrt{2}} - 2 \cos \frac{p(d-2l+x)}{\sqrt{2}} - \frac{p(2l+x)}{\sqrt{2}} \sin \frac{p(d-x)}{\sqrt{2}} \\ \left. + \frac{p(x-d)}{\sqrt{2}} \sin \frac{p(d-2l-x)}{\sqrt{2}} + \frac{p(d-2l+x)}{\sqrt{2}} \sin \frac{p(d+x)}{\sqrt{2}} - \frac{p(d+x)}{\sqrt{2}} \sin \frac{p(d-2l+x)}{\sqrt{2}} \right] \\ \text{สำหรับช่วง } 0 \leq x \leq d \quad \dots\dots\dots(3.14)$$

$$V_{ideal} = \frac{Q}{8 \sin^2 \frac{pl}{\sqrt{2}}} \left[-2 \cos \frac{p(d-x)}{\sqrt{2}} + 2 \cos \frac{p(d+2l-x)}{\sqrt{2}} \right. \\ + 2 \cos \frac{p(d+x)}{\sqrt{2}} - 2 \cos \frac{p(d-2l+x)}{\sqrt{2}} + \frac{p(x-2l-d)}{\sqrt{2}} \sin \frac{p(d-x)}{\sqrt{2}} \\ \left. - \frac{p(x-d)}{\sqrt{2}} \sin \frac{p(d+2l-x)}{\sqrt{2}} + \frac{p(d-2l+x)}{\sqrt{2}} \sin \frac{p(d+x)}{\sqrt{2}} - \frac{p(d+x)}{\sqrt{2}} \sin \frac{p(d-2l+x)}{\sqrt{2}} \right] \\ \text{สำหรับช่วง } d \leq x \leq l \quad \dots\dots\dots(3.15)$$

ค. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 > 0$

สมการแรงเฉือนสำหรับกรณีนี้ได้แก่

$$V_{ideal} = - \frac{Q}{(m_3^2 - m_4^2) \sin m_3 l \sin m_4 l} \left[m_4^2 \sin m_4 l \sin m_3 c \cos m_3 x \right. \\ \left. - m_3^2 \sin m_3 l \sin m_4 c \cos m_4 x \right] \\ \text{สำหรับช่วง } 0 \leq x \leq d \quad \dots\dots\dots(3.16)$$

$$V_{ideal} = - \frac{Q}{(m_3^2 - m_4^2) \sin m_3 l \sin m_4 l} \left[m_3^2 \sin m_3 l \sin m_4 d \cos m_4 (l-x) \right. \\ \left. - m_4^2 \sin m_4 l \sin m_3 d \cos m_3 (l-x) \right] \\ \text{สำหรับช่วง } d \leq x \leq l \quad \dots\dots\dots(3.17)$$

3.2.1.3 แรงเฉือนของคาน-เสารองรับโดยฐานรากยึดหยุ่นรับโมเมนต์คัต ณ ที่รองรับทั้ง 2 ด้าน

สมการแรงเฉือนสำหรับกรณีนี้ สามารถหาได้โดยการนำสมการระยะแอนดิงแสดงในหัวข้อ 2.4.3.3 ไปแทนในสมการ (2.8) ซึ่งผลที่ได้มีดังนี้

ก. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 < 0$

สมการแรงเฉือนสำหรับกรณีนี้คือ

$$V_{ideal} = \frac{1}{2m_1m_2(\cosh^2 m_1 l - \cos^2 m_2 l)} \left\{ M_a \left[m_1(m_1^2 - 3m_2^2 + p^2) \left(\cos m_2 l \sin m_2(l-x) \cosh m_1 x + \cosh m_1 l \sin m_2 x \cosh m_1(l-x) \right) - m_2(3m_1^2 - m_2^2 + p^2) \left(\cosh m_1 l \cos m_2 x \sinh m_1(l-x) + \cos m_2 l \cos m_2(l-x) \sinh m_1 x \right) \right] - M_b \left[m_1(m_1^2 - 3m_2^2 + p^2) \left(\sin m_2 l \cosh m_1 l \cos m_2 x \cosh m_1 x - \cos m_2 l \sinh m_1 l \sin m_2 x \sinh m_1 x \right) - m_2(3m_1^2 - m_2^2 + p^2) \left(\sin m_2 l \cosh m_1 l \sin m_2 x \sinh m_1 x + \cos m_2 l \sinh m_1 l \cos m_2 x \cosh m_1 x \right) \right] \right\} \dots\dots\dots(3.18)$$

ข. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 = 0$

สมการแรงเฉือนสำหรับกรณีนี้คือ

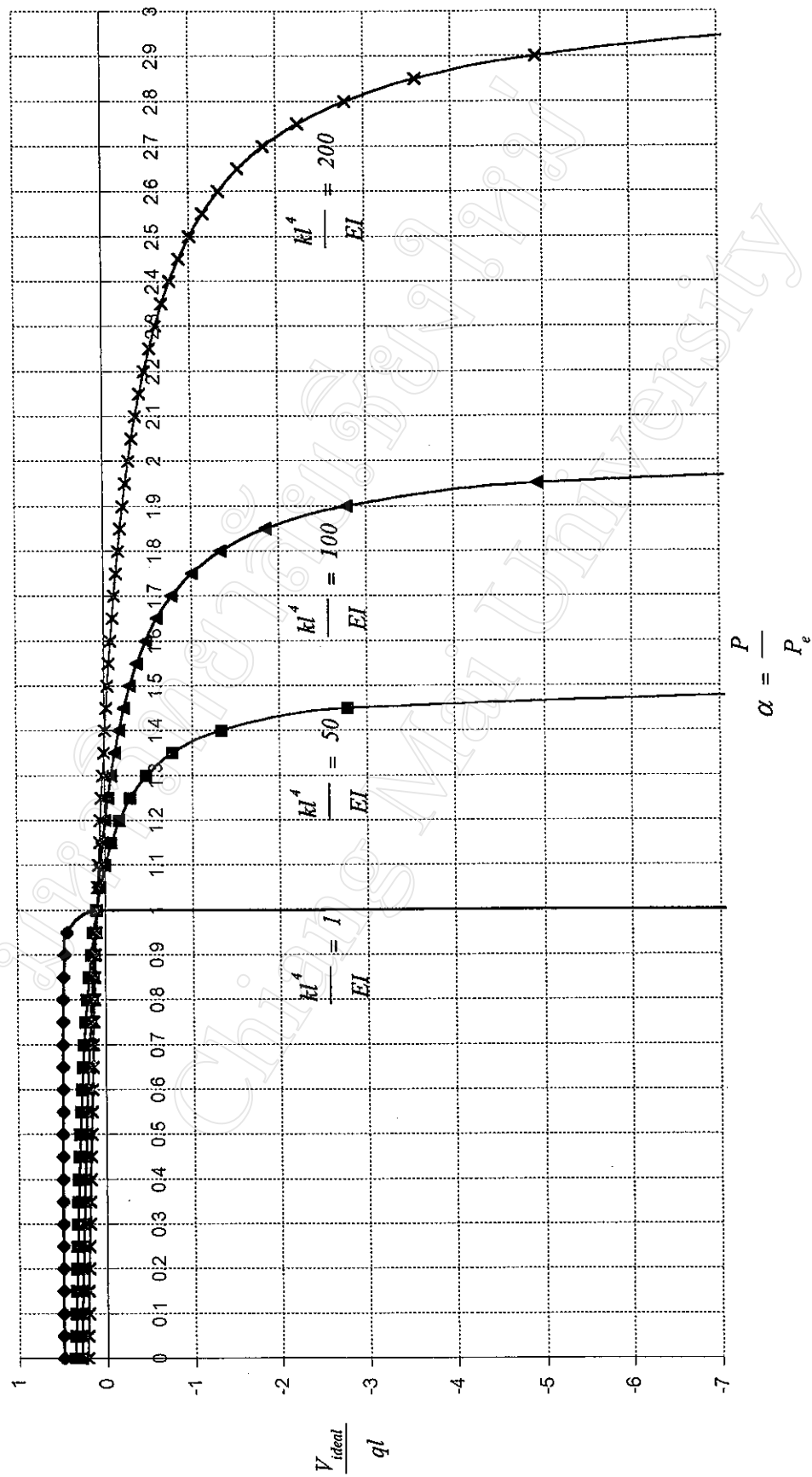
$$V_{ideal} = \frac{1}{\sqrt{2}p} \left\{ M_a \left[\cos \frac{px}{\sqrt{2}} \left(-\frac{p^2}{2} \cot \frac{pl}{\sqrt{2}} + \frac{p^3}{2\sqrt{2}} \left(x - \frac{l}{\sin^2 \frac{pl}{\sqrt{2}}} \right) \right) - \sin \frac{px}{\sqrt{2}} \left(\frac{p^2}{2} + \frac{p^3 x}{2\sqrt{2}} \cot \frac{pl}{\sqrt{2}} \right) \right] + \frac{M_b}{\sin \frac{pl}{\sqrt{2}}} \left[\cos \frac{px}{\sqrt{2}} \left(\frac{p^2}{2} + \frac{p^3 l}{2\sqrt{2}} \cot \frac{pl}{\sqrt{2}} \right) + \frac{p^3 x}{2\sqrt{2}} \sin \frac{px}{\sqrt{2}} \right] \right\} \dots\dots\dots(3.19)$$

