

บทที่ 2 วิธีการวิจัย

2.1 วิธีวิจัย

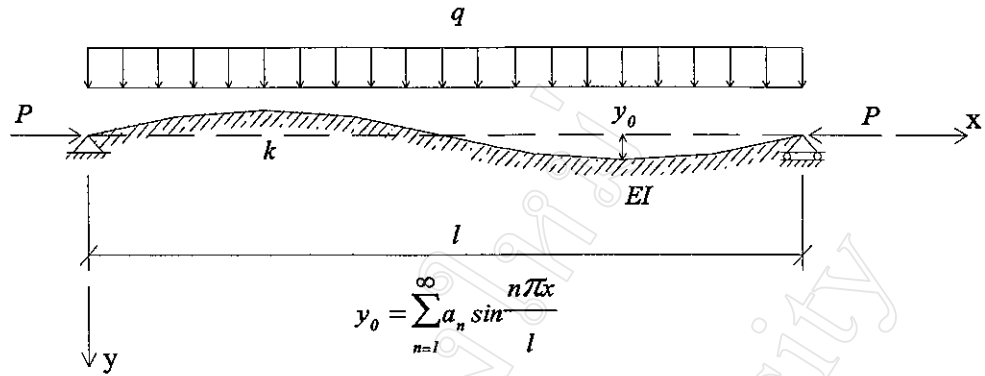
2.1.1 สร้างสมการอนุพันธ์สำหรับคาน-เสาที่มีความโค้งเริ่มแรกรองรับ โดยฐานรากยึดหุ้ย่น
รับน้ำหนักบรรทุกทุกลักษณะต่างๆ ตามที่นำมาพิจารณา

2.1.2 แก้สมการอนุพันธ์ที่ได้ในข้อ 2.1.1 ซึ่งจะได้เป็นสมการระยะแอ่น จากนั้นจึงนำสม
การระยะแอ่นที่ได้ไปหาสมการแรงเฉือนและสมการโมเมนต์ค้ด

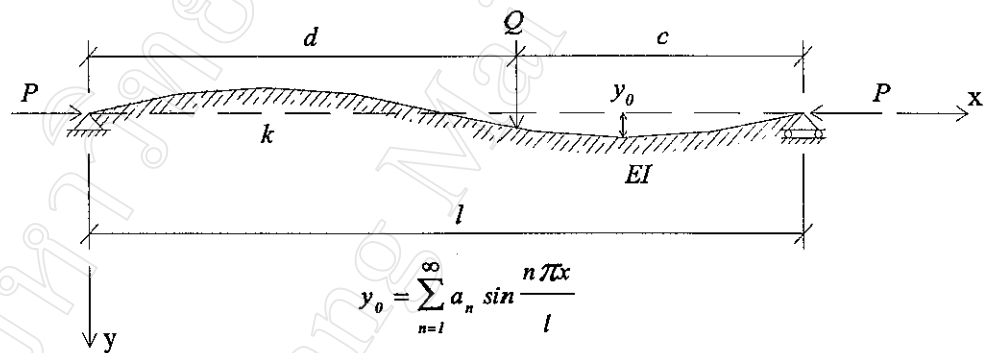
2.1.3 แสดงผลกระทบของการมีความโค้งเริ่มแรก ที่มีต่อการเปลี่ยนแปลงแรงเฉือนและ
โมเมนต์ค้ด ภายในขอบเขตสมมุติฐานที่ตั้งไว้

2.2 ปัญหาที่นำมาวิจัย

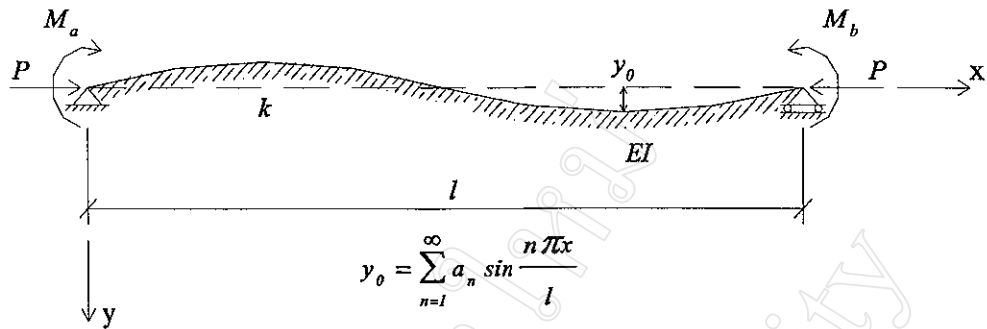
เป็นการศึกษาผลกระทบของการมีความโค้งเริ่มแรกที่มีต่อการเปลี่ยนแปลงแรงเฉือนและ
โมเมนต์ค้ดภายในคาน-เสารองรับโดยฐานรากยึดหุ้ย่น โดยคาน-เสามีความยาว l มีโมดูลัสยึด
หุ้ย่น E มีโมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าค้ด I ฐานรากยึดหุ้ย่นมีโมดูลัส k รับแรงอัดในแนวแกน
 P และรับน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ หรือน้ำหนักบรรทุกเป็นจุด หรือโมเมนต์ค้ด M ที่
รองรับทั้ง 2 ด้าน แยกเป็น 3 กรณีดังแสดงในรูปที่ 2.1 (1) ถึงรูปที่ 2.1 (3)



รูปที่ 2.1 (1) คาน-เสาที่มีความโค้งเริ่มแรกรองรับโดยฐานรากยืดหยุ่นรับน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ (Beam-Columns with an Initial Curvature on an Elastic Foundation under a Uniformly Distributed Load)



รูปที่ 2.1 (2) คาน-เสาที่มีความโค้งเริ่มแรกรองรับโดยฐานรากยืดหยุ่นรับน้ำหนักบรรทุกเป็นจุด (Beam-Columns with an Initial Curvature on an Elastic Foundation under a Concentrated Load)



รูปที่ 2.1 (3) คาน-เสาที่มีความโค้งเริ่มแรกรองรับโดยฐานรากยืดหยุ่นรับโมเมนต์คัต ณ ที่รองรับ ทั้ง 2 ด้าน (Beam-Columns with an Initial Curvature on an Elastic Foundation under Concentrated End Moments)