ค. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 > 0$

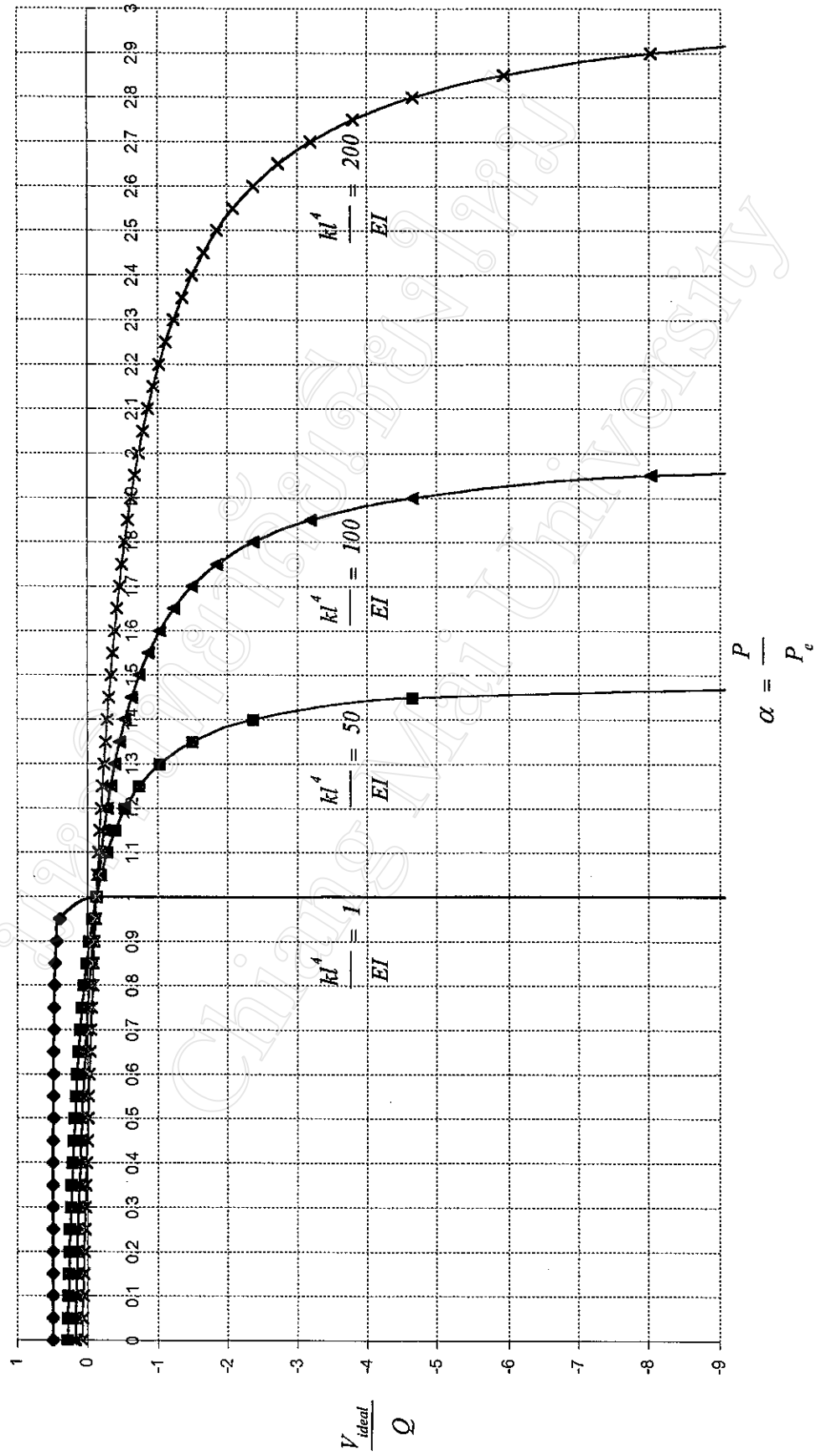
สมการแรงเฉือนสำหรับกรณีนี้คือ

$$V_{ideal} = \frac{-m_3 m_4}{(m_3^2 - m_4^2) \sin m_3 l \sin m_4 l} \left\{ M_a \left[m_3 \sin m_3 l \cos m_4 (l-x) - m_4 \sin m_4 l \cos m_3 (l-x) \right] - M_b \left[m_3 \sin m_3 l \cos m_4 x - m_4 \sin m_4 l \cos m_3 x \right] \right\} \quad (3.20)$$

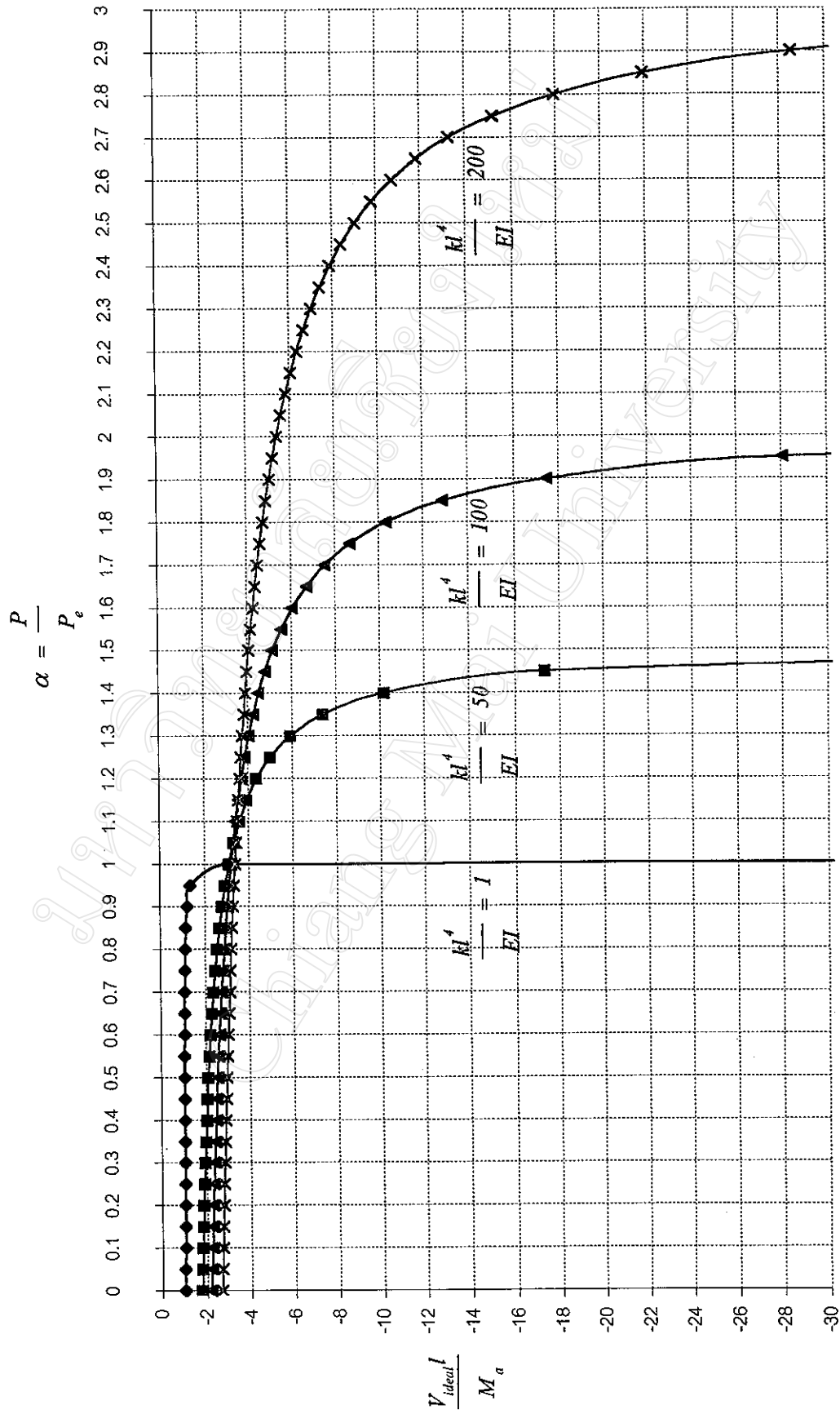
นำสมการ (3.9) ถึงสมการ (3.20) ไปเขียนกราฟแรงเฉือนที่ปลายด้านซ้ายของคาน-เสาได้ ดังแสดงในรูปที่ 3.1 (1) ถึงรูปที่ 3.1 (3) โดยกรณีคาน-เสารับน้ำหนักบรรทุกทุกเป็นจุดกำหนดให้ $d = 0.5l$ กรณีคาน-เสารับโมเมนต์คัตกำหนดให้มีโมเมนต์คัต M_d กระทำที่ปลายด้านซ้ายเพียง ด้านเดียว ซึ่งกราฟทั้ง 3 รูปแสดงให้เห็นว่าเมื่อแรงอัดในแนวแกนมีค่าเพิ่มจากศูนย์ขึ้นไปเรื่อยๆ แรงเฉือนจะมีค่าลดลง จนกระทั่งแรงอัดในแนวแกนเข้าใกล้แรงโก่งเดาะ แรงเฉือนจะลดลงอย่างมากจนหาค่าไม่ได้ โดยแรงเฉือนมีค่าเป็นศูนย์ในขณะที่แรงอัดในแนวแกนมีค่าประมาณ $1.1P_e$, $1.2P_e$ และ $1.4P_e$ สำหรับกรณีคาน-เสารับน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ และมีค่าเป็นศูนย์ ในขณะที่แรงอัดในแนวแกนมีค่าประมาณ $0.85P_e$, $0.75P_e$ และ $0.45P_e$ สำหรับกรณีคาน-เสา รับน้ำหนักบรรทุกเป็นจุด เมื่อ $\frac{kl^4}{EI}$ มีค่าเท่ากับ 50, 100 และ 200 ตามลำดับ



รูปที่ 3.1 (1) แรงเฉือนที่ปลายด้านซ้ายของคาน-เสาองรับ โดยฐานรากยึดหยุ่นรับน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ



รูปที่ 3.1 (2) แรงเฉือนที่ปลายด้านซ้ายของคาน-เสารองรับโดยฐานรากที่ยึดหยุ่นรับน้ำหนักบรรทุกทุกเป็นจุด ($d = 0.5l$)



รูปที่ 3.1 (3) แรงเฉือนที่ปลายด้านซ้ายของคาน-เสารองรับโดยฐานรากยึดหยุ่นรับโมเมนต์ตัด M_a ที่ปลายด้านซ้าย

3.2.2 โมเมนต์คัตของคาน-เสารองรับโดยฐานรากยึดหยุ่น

ในหัวข้อนี้จะแยกแสดงกราฟและสมการโมเมนต์คัตของคาน-เสาออกเป็น 3 กรณีตามลักษณะน้ำหนักบรรทุก ดังนี้

3.2.2.1 โมเมนต์คัตคาน-เสารองรับโดยฐานรากยึดหยุ่นรับน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ

สมการโมเมนต์คัตสำหรับกรณีนี้ สามารถหาได้โดยการนำสมการระยะแ่งนดังแสดงในหัวข้อ 2.4.1.3 ไปแทนในสมการ (2.3) ซึ่งผลที่ได้มีดังนี้

ก. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 < 0$

สมการโมเมนต์คัตสำหรับกรณีนี้คือ

$$M_{ideal} = \frac{q(m_1^2 + m_2^2)^2}{8m_1m_2\beta^4(\cosh m_1l + \cos m_2l)} \left[\sin m_2x \sinh m_1(l-x) + \sin m_2(l-x) \sinh m_1x \right] \quad \dots\dots\dots(3.21)$$

ข. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 = 0$

สมการโมเมนต์คัตสำหรับกรณีนี้คือ

$$M_{ideal} = \frac{p^3 q}{32\sqrt{2}\beta^4 \cos^2 \frac{pl}{2\sqrt{2}}} \left[x \sin \frac{p(l-x)}{\sqrt{2}} + (l-x) \sin \frac{px}{\sqrt{2}} \right] \quad \dots\dots\dots(3.22)$$

ค. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 > 0$

สมการโมเมนต์คัตสำหรับกรณีนี้คือ

$$M_{ideal} = \frac{-(m_3m_4)^2 q}{4(m_3^2 - m_4^2)\beta^4 \sin m_3l \sin m_4l} \left\{ \sin m_3l \left[\sin m_4x + \sin m_4(l-x) \right] - \sin m_4l \left[\sin m_3x + \sin m_3(l-x) \right] \right\} \quad \dots\dots\dots(3.23)$$

โดยที่

M_{ideal} คือ โมเมนต์คัตภายในคาน-เสาองรับโดยฐานรากยึดหยุ่นซึ่งไม่รวม ส่วนที่เกิดจากการมีความโค้งเริ่มแรก

3.2.2.2 โมเมนต์คัตของคาน-เสาองรับโดยฐานรากยึดหยุ่นรับน้ำหนักบรรทุกทุกเป็นจุด

สมการโมเมนต์คัตสำหรับกรณีนี้ สามารถหาได้โดยการนำสมการระยะแอนดังแสดง ในหัวข้อ 2.4.2.3 ไปแทนในสมการ (2.3) ซึ่งผลที่ได้มีดังนี้

ก. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 < 0$

สมการโมเมนต์คัตสำหรับกรณีนี้ได้แก่

$$M_{ideal} = \frac{Q}{4m_1m_2(\cos 2m_2l - \cosh 2m_1l)} \left\{ m_1 \left[\sin m_2(d-x) \cosh m_1(d-2l-x) - \sin m_2(d-2l-x) \cosh m_1(d-x) - \sin m_2(d+x) \cosh m_1(d-2l+x) + \sin m_2(d-2l+x) \cosh m_1(d+x) \right] - m_2 \left[\cos m_2(d-2l-x) \sinh m_1(d-x) - \cos m_2(d-x) \sinh m_1(d-2l-x) - \cos m_2(d-2l+x) \sinh m_1(d+x) + \cos m_2(d+x) \sinh m_1(d-2l+x) \right] \right\}$$

.....(3.24)

สำหรับช่วง $0 \leq x \leq d$

$$M_{ideal} = -\frac{Q}{4m_1m_2(\cos 2m_2l - \cosh 2m_1l)} \left\{ m_1 \left[\sin m_2(d-x) \cosh m_1(d+2l-x) - \sin m_2(d+2l-x) \cosh m_1(d-x) + \sin m_2(d+x) \cosh m_1(d-2l+x) - \sin m_2(d-2l+x) \cosh m_1(d+x) \right] - m_2 \left[\cos m_2(d+2l-x) \sinh m_1(d-x) - \cos m_2(d-x) \sinh m_1(d+2l-x) + \cos m_2(d-2l+x) \sinh m_1(d+x) - \cos m_2(d+x) \sinh m_1(d-2l+x) \right] \right\}$$

.....(3.25)

สำหรับช่วง $d \leq x \leq l$

ข. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 = 0$

สมการโมเมนต์ตัดสำหรับกรณีนี้ได้แก่

$$M_{ideal} = \frac{Q}{8p \sin^2 \frac{pl}{\sqrt{2}}} \left\{ p \left[(2l+x-d) \cos \frac{p(d-x)}{\sqrt{2}} \right. \right. \\ \left. \left. + (d-x) \cos \frac{p(d-2l-x)}{\sqrt{2}} + (d-2l+x) \cos \frac{p(d+x)}{\sqrt{2}} - (d+x) \cos \frac{p(d-2l+x)}{\sqrt{2}} \right] \right. \\ \left. - \sqrt{2} \sin \frac{p(d-x)}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \sin \frac{p(d-2l-x)}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \sin \frac{p(d+x)}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \sin \frac{p(d-2l+x)}{\sqrt{2}} \right\} \\ \text{สำหรับช่วง } 0 \leq x \leq d \quad \dots\dots\dots(3.26)$$

$$M_{ideal} = \frac{Q}{8p \sin^2 \frac{pl}{\sqrt{2}}} \left\{ p \left[(d+2l-x) \cos \frac{p(d-x)}{\sqrt{2}} \right. \right. \\ \left. \left. + (x-d) \cos \frac{p(d+2l-x)}{\sqrt{2}} + (d-2l+x) \cos \frac{p(d+x)}{\sqrt{2}} - (d+x) \cos \frac{p(d-2l+x)}{\sqrt{2}} \right] \right. \\ \left. + \sqrt{2} \sin \frac{p(d-x)}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \sin \frac{p(d+2l-x)}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \sin \frac{p(d+x)}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \sin \frac{p(d-2l+x)}{\sqrt{2}} \right\} \\ \text{สำหรับช่วง } d \leq x \leq l \quad \dots\dots\dots(3.27)$$

ค. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 > 0$

สมการโมเมนต์ตัดสำหรับกรณีนี้ได้แก่

$$M_{ideal} = \frac{Q}{(m_3^2 - m_4^2) \sin m_3 l \sin m_4 l} \left[m_3 \sin m_4 l \sin m_3 c \sin m_3 x \right. \\ \left. - m_4 \sin m_3 l \sin m_4 c \sin m_4 x \right] \\ \text{สำหรับช่วง } 0 \leq x \leq d \quad \dots\dots\dots(3.28)$$

$$M_{ideal} = \frac{Q}{(m_3^2 - m_4^2) \sin m_3 l \sin m_4 l} \left[m_3 \sin m_4 l \sin m_3 d \sin m_3 (l-x) - m_4 \sin m_3 l \sin m_4 d \sin m_4 (l-x) \right]$$

.....(3.29)

สำหรับช่วง $d \leq x \leq l$

3.2.2.3 โมเมนต์คัตของคาน-เสารองรับโดยฐานรากยึดหุ่นรับโมเมนต์คัต ณ ที่รองรับทั้ง 2 ด้าน

สมการโมเมนต์คัตสำหรับกรณีนี้ สามารถหาได้โดยการนำสมการระยะแอนดังแสดงในหัวข้อ 2.4.3.3 ไปแทนในสมการ (2.3) ซึ่งผลที่ได้มีดังนี้

ก. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 < 0$

สมการโมเมนต์คัตสำหรับกรณีนี้คือ

$$M_{ideal} = \frac{1}{2m_1 m_2 (\cosh^2 m_1 l - \cos^2 m_2 l)} \left\{ M_a \left[(m_1^2 - m_2^2) \left(\cos m_2 l \sin m_2 (l-x) \sinh m_1 x - \cosh m_1 l \sin m_2 x \sinh m_1 (l-x) \right) - 2m_1 m_2 \left(\cos m_2 l \cos m_2 (l-x) \cosh m_1 x - \cosh m_1 l \cos m_2 x \cosh m_1 x \right) \right] + M_b \left[(m_1^2 - m_2^2) \left(\cos m_2 l \sinh m_1 l \sin m_2 x \cosh m_1 x - \sin m_2 l \cosh m_1 l \cos m_2 x \sinh m_1 x \right) + 2m_1 m_2 \left(\sin m_2 l \cosh m_1 l \sin m_2 x \cosh m_1 x + \cos m_2 l \sinh m_1 l \cos m_2 x \sinh m_1 x \right) \right] \right\}$$

.....(3.30)