ซึ่งตัวแปรต่างๆ ที่ใช้ในการวิเคราะห์คาน-เสาในบทนี้มีดังนี้

- | | | |
|---------|-----|--|
| k | คือ | โมดูลัสของฐานรากยืดหยุ่น |
| E | คือ | โมดูลัสยืดหยุ่นของคาน-เสา |
| I | คือ | โมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดคาน-เสา |
| l | คือ | ความยาวของคาน-เสา |
| q | คือ | น้ำหนักบรรทุกทุกกระจายสม่ำเสมอ |
| Q | คือ | น้ำหนักบรรทุกทุกเป็นจุด |
| c | คือ | ระยะจากตำแหน่งที่น้ำหนักบรรทุกทุกเป็นจุดกระทำบนคาน-เสาถึงที่รองรับ |
| ด้านขวา | | |
| d | คือ | ระยะจากที่รองรับด้านซ้ายถึงตำแหน่งที่น้ำหนักบรรทุกทุกเป็นจุดกระทำบนคาน-เสา |
| M_a | คือ | โมเมนต์คัต ณ ที่รองรับด้านซ้าย |
| M_b | คือ | โมเมนต์คัต ณ ที่รองรับด้านขวา |
| P | คือ | แรงอัดในแนวแกน |
| x | คือ | ระยะตามความยาวคาน-เสา |
| y | คือ | ระยะแอนรวมทั้งหมดของคาน-เสา |
| y_0 | คือ | ระยะแอนเนื่องจากความโค้งเริ่มแรก |

2.3 สมมุติฐาน

2.3.1 คาน-เสาเป็นวัสดุที่มีเนื้อสม่ำเสมอ คุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง มีความสัมพันธ์แบบยืดหยุ่นเชิงเส้น และมีโมดูลัสยืดหยุ่น E

2.3.2 ระบายหน้าตัดยังคงเป็นระนาบหลังจากเกิดการคด (ความเครียดมีการกระจายแบบเชิงเส้น)

2.3.3 หน้าตัดคงที่ตลอดความยาว มีพื้นที่หน้าตัด A , มีโมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัด I , และมีความยาว l

2.3.4 ระยะแ่งน้อยกว่าน้อยเมื่อเปรียบเทียบกับขนาดของหน้าตัด

2.3.5 ไม่พิจารณาผลกระทบของแรงบิดและแรงเฉือน

2.3.6 ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรง (Stress) กับความเครียด (Strain) เหมือนกันทั้งในการรับแรงดึงและการรับแรงอัด

2.3.7 ระยะแ่งเริ่มแรกเป็นระนาบโค้ง แทนด้วยอนุกรมของฟังก์ชันไซน์ นั่นคือ

$$y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \dots\dots\dots(2.1)$$

โดยที่

n คือ จำนวนครึ่งคลื่นไซน์

$= 1, 2, 3, \dots$

a_n คือ สัมประสิทธิ์ค่าคงที่

2.3.8 แรงกระทำและการเปลี่ยนรูปเกิดเฉพาะในระนาบของการคด การเปลี่ยนรูปทั้งหมดเกิดเนื่องจากการคดเท่านั้น

2.3.9 ฐานรากยึดหยุ่นเป็น Winkler Foundation กล่าวคือ แรงปฏิกิริยาของฐานรากยึดหยุ่นที่กระทำต่อจุดใดๆ บนคาน-เสาเป็นสัดส่วนโดยตรงกับระยะแ่งของคาน-เสาที่จุดนั้นๆ

2.4 การวิเคราะห์

หัวข้อนี้จะสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ซึ่งอยู่ในรูปสมการอนุพันธ์ สำหรับคาน-เสาแสดงในหัวข้อ 2.2 เมื่อแก้ปัญหามสมการอนุพันธ์แล้ว คำตอบที่ได้จะอยู่ในรูปสมการระยะแอ่นแล้วจึงนำสมการระยะแอ่นที่ได้ไปแปลงเป็นสมการแรงเฉือนและสมการโมเมนต์ดัดเพื่อแสดงผลในบทที่ 3 ต่อไป โดยในหัวข้อนี้จะแยกการวิเคราะห์ออกเป็น 3 กรณี ตามลักษณะน้ำหนักบรรทุกที่กระทำบนคาน-เสาดังนี้

2.4.1 คาน-เสาที่มีความโค้งเริ่มแรกรองรับโดยฐานรากยึดหยุ่นรับน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ

กรณีแรกนี้ จะทำการวิเคราะห์คาน-เสาช่วงเดียวยาว l มีโมดูลัสยืดหยุ่น E มีโมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัด I รองรับโดยฐานรากยึดหยุ่นที่มีโมดูลัส k และมีความโค้งเริ่มแรกเป็นรูปสมการ (2.1) รับน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ ดังแสดงในรูปที่ 2.1 (1)

พิจารณาหน่วยย่อยของคาน-เสาในรูปที่ 2.2 ระยะแอ่นรวมทั้งหมดของคาน-เสาสามารถหาได้จากความสัมพันธ์

$$y = y_0 + y_1 \quad \dots\dots\dots(2.2)$$

โดยที่

y คือ ผลรวมของระยะแอ่นเนื่องจากความโค้งเริ่มแรกกับระยะแอ่นเนื่องจากการคด

y_1 คือ ระยะแอ่นเนื่องจากการคด

นำทฤษฎีคานที่เกิดการคดมาประยุกต์ใช้ จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างระยะแอ่นเนื่องจากการคดกับโมเมนต์ดัด คือ

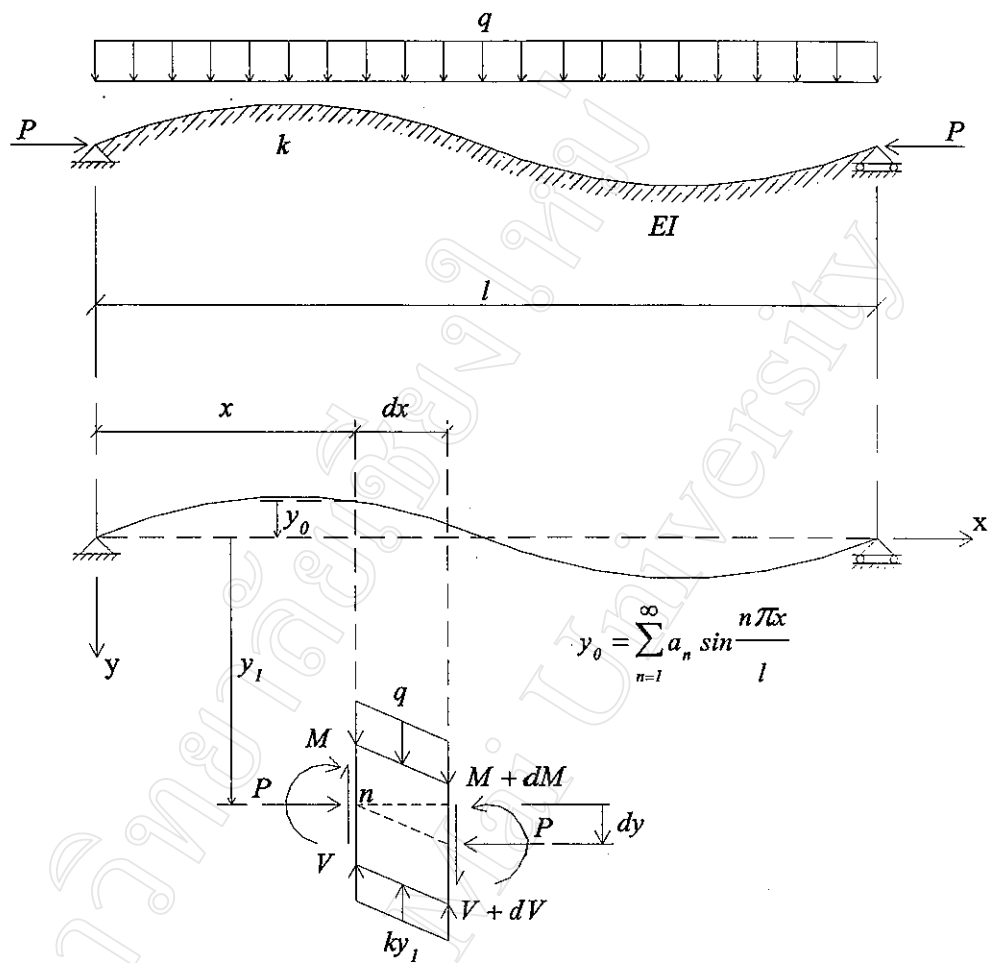
$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad \dots\dots\dots(2.3)$$