ข. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 = 0$

สมการโมเมนต์คัตสำหรับกรณีนี้คือ

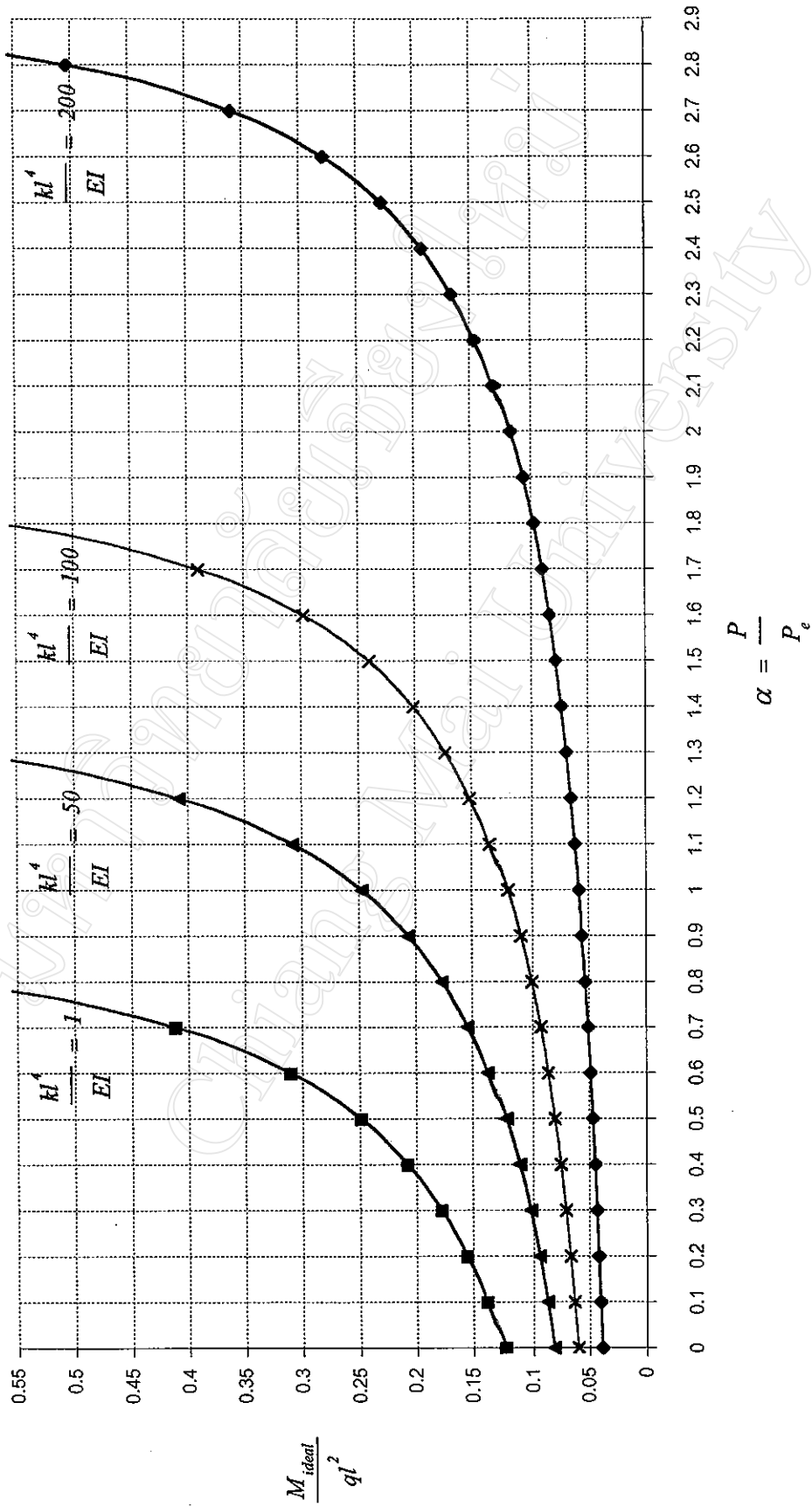
$$M_{ideal} = -\frac{1}{2} \left\{ M_a \left[\left(\frac{px}{\sqrt{2}} \cot \frac{pl}{\sqrt{2}} - 2 \right) \cos \frac{px}{\sqrt{2}} + \left(\frac{px}{\sqrt{2}} + 2 \cot \frac{pl}{\sqrt{2}} - \frac{pl}{\sqrt{2} \sin^2 \frac{pl}{\sqrt{2}}} \right) \sin \frac{px}{\sqrt{2}} \right] - \frac{Mb}{\sin \frac{pl}{\sqrt{2}}} \left[\frac{px}{\sqrt{2}} \cos \frac{px}{\sqrt{2}} + \left(2 - \frac{pl}{\sqrt{2}} \cot \frac{pl}{\sqrt{2}} \right) \sin \frac{px}{\sqrt{2}} \right] \right\} \quad \dots\dots\dots(3.31)$$

ก. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 > 0$

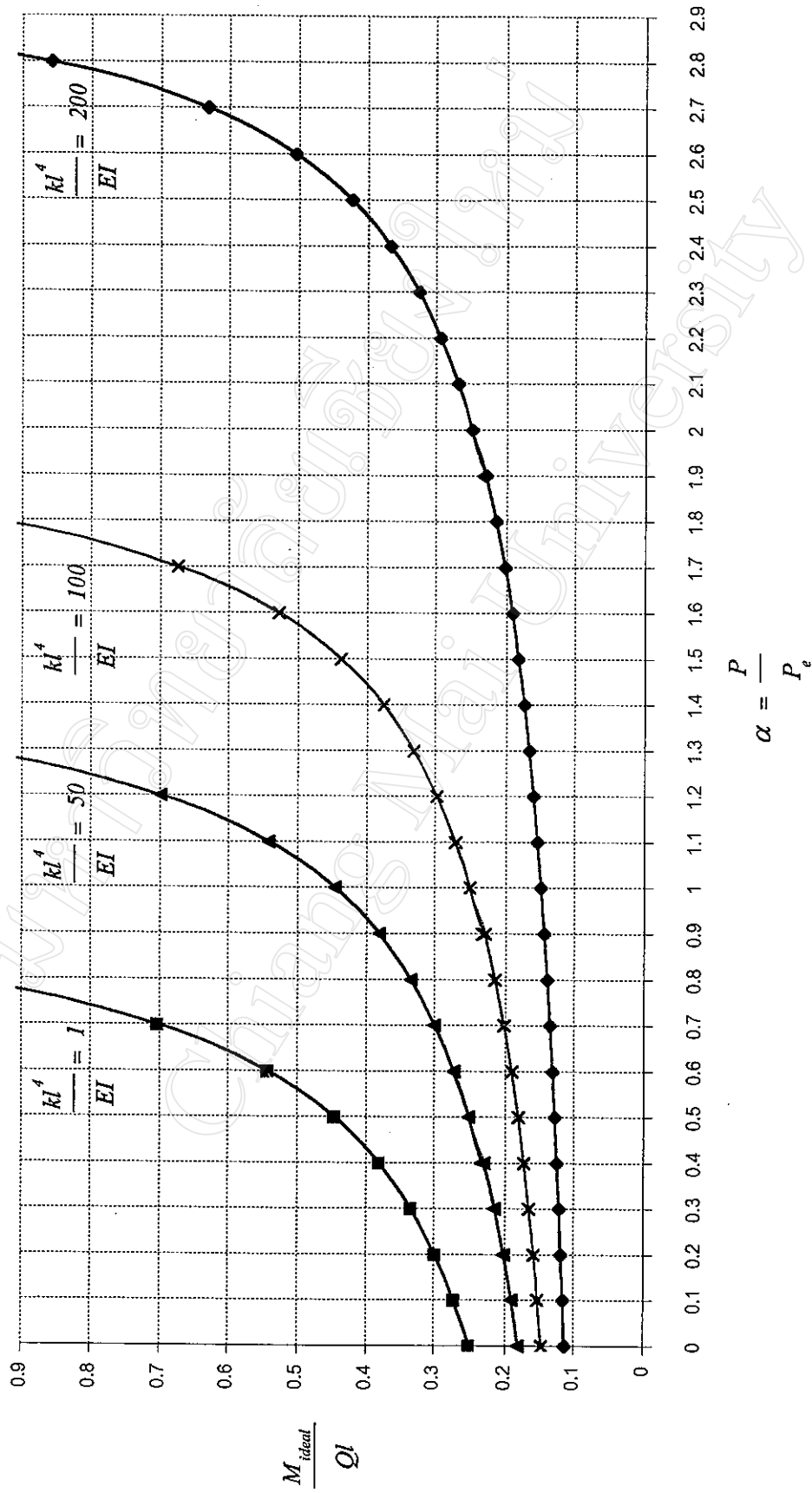
สมการโมเมนต์คัตสำหรับกรณีนี้คือ

$$M_{ideal} = \frac{1}{(m_3^2 - m_4^2) \sin m_3 l \sin m_4 l} \left\{ M_a \left[m_3^2 \sin m_4 l \sin m_3 (l-x) - m_4^2 \sin m_3 l \sin m_4 (l-x) \right] + M_b \left[m_3^2 \sin m_4 l \sin m_3 x - m_4^2 \sin m_3 l \sin m_4 x \right] \right\} \quad \dots\dots\dots(3.32)$$

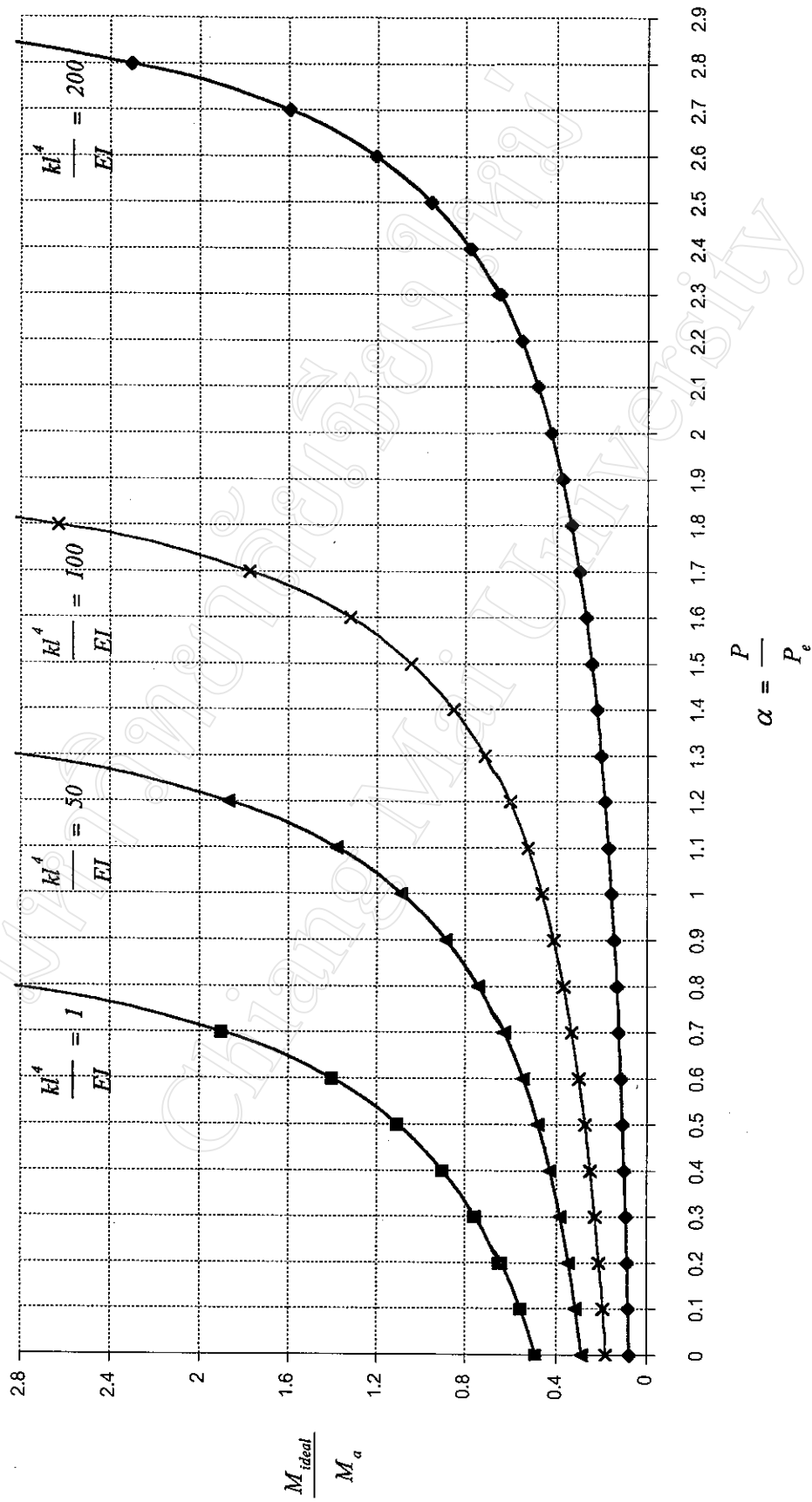
นำสมการ (3.21) ถึงสมการ (3.32) ไปเขียนกราฟโมเมนต์คัตที่กึ่งกลางคาน-เสาได้ดังแสดงในรูปที่ 3.2 (1) ถึงรูปที่ 3.2 (3) โดยกรณีคาน-เสารับน้ำหนักบรรทุกทุกเป็นจุดกำหนดให้ $d = 0.5l$ กรณีคาน-เสารับโมเมนต์คัตกำหนดให้มีเฉพาะโมเมนต์คัต M_d กระทำที่ปลายด้านซ้ายเพียงด้านเดียว ซึ่งกราฟทั้ง 3 รูปแสดงให้เห็นว่าเมื่อแรงอัดในแนวแกนมีค่าเพิ่มจากศูนย์ขึ้นไปเรื่อยๆ โมเมนต์คัตจะมีค่าเพิ่มขึ้น จนกระทั่งแรงอัดในแนวแกนเข้าใกล้แรงโก่งเดาะ โมเมนต์คัตจะมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างมากจนหาค่าไม่ได้ ทั้งนี้เพราะระยะแอนของคาน-เสาแปรผันตามโมเมนต์คัต คาน-เสาที่มีระยะแอนมากย่อมหมายถึงภายในมีโมเมนต์คัตมากตามไปด้วย



รูปที่ 3.2 (1) โมเมนต์ตัดที่กึ่งกลางคาน-เสารองรับโดยฐานรากยืดหยุ่นรับน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ



รูปที่ 3.2 (2) โมเมนต์ตัดที่กึ่งกลางคาน-เสารองรับ โดยฐานรากยึดหยุ่นรับน้ำหนักบรรทุกเป็นจุด ($d = 0.5l$)



รูปที่ 3.2 (3) โมเมนต์ดัดที่กึ่งกลางคาน-เสารองรับโดยฐานรากยึดหยุ่นรับโมเมนต์ดัด M_a ที่ปลายด้านซ้าย

3.3 แรงเฉือนและโมเมนต์คัตส่วนที่เกิดจากการมีความโค้งเริ่มแรก ของคาน-เสารองรับโดยฐานรากยึดหยุ่น

ในบทที่ 2 นั้น จะเห็นได้ว่าความโค้งเริ่มแรกมีผลในการเปลี่ยนแปลงระยะแอนของคาน-เสาด้วยฟังก์ชันเดียวกันทั้ง 3 กรณีน้ำหนักรบรรทุกที่นำมาพิจารณา ดังแสดงในสมการ (2.33) นั้น คือ

$$y_{crooked} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

โดยที่

$y_{crooked}$ คือ ระยะแอนเนื่องจากการคัต ส่วนที่เกิดจากการมีความโค้งเริ่มแรกร่วมกับแรงอัดในแนวแกน ของคาน-เสารองรับโดยฐานรากยึดหยุ่น

จึงสามารถนำทอม $y_{crooked}$ นี้ ไปแปลงเป็นสมการแรงเฉือนและสมการโมเมนต์คัต ซึ่งเป็นส่วนที่เกิดจากการมีความโค้งเริ่มแรกได้ โดยผลที่ได้มีดังนี้

3.3.1 แรงเฉือนส่วนที่เกิดจากการมีความโค้งเริ่มแรก ของคาน-เสารองรับโดยฐานรากยึดหยุ่น

แรงเฉือนส่วนที่เกิดจากการมีความโค้งเริ่มแรกสามารถหาได้โดยการนำ $y_{crooked}$ ไปแทนในสมการ (2.8) ซึ่งจะได้สมการแรงเฉือนคือ

$$V_{crooked} = -EI \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi^3}{l^3} \right) \left(\frac{\frac{\alpha kl^4}{n^2 \pi^4 EI}}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} \right) a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \dots\dots\dots(3.33)$$

โดยที่

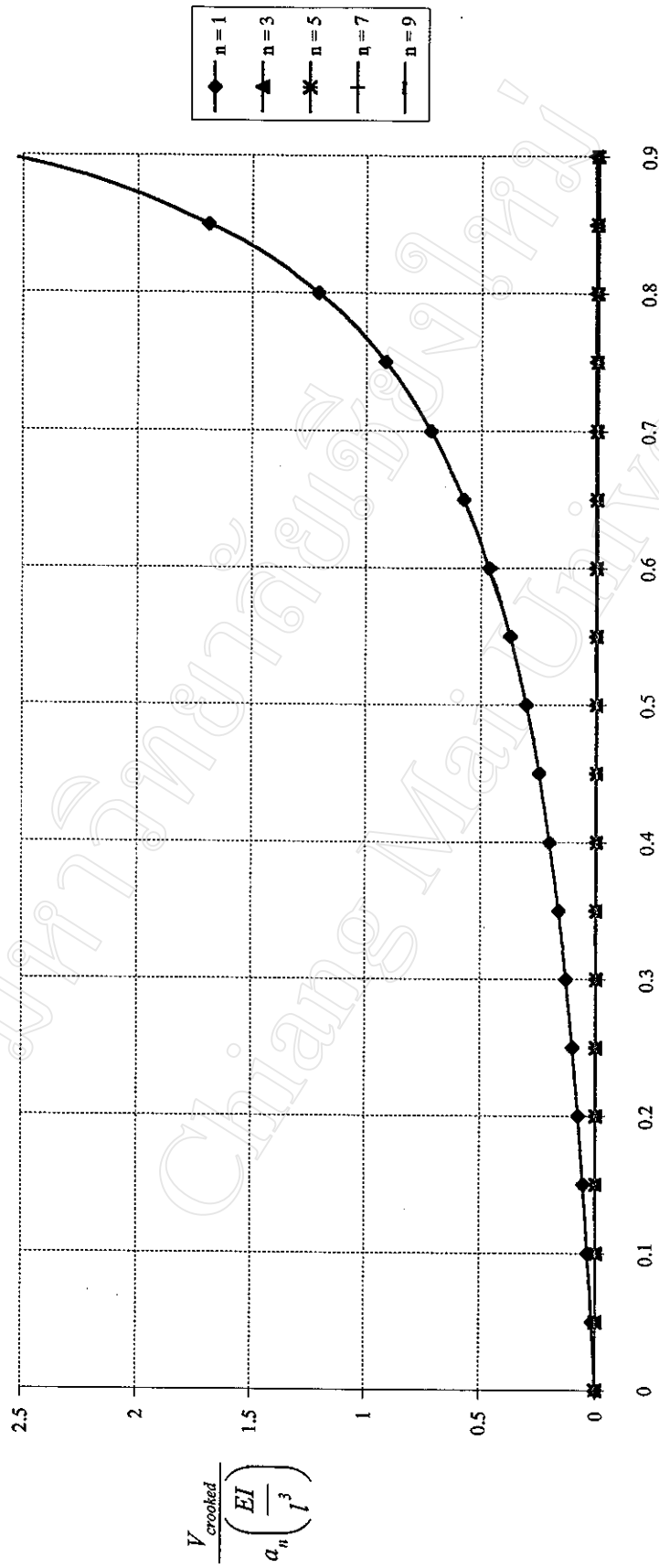
$V_{crooked}$ คือ แรงเฉือนภายในคาน-เสารองรับโดยฐานรากยึดหยุ่น ส่วนที่เกิดจากการมีความโค้งเริ่มแรกร่วมกับแรงอัดในแนวแกน

เมื่อนำสมการ (3.33) ไปเขียนกราฟแสดงขนาดแอมพลิจูดของค่า $\frac{V_{crooked}}{a_n \left(\frac{EI}{l^3} \right)}$ ได้ดัง

แสดงในรูปที่ 3.3 (1) ถึงรูปที่ 3.3 (4) ซึ่งกราฟแสดงให้เห็นว่า แรงเฉือนส่วนที่เกิดจากการมีความโค้งเริ่มแรกของคาน-เสารองรับโดยฐานรากยึดหยุ่น แปรผันตามแรงอัดในแนวแกนนั้นคือ เมื่อแรงอัดในแนวแกนมีค่ามากขึ้น มีผลให้แรงเฉือนที่เกิดจากการมีความโค้งเริ่มแรกมีค่ามากขึ้นตามไปด้วย โดยแรงเฉือนที่เกิดจากการมีความโค้งเริ่มแรกซึ่งเป็นรูปเทอมแรก ($n = 1$) ในอนุกรมของฟังก์ชันชานซ์จะมีค่ามากที่สุด ส่วนเมื่อความโค้งเริ่มแรกเป็นรูปเทอมอื่นๆ ($n > 1$) แรงเฉือนที่เกิดจากการมีความโค้งเริ่มแรกมีค่าน้อยมาก และจะมีค่าลดลงเรื่อยๆ เมื่อค่า n เพิ่มขึ้น จนสามารถละทิ้งได้ ซึ่งกรณี $n = 1$ นั้น กราฟจะเป็นลักษณะเส้นโค้งคล้ายเส้นกราฟของฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิกชานซ์ ส่วนกรณี $n > 1$ นั้น กราฟจะเป็นลักษณะเส้นตรง