ใช้หลักสมดุลของแรงในแนว y กับหน่วยย่อย dx จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงเฉือนกับน้ำหนักบรรทุกและแรงต้านจากฐานรากยึดหยุ่น คือ

$$V + ky_1 dx = qdx + V + dV \quad \dots\dots\dots(2.4)$$

หรือจัดรูปสมการ (2.4) ใหม่ได้เป็น

$$\frac{dV}{dx} = ky_1 - q \quad \dots\dots\dots(2.5)$$



รูปที่ 2.2 หน่วยย่อยของคาน-เสาที่มีความโค้งเริ่มแรกรองรับโดยฐานรากยืดหยุ่นรับน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ

ใช้หลักสมดุลของโมเมนต์ที่จุดรอบจุด n จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงเฉือน, โมเมนต์คัต, น้ำหนักบรรทุก และแรงอัดในแนวแกน คือ

$$M + qdx \frac{dx}{2} + (V + dV)dx = ky_1 dx \frac{dx}{2} + M + dM - Pdy \quad \dots\dots\dots(2.6)$$

ในทางคณิตศาสตร์เราถือว่า dx , dV และ dM นั้นมีค่าน้อยมาก และหากตัวแปรเหล่านี้มีการคูณกัน ค่าที่ได้ย่อมน้อยมากจนสามารถละทิ้งได้ ดังนั้นจึงสามารถจัดสมการ (2.6) ได้เป็น

$$V = \frac{dM}{dx} - P \frac{dy}{dx} = \frac{dM}{dx} - P \left[\frac{dy_0}{dx} + \frac{dy_1}{dx} \right] \quad \dots\dots\dots(2.7)$$

แทนค่าอนุพันธ์ของโมเมนต์คัตในสมการ (2.3) ลงในสมการ (2.7) จะได้

$$EI \frac{d^3 y_1}{dx^3} + P \left[\frac{dy_0}{dx} + \frac{dy_1}{dx} \right] = -V \quad \dots\dots\dots(2.8)$$

หาอนุพันธ์ของสมการ (2.8) อีกครั้งหนึ่งจะได้

$$EI \frac{d^4 y_1}{dx^4} + P \left[\frac{d^2 y_0}{dx^2} + \frac{d^2 y_1}{dx^2} \right] = -\frac{dV}{dx} = q - ky_1 \quad \dots\dots\dots(2.9)$$

แทนค่า y_0 ลงในสมการ (2.9) แล้วจัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\frac{d^4 y_1}{dx^4} + p^2 \frac{d^2 y_1}{dx^2} + 4\beta^4 y_1 = \frac{q}{EI} + \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \dots\dots\dots(2.10)$$

หรือเขียนสมการ (2.10) ในรูป Differential Operators (D^j) ได้เป็น

$$(D^4 + p^2 D^2 + 4\beta^4) y_1 = \frac{q}{EI} + \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \dots\dots\dots(2.11)$$

โดยที่

$$p^2 = \frac{P}{EI} = \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left(\frac{P}{P_e} \right) \quad \dots\dots\dots(2.12)$$

$$P_e = EI \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \quad \dots\dots\dots(2.13)$$

$$\beta^4 = \frac{k}{4EI} \quad \dots\dots\dots(2.14)$$

D^j คือ Differential Operators

$$= \frac{d^j}{dx^j} \quad \dots\dots\dots(2.15)$$

สมการ (2.11) นี้ เป็นสมการอนุพันธ์ที่จะใช้สำหรับหาระยะแอนเนื่องจากการคัตของคาน-เสาในขั้นต่อไป

2.4.1.1 การแก้ปัญหามสมการอนุพันธ์

ด้วยวิธีการทางคณิตศาสตร์ สมการ (2.11) สามารถแยกหาคำตอบได้เป็น 2 ส่วน คือ

2.4.1.1.1 คำตอบเอกพันธ์ (Homogeneous Solutions)

คำตอบส่วนนี้หาได้ด้วยการไม่นำน้ำหนักบรรทุกและความโค้งเริ่มแรกมาพิจารณาในสมการอนุพันธ์ โดยกำหนดให้ด้านขวาของสมการ (2.11) เป็นศูนย์ นั่นคือ

$$(D^4 + p^2 D^2 + 4\beta^4)y_{1h} = 0 \quad \text{.....(2.16)}$$

โดยที่

y_{1h} คือ ระยะแ่นเนื่องจากการคัดส่วนเอกพันธ์

สามารถสร้างสมการช่วย (Characteristic Equation) สำหรับสมการ (2.16) ได้เป็น

$$m_j^4 + p^2 m_j^2 + 4\beta^4 = 0 \quad \text{.....(2.17)}$$

ซึ่งคำตอบขั้นต้นของสมการ (2.17) จะอยู่ในรูป

$$m_j^2 = \frac{-p^2 + \sqrt{p^4 - 16\beta^4}}{2}, \frac{-p^2 - \sqrt{p^4 - 16\beta^4}}{2} \quad \text{.....(2.18)}$$

โดยที่

m_j คือ คำตอบของสมการ (2.17)

เมื่อพิจารณาสมการ (2.18) จะเห็นได้ว่าค่า $p^4 - 16\beta^4$ ที่ต่างกัน ย่อมจะมีผลให้การแก้ปัญหามสมการอนุพันธ์ได้รูปแบบคำตอบที่แตกต่างกันไป ดังนั้นจึงต้องมีการแยกหาคำตอบของสมการ (2.17) ออกเป็น 3 กรณีดังนี้