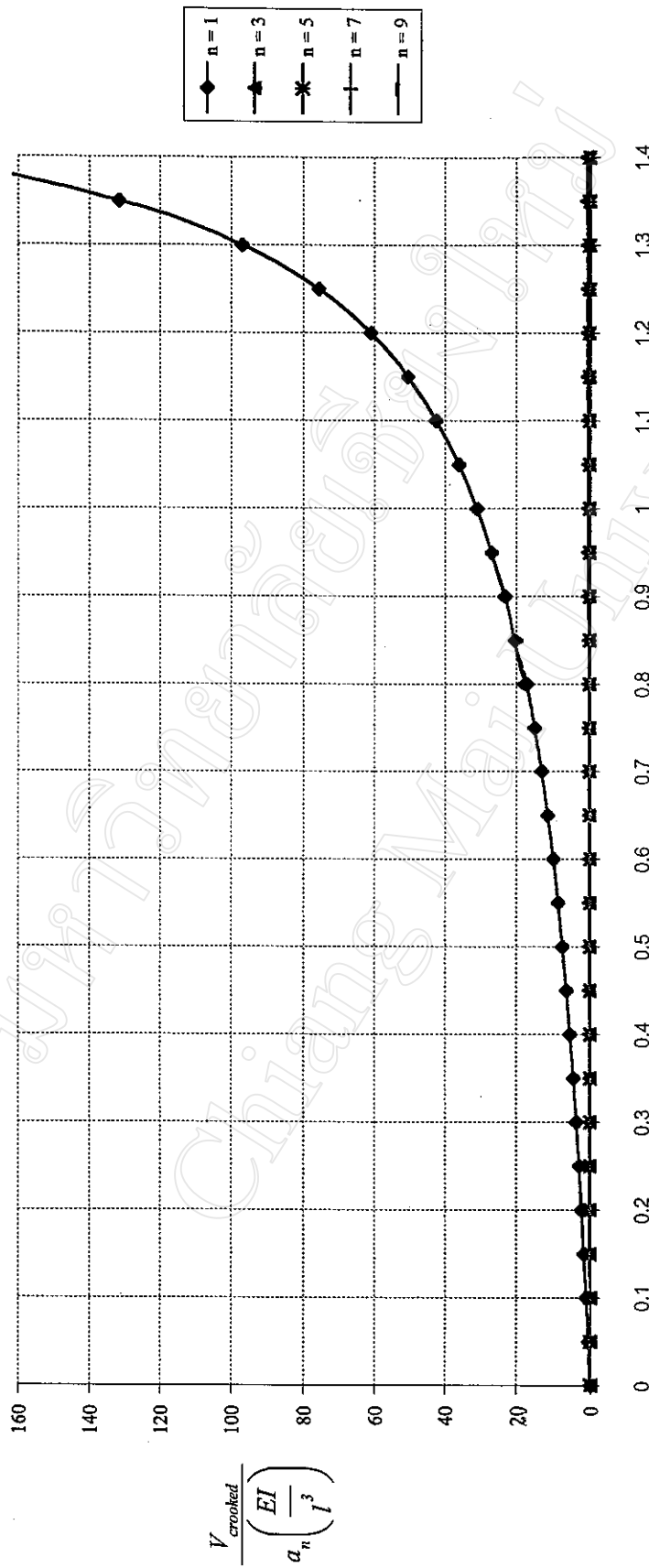
สำหรับผลกระทบของฐานรากยึดหยุ่นนั้น เมื่อค่า $\frac{kl^4}{EI}$ เพิ่มขึ้น แรงเฉือนที่เกิดจากการมีความโค้งเริ่มแรกจะมีค่ามากขึ้นตามไปด้วย เมื่อพิจารณาที่ค่า α เดียวกัน กรณี $n = 1$ นั้น แรงเฉือนจะเพิ่มตามค่า $\frac{kl^4}{EI}$ ในลักษณะเป็นเส้นโค้งคล้ายเส้นกราฟของฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิก

แทน ส่วนกรณี $n > 1$ นั้น แรงเฉือนจะเพิ่มตามค่า $\frac{kl^4}{EI}$ ในลักษณะเป็นเส้นตรง



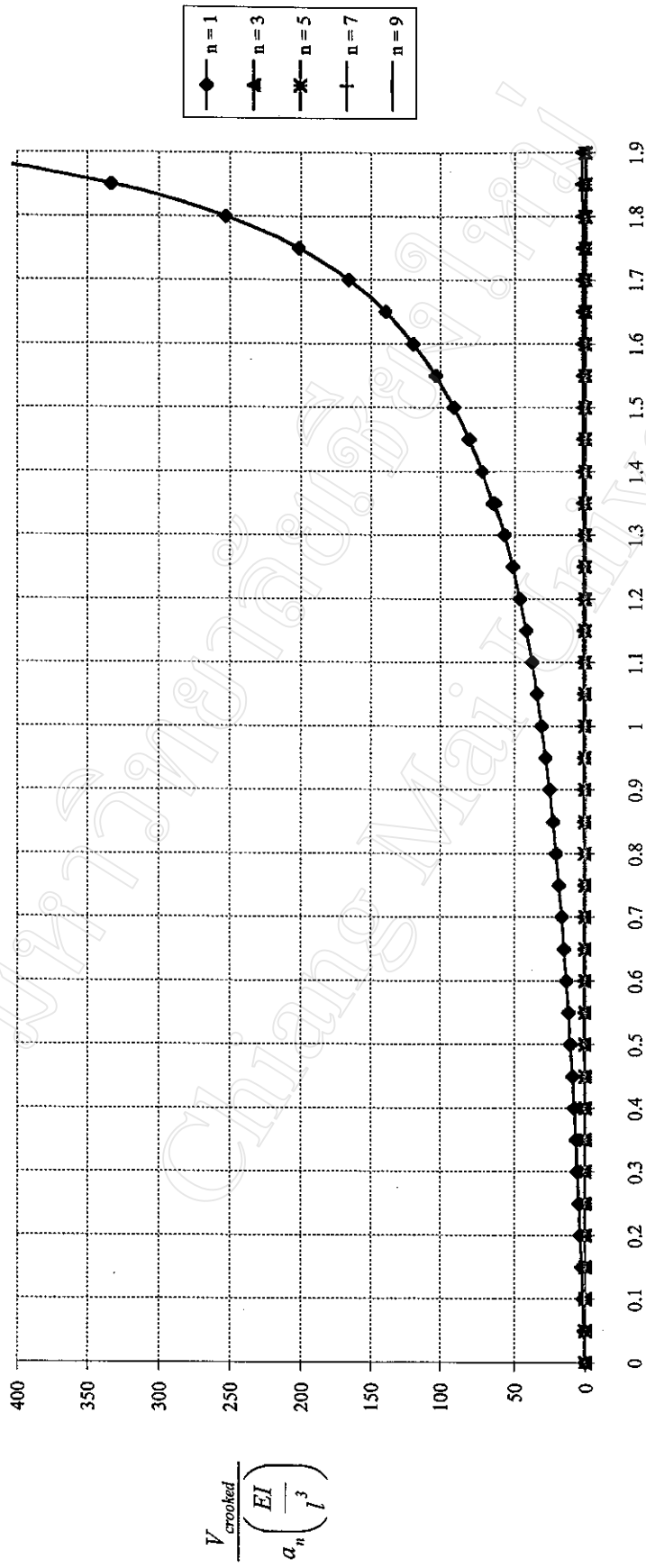
$$\alpha = \frac{P}{P_e}$$

รูปที่ 3.3 (1) กราฟแสดงขนาดแอมพลิจูดของค่า $\frac{V_{crooked}}{a_n \left(\frac{EI}{l^3} \right)}$ ในสมการ (3.33) เมื่อ $\frac{k l^4}{EI} = 1$



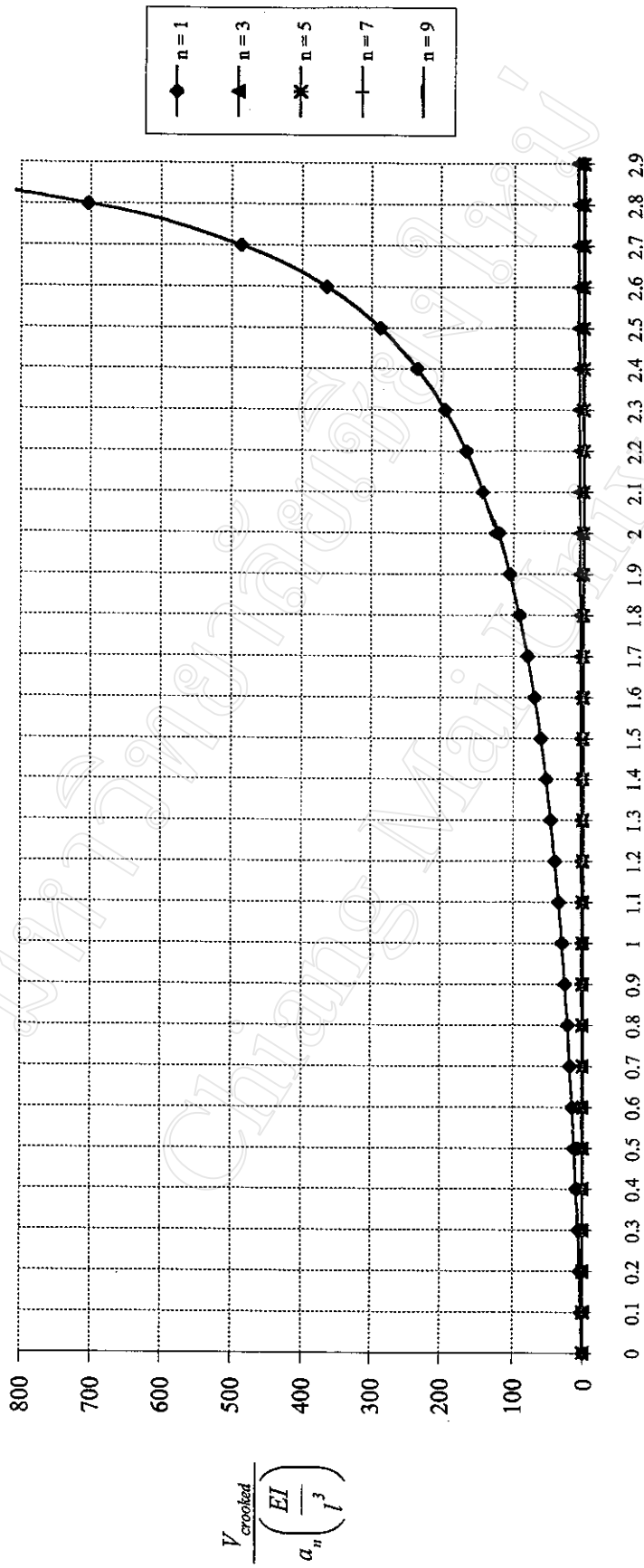
$$\alpha = \frac{P}{P_e}$$

รูปที่ 3.3 (2) กราฟแสดงขนาดแอมพลิจูดของค่า $\frac{V_{crooked}}{a_n \left(\frac{EI}{l^3} \right)}$ ในสมการ (3.33) เมื่อ $\frac{kl^4}{EI} = 50$



$$\alpha = \frac{P}{P_e}$$

รูปที่ 3.3 (3) กราฟแสดงขนาดแอมพลิจูดของค่า $\frac{V_{crooked}}{a_n \left(\frac{EI}{l^3} \right)}$ ในสมการ (3.33) เมื่อ $\frac{kl^4}{EI} = 100$



$$\alpha = \frac{P}{P_e}$$

รูปที่ 3.3 (4) กราฟแสดงขนาดแอมพลิจูดของค่า $\frac{V_{crooked}}{a_n \left(\frac{EI}{l^3} \right)}$ ในสมการ (3.33) เมื่อ $\frac{kl^4}{EI} = 200$