ก. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 < 0$

ในกรณีนี้ ต้องจัดคำตอบขั้นต้นในสมการ (2.18) ให้อยู่ในรูปจำนวนเชิงซ้อน
นั่นคือ

$$m_j^2 = \frac{-p^2 + i\sqrt{16\beta^4 - p^4}}{2}, \frac{-p^2 - i\sqrt{16\beta^4 - p^4}}{2} \quad \text{.....(2.19)}$$

โดยที่

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{.....(2.20)}$$

ซึ่งในที่สุดจะได้คำตอบของสมการ (2.17) คือ

$$m_j = (m_1 + im_2), (m_1 - im_2), -(m_1 + im_2), -(m_1 - im_2) \quad \dots\dots\dots(2.21)$$

โดยที่

$$m_1 = \sqrt{\beta^2 - \frac{p^2}{4}} \quad \dots\dots\dots(2.22)$$

$$m_2 = \sqrt{\beta^2 + \frac{p^2}{4}} \quad \dots\dots\dots(2.23)$$

และคำตอบของสมการ (2.16) สำหรับกรณีนี้จะอยู่ในรูปฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก คือ

$$y_{1h} = \left(A \cosh m_1 x + B \sinh m_1 x \right) \cos m_2 x + \left(C \cosh m_1 x + D \sinh m_1 x \right) \sin m_2 x \quad \dots\dots\dots(2.24)$$

โดยที่ A, B, C และ D คือ สัมประสิทธิ์ค่าคงที่

ข. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 = 0$

กรณีนี้คำตอบของสมการ (2.17) จะอยู่ในรูปจำนวนเชิงซ้อนที่ซ้ำกัน คือ

$$m_j = -i\frac{p}{\sqrt{2}}, -i\frac{p}{\sqrt{2}}, i\frac{p}{\sqrt{2}}, i\frac{p}{\sqrt{2}} \quad \dots\dots\dots(2.25)$$

และคำตอบของสมการ (2.16) สำหรับกรณีนี้จะอยู่ในรูปฟังก์ชันตรีโกณมิติ คือ

$$y_{1h} = A \cos \frac{px}{\sqrt{2}} + B \sin \frac{px}{\sqrt{2}} + x \left(C \cos \frac{px}{\sqrt{2}} + D \sin \frac{px}{\sqrt{2}} \right) \quad \dots\dots\dots(2.26)$$

ค. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 > 0$

กรณีนี้ คำตอบของสมการ (2.16) ที่ได้คือ

$$m_j = -im_3, im_3, -im_4, im_4 \quad \dots\dots\dots(2.27)$$

โดยที่

$$m_3 = \frac{\sqrt{p^2 - \sqrt{p^4 - 16\beta^4}}}{2} \quad \dots\dots\dots(2.28)$$

$$m_4 = \frac{\sqrt{p^2 + \sqrt{p^4 - 16\beta^4}}}{2} \dots\dots\dots(2.29)$$

และจะได้คำตอบของสมการ (2.16) สำหรับกรณีนี้อยู่ในรูปฟังก์ชันตรีโกณมิติ คือ

$$y_{1h} = A \cos m_3 x + B \sin m_3 x + C \cos m_4 x + D \sin m_4 x \dots\dots\dots(2.30)$$

2.4.1.1.2 คำตอบเฉพาะ (Particular Solutions)

ส่วนนี้เป็นการนำเฉพาะน้ำหนักบรรทุกและความโค้งเริ่มแรกมาพิจารณาหาคำตอบ โดยขั้นแรกต้องแปลงสมการ (2.11) เป็น

$$(D^4 + p^2 D^2 + 4\beta^4) y_{1p} = \frac{q}{EI} + \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \dots\dots\dots(2.31)$$

โดยที่

y_{1p} คือ ระยะแอ่นเนื่องจากการคัดส่วนเฉพาะ

จากนั้นใช้วิธี Inverse Operator ช่วยในการหาคำตอบของสมการ (2.31) ซึ่งมีกรรมวิธีแก้ปัญหาดังนี้

$$\begin{aligned} y_{1p} &= \frac{1}{(D^4 + p^2 D^2 + 4\beta^4)} \left[\frac{q}{EI} + \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right] \\ y_{1p} &= \frac{1}{4\beta^4 \left(\frac{D^4 + p^2 D^2}{4\beta^4} + 1 \right)} \left(\frac{q}{EI} \right) \\ &+ \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{D^2 (D^2 + p^2) + 4\beta^4} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \\ y_{1p} &= \frac{\left(1 + \frac{D^4 + p^2 D^2}{4\beta^4} \right)^{-1}}{4\beta^4} \left(\frac{q}{EI} \right) \\ &+ \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{-\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \left[-\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 + p^2 \right] + 4\beta^4} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \end{aligned}$$

$$y_{Ip} = \frac{q}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^2}{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 - p^2 + \left(\frac{2\beta^2 l}{n\pi}\right)^2} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \dots\dots\dots(2.32)$$

จัดรูปสมการ (2.32) ใหม่ได้เป็น

$$y_{Ip} = \frac{q}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \dots\dots\dots(2.33)$$

โดยที่

$$\alpha = \frac{P}{P_e} = \left(\frac{pl}{\pi}\right)^2 \quad \dots\dots\dots(2.34)$$

ซึ่งสมการ (2.33) แสดงให้เห็นว่า เทอมที่เกิดจากการมีความโค้งเริ่มแรก

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \text{ คล้ายกับสมการ (1.18) ต่างกันตรงตัวหารที่มีเทอม}$$

$\frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}$ บวกเพิ่มเข้ามา ซึ่งหมายถึงว่าฐานรากยึดหยุ่นช่วยลดระยะแอ่นเนื่องจากการคดที่เกิดจากการมีความโค้งเริ่มแรกให้น้อยลง

2.4.1.1.3 คำตอบทั่วไปของสมการอนุพันธ์ (General Solutions)

คำตอบทั่วไปของสมการ (2.11) ที่ได้ก็คือระยะแอ่นเนื่องจากการคดนั่นเอง ซึ่งเป็นผลรวมของระยะแอ่นเนื่องจากการคดส่วนเอกพันธ์ กับ ระยะแอ่นเนื่องจากการคดส่วนเฉพาะ หรือแสดงในรูปสมการคือ

$$y_I = y_{Ih} + y_{Ip} \quad \dots\dots\dots(2.35)$$

ซึ่งจะได้สมการระยะแอ่นเนื่องจากการคดของแต่ละกรณีดังนี้

ก. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 < 0$

สมการระยะแอ่นเนื่องจากการค้ำสำหรับกรณีนี้คือ

$$y_I = (A \cosh m_1 x + B \sinh m_1 x) \cos m_2 x + (C \cosh m_1 x + D \sinh m_1 x) \sin m_2 x + \frac{q}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \dots\dots\dots(2.36)$$