3.3.2 โมเมนต์คัตส่วนที่เกิดจากการมีความโค้งเริ่มแรก ของคาน-เสารองรับโดยฐานรากยึดหยุ่น

โมเมนต์คัตส่วนที่เกิดจากการมีความโค้งเริ่มแรกสามารถหาได้โดยการนำ $y_{crooked}$ ไปแทนในสมการ (2.3) ซึ่งจะได้สมการโมเมนต์คัตคือ

$$M_{crooked} = EI \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \left(\frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} \right) a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \dots\dots\dots(3.34)$$

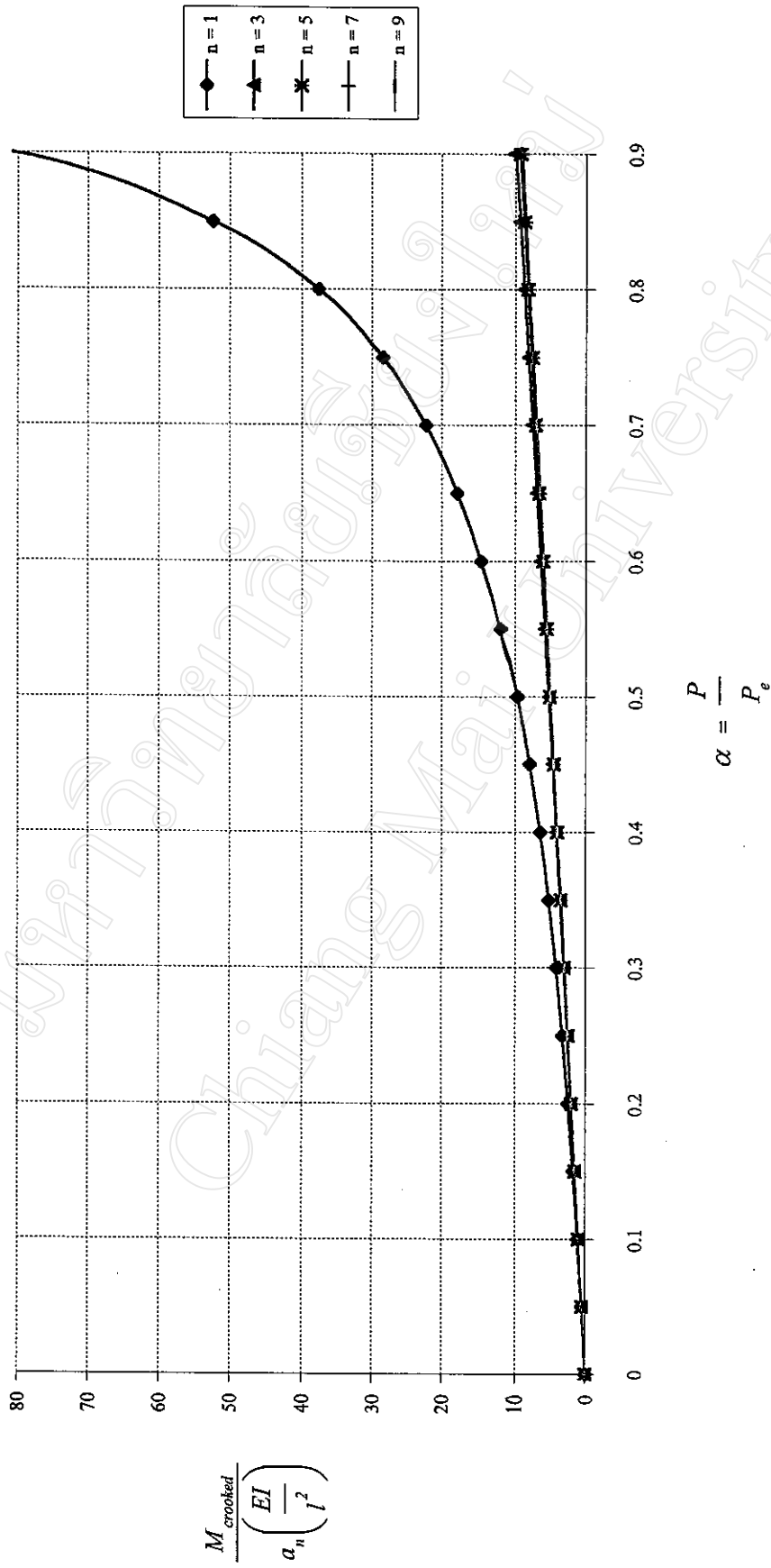
โดยที่

$M_{crooked}$ คือ โมเมนต์คัตภายในคาน-เสารองรับโดยฐานรากยึดหยุ่นส่วนที่เกิดจากการมีความโค้งเริ่มแรก

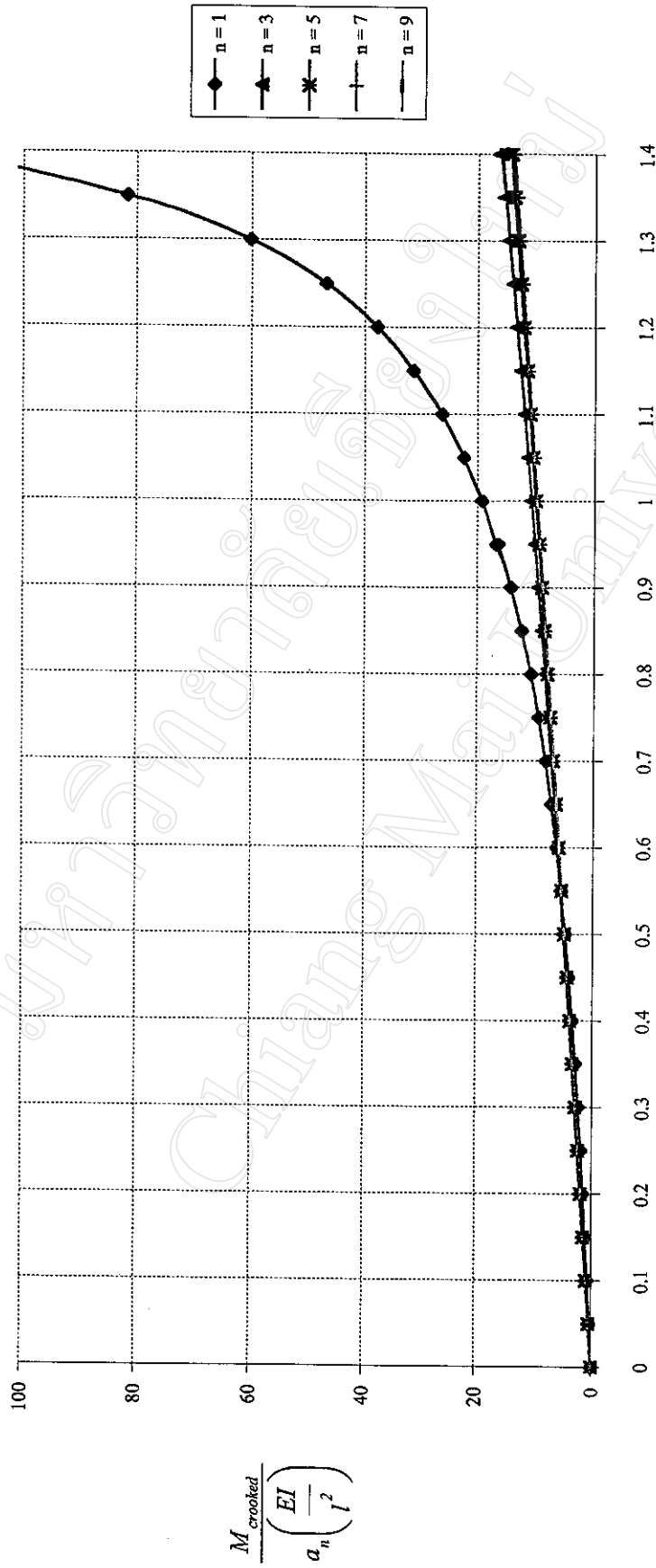
เมื่อนำสมการ (3.34) ไปเขียนกราฟแสดงขนาดแอมพลิจูดของค่า $\frac{M_{crooked}}{a_n \left(\frac{EI}{l^2} \right)}$ ได้ดัง