ข. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 = 0$

สมการระยะแอ่นเนื่องจากการค้ำสำหรับกรณีนี้คือ

$$y_I = A \cos \frac{px}{\sqrt{2}} + B \sin \frac{px}{\sqrt{2}} + x \left(C \cos \frac{px}{\sqrt{2}} + D \sin \frac{px}{\sqrt{2}} \right) + \frac{q}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \dots\dots\dots(2.37)$$

ค. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 > 0$

สมการระยะแอ่นเนื่องจากการค้ำสำหรับกรณีนี้คือ

$$y_I = A \cos m_3 x + B \sin m_3 x + C \cos m_4 x + D \sin m_4 x + \frac{q}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \dots\dots\dots(2.38)$$

2.4.1.2 สภาวะขอบ (Boundary Conditions)

สภาวะขอบก็คือสภาพของที่รองรับนั่นเอง ในหัวข้อนี้จะนำสภาวะขอบมาช่วยสร้างระบบสมการ เพื่อใช้หาสัมประสิทธิ์ค่าคงที่ของสมการระยะแอ่นในหัวข้อ 2.4.1.1.3

ปัญหาที่นำมาวิจัยในกรณีนี้ ที่รองรับทั้ง 2 ด้านเป็นแบบยึดหมุน ระยะแอ่น ณ ที่รองรับจึงมีค่าเป็นศูนย์ และที่รองรับทั้ง 2 ด้านไม่มีโมเมนต์ค้ำกระทำ ดังนั้นโมเมนต์ค้ำ ณ ที่รองรับจึงเป็นศูนย์ด้วยเช่นกัน หรือเขียนในรูปสมการได้เป็น

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \dots\dots\dots(2.39)$$

$$x = l, \quad y = 0 \quad \dots\dots\dots(2.40)$$

$$x = 0, \quad \frac{d^2 y_1}{dx^2} = 0 \quad \dots\dots\dots(2.41)$$

$$x = l, \quad \frac{d^2 y_1}{dx^2} = 0 \quad \dots\dots\dots(2.42)$$

นำความสัมพันธ์ของค่า x และ y ในสมการ (2.39) ถึงสมการ (2.42) ไปแทนในสมการระยะแอนที่ได้จากหัวข้อ 2.4.1.1.3 ทำให้ได้ระบบสมการ 4 สมการที่จะใช้ในการหาสัมประสิทธิ์ค่าคงที่ และเมื่อแก้ปัญหาระบบสมการเรียบร้อยแล้ว ผลที่ได้มีดังนี้

ก. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 < 0$

สัมประสิทธิ์ค่าคงที่สำหรับกรณีนี้ได้แก่

$$A = -\frac{q}{k} \quad \dots\dots\dots(2.43)$$

$$B = \frac{q}{2m_1 m_2 k (\cos m_2 l + \cosh m_1 l)} \left[2m_1 m_2 \sinh m_1 l - (m_1^2 - m_2^2) \sin m_2 l \right] \quad \dots\dots\dots(2.44)$$

$$C = -\frac{q}{2m_1 m_2 k (\cos m_2 l + \cosh m_1 l)} \left[2m_1 m_2 \sin m_2 l + (m_1^2 - m_2^2) \sinh m_1 l \right] \quad \dots\dots\dots(2.45)$$

$$D = \frac{(m_1^2 - m_2^2) q}{2m_1 m_2 k} \quad \dots\dots\dots(2.46)$$

ข. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 = 0$

สัมประสิทธิ์ค่าคงที่สำหรับกรณีนี้ได้แก่

$$A = -\frac{q}{k} \quad \dots\dots\dots(2.47)$$

$$B = \frac{q}{4k \left(1 + \cos \frac{pl}{\sqrt{2}} \right)} \left[\sqrt{2} pl - 4 \sin \frac{pl}{\sqrt{2}} \right] \quad \dots\dots\dots(2.48)$$

$$C = \frac{pq}{2\sqrt{2}k \sin \frac{pl}{\sqrt{2}}} \left[1 - \cos \frac{pl}{\sqrt{2}} \right] \quad \dots\dots\dots(2.49)$$

$$D = -\frac{pq}{2\sqrt{2}k} \quad \dots\dots\dots(2.50)$$

ค. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 > 0$

สัมประสิทธิ์ค่าคงที่สำหรับกรณีนี้ได้แก่

$$A = \frac{m_4^2 q}{(m_3^2 - m_4^2)k} \quad \dots\dots\dots(2.51)$$

$$B = \frac{m_4^2 q(1 - \cos m_3 l)}{(m_3^2 - m_4^2)k \sin m_3 l} \quad \dots\dots\dots(2.52)$$

$$C = -\frac{m_3^2 q}{(m_3^2 - m_4^2)k} \quad \dots\dots\dots(2.53)$$

$$D = -\frac{m_3^2 q(1 - \cos m_4 l)}{(m_3^2 - m_4^2)k \sin m_4 l} \quad \dots\dots\dots(2.54)$$

2.4.1.3 คำตอบของปัญหา

ผลการวิเคราะห์ในเบื้องต้นนี้ คำตอบของปัญหาที่ได้อยู่ในรูปสมการระยะแอนรวมทั้งหมด โดยการนำสัมประสิทธิ์ค่าคงที่ A, B, C และ D ในหัวข้อ 2.4.1.2 ไปแทนในสมการ (2.36) ถึงสมการ (2.38) ตามกรณีของตนแล้วจัดรูปสมการใหม่ ทำให้ได้คำตอบดังนี้

ก. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 < 0$

สมการระยะแอนรวมทั้งหมดสำหรับกรณีนี้คือ

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \frac{q}{k} \\ &- \frac{q}{2m_1 m_2 k (\cos m_2 l + \cosh m_1 l)} \left\{ (m_1^2 - m_2^2) \left[\sin m_2 x \sinh m_1 (l - x) \right. \right. \\ &+ \left. \left. \sin m_2 (l - x) \sinh m_1 x \right] + 2m_1 m_2 \left[\cos m_2 x \cosh m_1 (l - x) + \cos m_2 (l - x) \cosh m_1 x \right] \right\} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \dots\dots\dots(2.55) \end{aligned}$$

ข. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 = 0$

$$y = y_0 + \frac{q}{8k \cos^2 \frac{pl}{2\sqrt{2}}} \left\{ 4 + 4 \cos \frac{pl}{\sqrt{2}} - 4 \cos \frac{p(l-x)}{\sqrt{2}} - 4 \cos \frac{px}{\sqrt{2}} \right. \\ \left. + \sqrt{2} p \left[x \sin \frac{p(l-x)}{\sqrt{2}} + (l-x) \sin \frac{px}{\sqrt{2}} \right] \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \dots\dots\dots(2.56)$$