แสดงในรูปที่ 3.4 (1) ถึงรูปที่ 3.4 (4) ซึ่งกราฟแสดงให้เห็นว่า โมเมนต์คัตส่วนที่เกิดจากการมีความโค้งเริ่มแรกของคาน-เสารองรับโดยฐานรากยึดหยุ่น แปรผันตามแรงอัดในแนวแกนนั้นคือ เมื่อแรงอัดในแนวแกนมีค่ามากขึ้น มีผลให้โมเมนต์คัตที่เกิดจากการมีความโค้งเริ่มแรกมีค่ามากขึ้นตามไปด้วย ซึ่งกรณี $n = 1$ นั้น กราฟจะเป็นลักษณะเส้นโค้งคล้ายเส้นกราฟของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิคซายน์ ส่วนกรณี $n > 1$ นั้น กราฟจะเป็นลักษณะเส้นตรง และในขณะที่แรงอัดในแนวแกนค่อยๆ เพิ่มจากศูนย์ขึ้นไปเรื่อยๆ โมเมนต์คัตมากที่สุดที่เกิดจากการมีความโค้งเริ่มแรกมิได้เกิดที่เทอมแรกในอนุกรมของฟังก์ชันซายน์ ($n = 1$) เท่านั้น อาจเกิดที่เทอมอื่นๆ ($n = 2, 3, 4, \dots$) ก็ได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับขนาดแอมพลิจูดของรูปร่างความโค้งเริ่มแรก (a_n) , แรงอัดในแนวแกน และค่าโมดูลัสของฐานรากยึดหยุ่นด้วย ซึ่งโดยทั่วไปนั้น ค่อนข้างจะเป็นไปได้ยากที่คาน-เสาจะมีความโค้งเริ่มแรกเป็นรูปที่ $n > 1$ แล้วมีขนาดแอมพลิจูด ($a_2, a_3, a_4, \dots$) เท่ากับขนาดแอมพลิจูดของเทอมแรก (a_1) ดังนั้นเทอมแรกในอนุกรมจึงยังค่อนข้างมีผลกระทบต่อโมเมนต์คัตมากกว่าเทอมอื่นๆ และเมื่อแรงอัดในแนวแกนเพิ่มมากขึ้นจนเข้าใกล้แรงโก่งเดาะ โมเมนต์คัตมากที่สุดที่เกิดจากการมีความโค้งเริ่มแรกจะเกิดที่เทอมแรกในอนุกรม

สำหรับผลกระทบของฐานรากยึดหยุนั้น หากความโค้งเริ่มแรกเป็นรูปเทอมแรก
 ในอนุกรมของฟังก์ชันชานน์ ($n = 1$) โมเมนต์ดัดที่เกิดจากการมีความโค้งเริ่มแรกจะมีค่าลดลง
 เรื่อยๆ เมื่อค่า $\frac{kl^4}{EI}$ เพิ่มมากขึ้น แต่หากความโค้งเริ่มแรกเป็นรูปเทอมอื่นๆ ($n = 2, 3, 4, \dots$)
 โมเมนต์ดัดที่เกิดจากการมีความโค้งเริ่มแรก มีค่าไม่แตกต่างกับเมื่อไม่มีฐานรากยึดหยุนรองรับ
 คาน-เสา ไม่ว่า $\frac{kl^4}{EI}$ จะมีค่าเท่าใดก็ตาม (เปรียบเทียบในช่วง $\alpha = 0$ ถึง $\alpha = 1$)

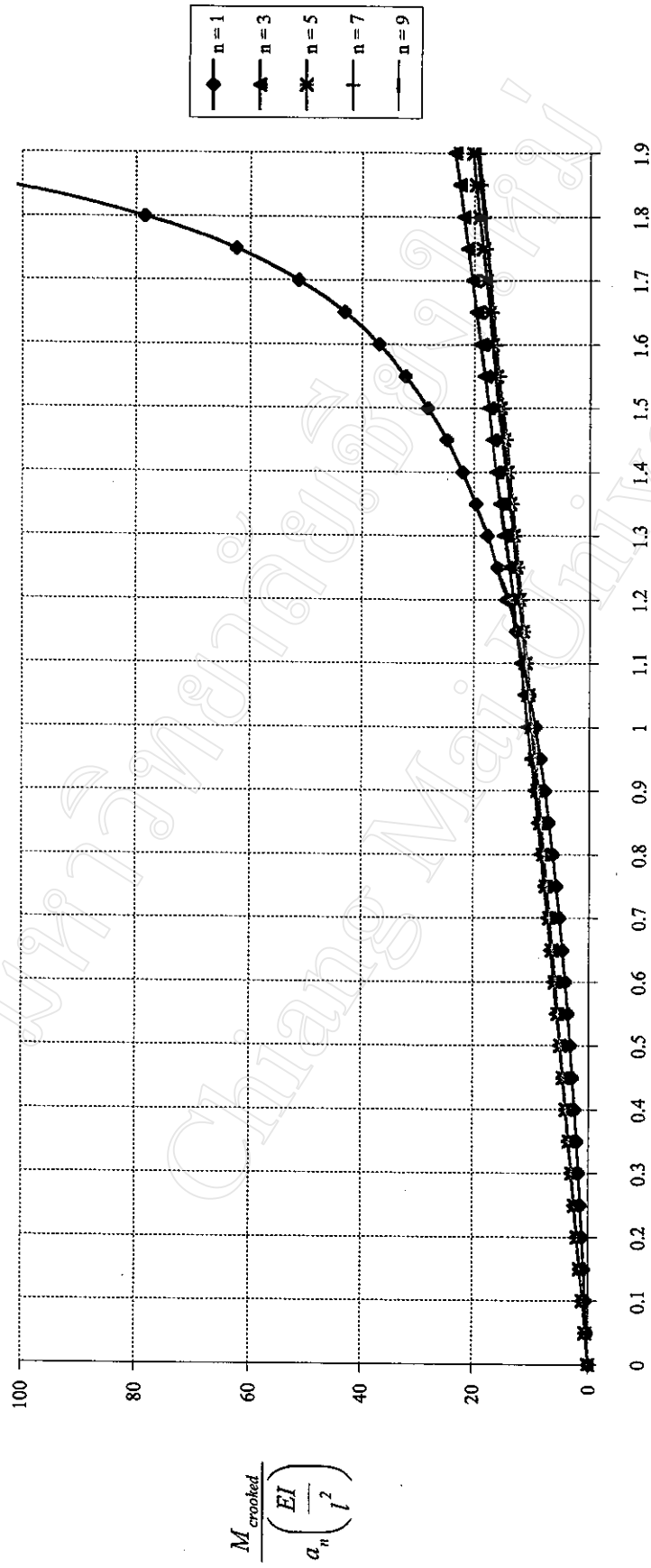


รูปที่ 3.4 (1) กราฟแสดงขนาดแอมพลิจูดของค่า $\frac{M_{crooked}}{a_n \left(\frac{EI}{l^2} \right)}$ ในสมการ (3.34) เมื่อ $\frac{kl^4}{EI} = 1$



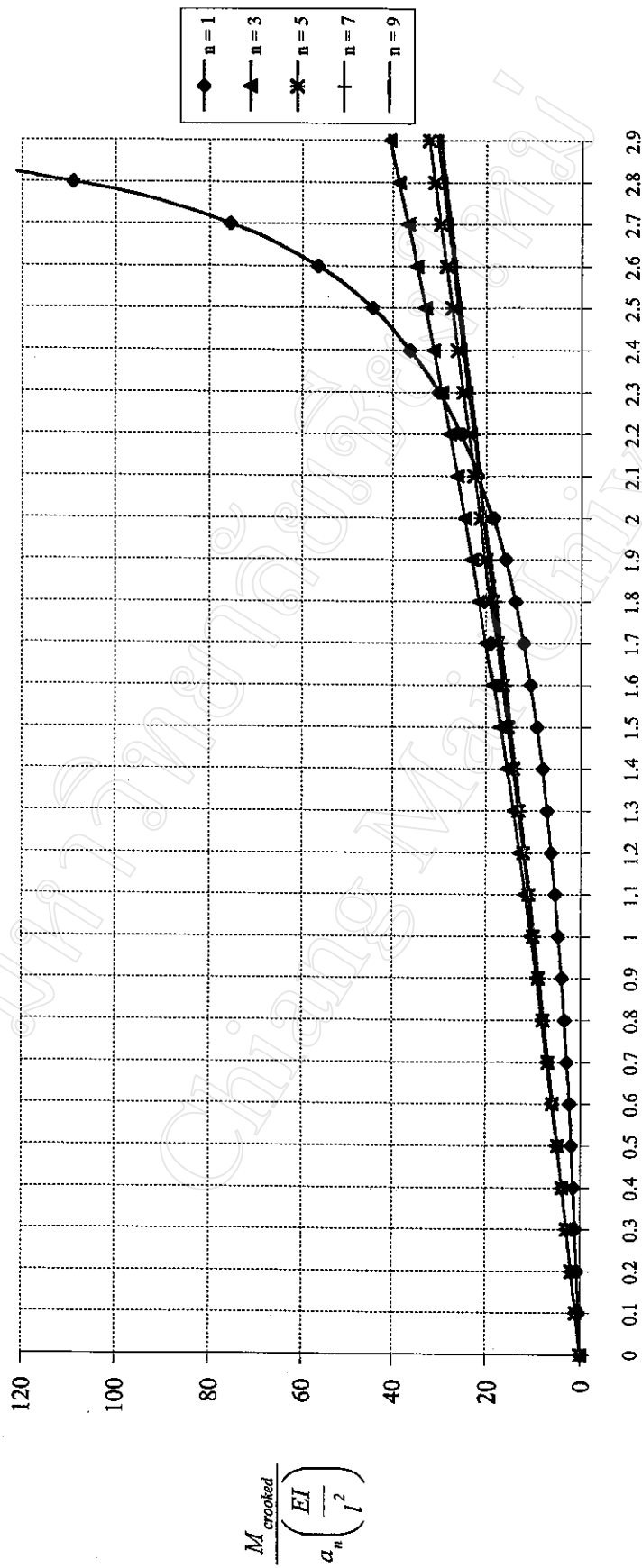
$$\alpha = \frac{P}{P_c}$$

รูปที่ 3.4 (2) กราฟแสดงขนาดแอมพลิจูดของค่า $\frac{M_{crooked}}{a_n \left(\frac{EI}{l^2} \right)}$ ในสมการ (3.34) เมื่อ $\frac{kl^4}{EI} = 50$



$$\alpha = \frac{P}{P_e}$$

รูปที่ 3.4 (3) กราฟแสดงขนาดแอมพลิจูดของค่า $\frac{M_{crooked}}{a_n \left(\frac{EI}{l^2} \right)}$ ในสมการ (3.34) เมื่อ $\frac{kl^4}{EI} = 100$



$$\alpha = \frac{P}{P_e}$$

รูปที่ 3.4 (4) กราฟแสดงขนาดแอมพลิจูดของค่า $\frac{M_{crooked}}{a_n \left(\frac{EI}{l^2} \right)}$ ในสมการ (3.34) เมื่อ $\frac{kl^4}{EI} = 200$