ค. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 > 0$

สมการระยะแ่นรวมทั้งหมดสำหรับกรณีนี้คือ

$$y = y_0 + \frac{q}{(m_3^2 - m_4^2) k \sin m_3 l \sin m_4 l} \left\{ m_4^2 \sin m_4 l \left[\sin m_3(l-x) + \sin m_3 x - \sin m_3 l \right] \right. \\ \left. - m_3^2 \sin m_3 l \left[\sin m_4(l-x) + \sin m_4 x - \sin m_4 l \right] \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \dots\dots\dots(2.57)$$

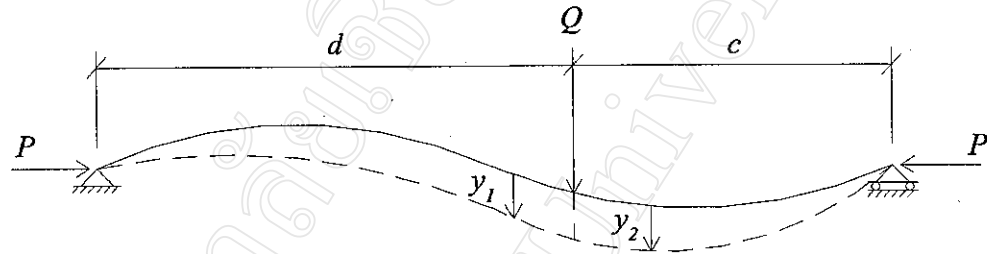
จะเห็นว่าหากสมการ (2.55) ตัดเทอม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ ออก สมการ

จะลดรูปเหลือเพียง

$$y = \frac{q}{k} - \frac{q}{2m_1 m_2 k (\cos m_2 l + \cosh m_1 l)} \left\{ (m_1^2 - m_2^2) \left[\sin m_2 x \sinh m_1(l-x) \right. \right. \\ \left. \left. + \sin m_2(l-x) \sinh m_1 x \right] + 2m_1 m_2 \left[\cos m_2 x \cosh m_1(l-x) + \cos m_2(l-x) \cosh m_1 x \right] \right\}$$

ซึ่งคล้ายกับสมการ (1.3) ต่างกันตรงที่ตัวแปร m_1 และ m_2 สลับตำแหน่งกันเท่านั้น

2.4.2 คาน-เสาที่มีความโค้งเริ่มแรกรองรับโดยฐานรากยึดหยุ่นรับน้ำหนักบรรทุกเป็นจุด
กรณีนี้ 2 นี้ จะทำการวิเคราะห์คาน-เสาลักษณะเดียวกับหัวข้อ 2.4.1 แต่เปลี่ยนจาก
รับน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ มาเป็นรับน้ำหนักบรรทุกเป็นจุด ดังแสดงในรูปที่ 2.1 (2)
รูปหน่วยย่อยของคาน-เสาสำหรับกรณีนี้ จะคล้ายดังแสดงในรูปที่ 2.2 ต่างกันเพียง
กรณีนี้ไม่มีน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ และจะแยกหาระยะแอ่นเนื่องจากการคดเป็น 2
ส่วนคือ y_1 และ y_2 ดังแสดงในรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 แสดงการแยกระยะแอ่นเนื่องจากการคด

โดยที่

y_1 คือ ระยะแอ่นเนื่องจากการคดในช่วงตั้งแต่ที่รองรับด้านซ้ายจนถึงตำแหน่งที่
น้ำหนักบรรทุกเป็นจุดกระทำบนคาน-เสา ($0 \leq x \leq d$)

y_2 คือ ระยะแอ่นเนื่องจากการคดในช่วงตั้งแต่ตำแหน่งที่น้ำหนักบรรทุกเป็นจุด
กระทำบนคาน-เสาจนถึงที่รองรับด้านขวา ($d \leq x \leq l$)

ซึ่งสมการอนุพันธ์สำหรับหาระยะแอ่นเนื่องจากการคดของคาน-เสาในกรณีนี้ ก็คล้าย
กับสมการ (2.11) แต่กำหนดให้ $q = 0$ และแยกเป็น 2 สมการ นั่นคือ

$$(D^4 + p^2 D^2 + 4\beta^4)y_1 = \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

สำหรับช่วง ($0 \leq x \leq d$)

.....(2.58)

$$(D^4 + p^2 D^2 + 4\beta^4)y_2 = \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

สำหรับช่วง ($d \leq x \leq l$)

.....(2.59)

โดยที่

p^2 แสดงในสมการ (2.12)

P_e แสดงในสมการ (2.13)

β^4 แสดงในสมการ (2.14)

D^j แสดงในสมการ (2.15)

เนื่องจากสมการ (2.58) และสมการ (2.59) คล้ายกับสมการ (2.11) ดังนั้นการแก้
ปัญหาของสมการอนุพันธ์ย่อยจะได้คำตอบที่คล้ายกัน แต่กรณีนี้ต้องกำหนดให้ $q = 0$ หัวข้อนี้
จึงจะยกคำตอบที่ได้จากหัวข้อ 2.4.1.1.3 มาประยุกต์ใช้

2.4.2.1 คำตอบทั่วไปของสมการอนุพันธ์

สมการระยะแอนเนื่องจากการคัตที่ได้มีดังนี้

ก. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 < 0$

สมการระยะแอนเนื่องจากการคัตแยกเป็น 2 ส่วนคือ

$$y_1 = (A_1 \cosh m_1 x + B_1 \sinh m_1 x) \cos m_2 x + (C_1 \cosh m_1 x + D_1 \sinh m_1 x) \sin m_2 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

สำหรับช่วง $0 \leq x \leq d$ (2.60)

$$y_2 = (A_2 \cosh m_1 x + B_2 \sinh m_1 x) \cos m_2 x + (C_2 \cosh m_1 x + D_2 \sinh m_1 x) \sin m_2 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

สำหรับช่วง $d \leq x \leq l$ (2.61)

ข. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 = 0$

สมการระยะแอนเนื่องจากการตัดแยกเป็น 2 ส่วนคือ

$$y_1 = A_1 \cos \frac{px}{\sqrt{2}} + B_1 \sin \frac{px}{\sqrt{2}} + x \left(C_1 \cos \frac{px}{\sqrt{2}} + D_1 \sin \frac{px}{\sqrt{2}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

สำหรับช่วง $0 \leq x \leq d$ (2.62)

$$y_2 = A_2 \cos \frac{px}{\sqrt{2}} + B_2 \sin \frac{px}{\sqrt{2}} + x \left(C_2 \cos \frac{px}{\sqrt{2}} + D_2 \sin \frac{px}{\sqrt{2}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

สำหรับช่วง $d \leq x \leq l$ (2.63)

ค. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 > 0$

สมการระยะแอนเนื่องจากการตัดแยกเป็น 2 ส่วนคือ

$$y_1 = A_1 \cos m_3 x + B_1 \sin m_3 x + C_1 \cos m_4 x + D_1 \sin m_4 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

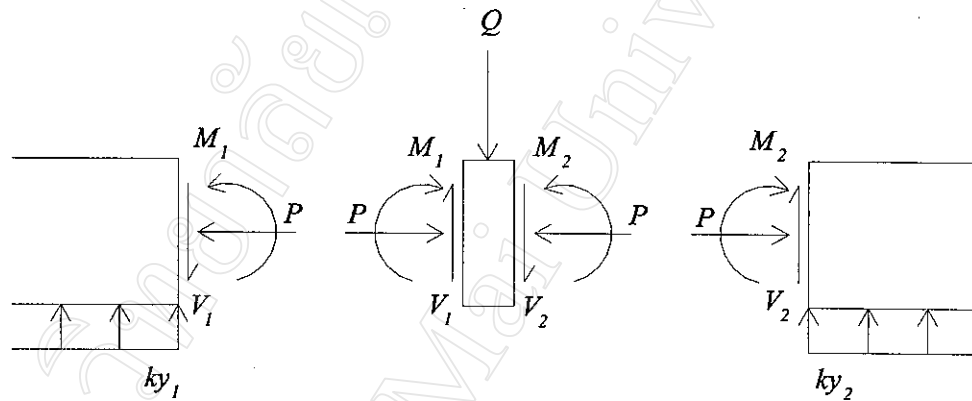
สำหรับช่วง $0 \leq x \leq d$ (2.64)

$$y_2 = A_2 \cos m_3 x + B_2 \sin m_3 x + C_2 \cos m_4 x + D_2 \sin m_4 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

สำหรับช่วง $d \leq x \leq l$ (2.65)

2.4.2.2 สภาวะขอบและสภาวะความต่อเนื่อง

ปัญหาในกรณีนี้ สภาวะขอบเหมือนกับปัญหาในหัวข้อ 2.4.1 จึงสามารถนำความสัมพันธ์ในสมการ (2.39) ถึงสมการ (2.42) มาใช้กับปัญหาในกรณีนี้ได้ โดยการนำความสัมพันธ์ของค่า x และ y ไปแทนในสมการระยะแอนที่ได้จากหัวข้อ 2.4.2.1 ทำให้ได้ระบบสมการ 4 สมการ แต่ก็ยังไม่เพียงพอสำหรับการหาสัมประสิทธิ์ค่าคงที่ซึ่งมีทั้งหมด 8 ตัว จึงต้องนำสภาวะความต่อเนื่องมาช่วยในการสร้างระบบสมการอีก 4 สมการ สภาวะความต่อเนื่องดังกล่าวก็คือ ความต่อเนื่องตรงจุดที่น้ำหนักบรรทุกเป็นจุดกระทำนั่นเอง ดังแสดงในรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 หน่วยย่อยตรงตำแหน่งที่น้ำหนักเป็นจุดกระทำ

ความต่อเนื่องตรงตำแหน่งที่น้ำหนักบรรทุกเป็นจุดกระทำนี้ ($x = d$) ได้แก่

2.4.2.2.1 ระยะแอนเนื่องจากการตัดทั้ง 2 ด้านของน้ำหนักบรรทุกเป็นจุดมีค่าเท่ากัน หรือเขียนเป็นสมการคือ

$$y_1 = y_2 \quad \dots\dots\dots(2.66)$$

2.4.2.2.2 ความลาดชันของระยะแอนเนื่องจากการตัดทั้ง 2 ด้านของน้ำหนักบรรทุกเป็นจุดมีค่าเท่ากัน หรือเขียนเป็นสมการคือ

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_2}{dx} \quad \dots\dots\dots(2.67)$$

2.4.2.2.3 โมเมนต์ดัดทั้ง 2 ด้านของน้ำหนักบรรทุกทุกเป็นจุดมีค่าเท่ากัน หรือเขียนเป็นสมการคือ

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{d^2 y_2}{dx^2} \quad \dots\dots\dots(2.68)$$

2.4.2.3.4 แรงในแนว y ต้องอยู่ในสภาพสมดุล หรือเขียนเป็นสมการคือ

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3} - \frac{d^3 y_2}{dx^3} = -\frac{Q}{EI} \quad \dots\dots\dots(2.69)$$

นำความสัมพันธ์ในสมการ (2.66) ถึงสมการ (2.69) ไปสร้างระบบสมการได้อีก 4 สมการ ทำให้มีระบบสมการทั้งหมดครบ 8 สมการ ซึ่งเพียงพอสำหรับหาสัมประสิทธิ์ค่าคงที่ และเมื่อแก้ปัญหาระบบสมการแล้ว ผลที่ได้มีดังนี้

ก. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 < 0$

สัมประสิทธิ์ค่าคงที่สำหรับกรณีนี้ได้แก่

$$A_1 = 0 \quad \dots\dots\dots(2.70)$$

$$B_1 =$$

$$\frac{Q}{2m_1 m_2 (m_1^2 + m_2^2) EI (\cos 2m_2 l - \cosh 2m_1 l)} \left\{ m_1 \left[\sin m_2 d \sinh m_1 (d - 2l) \right. \right. \\ \left. \left. - \sin m_2 (d - 2l) \sinh m_1 d \right] + m_2 \left[\cos m_2 (d - 2l) \cosh m_1 d - \cos m_2 d \cosh m_1 (d - 2l) \right] \right\} \\ \dots\dots\dots(2.71)$$

$$C_1 =$$

$$-\frac{Q}{2m_1 m_2 (m_1^2 + m_2^2) EI (\cos 2m_2 l - \cosh 2m_1 l)} \left\{ m_1 \left[\cos m_2 (d - 2l) \cosh m_1 d \right. \right. \\ \left. \left. - \cos m_2 d \cosh m_1 (d - 2l) \right] + m_2 \left[\sin m_2 (d - 2l) \sinh m_1 d - \sin m_2 d \sinh m_1 (d - 2l) \right] \right\} \\ \dots\dots\dots(2.72)$$

$$D_1 = 0 \quad \dots\dots\dots(2.73)$$

$$A_2 = \frac{Q}{2m_1m_2(m_1^2 + m_2^2)EI} \left(-m_1 \sin m_2 d \cosh m_1 d + m_2 \cos m_2 d \sinh m_1 d \right) \quad \dots\dots\dots(2.74)$$

$$B_2 = \frac{Q}{2m_1m_2(m_1^2 + m_2^2)EI} \left\{ m_1 \left[\cos m_2 d \sinh m_1 d \sin 2m_2 l - \sin m_2 d \cosh m_1 d \sinh 2m_1 l \right] + m_2 \left[\cos m_2 d \sinh m_1 d \sinh 2m_1 l + \sin m_2 d \cosh m_1 d \sin 2m_2 l \right] \right\} \quad \dots\dots\dots(2.75)$$

$$C_2 = -\frac{Q}{2m_1m_2(m_1^2 + m_2^2)EI} \left\{ m_1 \left[\sin m_2 d \cosh m_1 d \sin 2m_2 l + \cos m_2 d \sinh m_1 d \sinh 2m_1 l \right] + m_2 \left[\sin m_2 d \cosh m_1 d \sinh 2m_1 l - \cos m_2 d \sinh m_1 d \sin 2m_2 l \right] \right\} \quad \dots\dots\dots(2.76)$$

$$D_2 = -\frac{Q}{2m_1m_2(m_1^2 + m_2^2)EI} \left(m_1 \cos m_2 d \sinh m_1 d + m_2 \sin m_2 d \cosh m_1 d \right) \quad \dots\dots\dots(2.77)$$

ข. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 = 0$

สัมประสิทธิ์ค่าคงที่สำหรับกรณีนี้ได้แก่

$$A_1 = 0 \quad \dots\dots\dots(2.78)$$

$$B_1 = -\frac{Q}{2p^3 EI \sin^2 \frac{pl}{\sqrt{2}}} \left\{ \sqrt{2} \cos \frac{pd}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \cos \left[\frac{p}{\sqrt{2}} (d - 2l) \right] + p(d - 2l) \sin \frac{pd}{\sqrt{2}} - pd \sin \left[\frac{p}{\sqrt{2}} (d - 2l) \right] \right\} \quad \dots\dots\dots(2.79)$$

$$C_1 = -\frac{Q \sin \left[\frac{p}{\sqrt{2}}(d-l) \right]}{p^2 EI \sin \frac{pl}{\sqrt{2}}} \quad \dots\dots\dots(2.80)$$

$$D_1 = 0 \quad \dots\dots\dots(2.81)$$

$$A_2 = \frac{Q \left(pd \cos \frac{pd}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \sin \frac{pd}{\sqrt{2}} \right)}{p^3 EI} \quad \dots\dots\dots(2.82)$$

$$B_2 = \frac{Q}{p^3 EI \sin^2 \frac{pl}{\sqrt{2}}} \left[\left(\sqrt{2} \sin \frac{pd}{\sqrt{2}} - pd \cos \frac{pd}{\sqrt{2}} \right) \sin \frac{pl}{\sqrt{2}} \cos \frac{pl}{\sqrt{2}} + pl \sin \frac{pd}{\sqrt{2}} \right] \quad \dots\dots\dots(2.83)$$

$$C_2 = -\frac{Q \sin \frac{pd}{\sqrt{2}} \cos \frac{pl}{\sqrt{2}}}{p^2 EI \sin \frac{pl}{\sqrt{2}}} \quad \dots\dots\dots(2.84)$$

$$D_2 = -\frac{Q \sin \frac{pd}{\sqrt{2}}}{p^2 EI} \quad \dots\dots\dots(2.85)$$

ค. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 > 0$

สัมประสิทธิ์ค่าคงที่สำหรับกรณีนี้ได้แก่

$$A_1 = 0 \quad \dots\dots\dots(2.86)$$

$$B_1 = \frac{Q \sin m_3 d (\cot m_3 d - \cot m_3 l)}{m_3 (m_3^2 - m_4^2) EI} \quad \dots\dots\dots(2.87)$$

$$C_1 = 0 \quad \dots\dots\dots(2.88)$$

$$D_1 = -\frac{Q \sin m_4 d (\cot m_4 d - \cot m_4 l)}{m_4 (m_3^2 - m_4^2) EI} \quad \dots\dots\dots(2.89)$$

$$A_2 = \frac{Q \sin m_3 d}{m_3 (m_3^2 - m_4^2) EI} \quad \dots\dots\dots(2.90)$$

$$B_2 = -\frac{Q \sin m_3 d \cot m_3 l}{m_3 (m_3^2 - m_4^2) EI} \quad \dots\dots\dots(2.91)$$

$$C_2 = -\frac{Q \sin m_4 d}{m_4 (m_3^2 - m_4^2) EI} \quad \dots\dots\dots(2.92)$$

$$D_2 = \frac{Q \sin m_4 d \cot m_4 l}{m_4 (m_3^2 - m_4^2) EI} \quad \dots\dots\dots(2.93)$$

2.4.2.3 คำตอบของปัญหา

นำสัมประสิทธิ์ค่าคงที่ A_j, B_j, C_j และ D_j ที่ได้จากหัวข้อ 2.4.2.2 ไปแทนในสมการ (2.60) ถึงสมการ (2.65) ตามกรณีของตอนแล้วจัดรูปสมการใหม่ ทำให้ได้คำตอบดังนี้

ก. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 < 0$

สมการระยะแอนรวมทั้งหมดสำหรับกรณีนี้ได้แก่

$$y = y_0 + \frac{Q}{4m_1 m_2 (m_1^2 + m_2^2) EI (\cos 2m_2 l - \cosh 2m_1 l)} \left\{ m_1 \left[\sin m_2 (d+x) \cosh m_1 (d-2l+x) + \sin m_2 (d-2l-x) \cosh m_1 (d-x) - \sin m_2 (d-x) \cosh m_1 (d-2l-x) - \sin m_2 (d-2l+x) \cosh m_1 (d+x) \right] + m_2 \left[\cos m_2 (d-x) \sinh m_1 (d-2l-x) + \cos m_2 (d-2l+x) \sinh m_1 (d+x) - \cos m_2 (d+x) \sinh m_1 (d-2l+x) - \cos m_2 (d-2l-x) \sinh m_1 (d-x) \right] \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

สำหรับช่วง $0 \leq x \leq d$ \dots\dots\dots(2.94)

$$\begin{aligned}
y &= y_0 \\
&+ \frac{Q}{4m_1 m_2 (m_1^2 + m_2^2) EI (\cos 2m_2 l - \cosh 2m_1 l)} \left\{ m_1 \left[\sin m_2 (d+x) \cosh m_1 (d-2l+x) \right. \right. \\
&+ \sin m_2 (d-x) \cosh m_1 (d+2l-x) - \sin m_2 (d-2l+x) \cosh m_1 (d+x) \\
&- \sin m_2 (d+2l-x) \cosh m_1 (d-x) \left. \right] + m_2 \left[\cos m_2 (d-2l+x) \sinh m_1 (d+x) \right. \\
&+ \cos m_2 (d+2l-x) \sinh m_1 (d-x) - \cos m_2 (d+x) \sinh m_1 (d-2l+x) \\
&- \cos m_2 (d-x) \sinh m_1 (d+2l-x) \left. \right] \left. \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}
\end{aligned}$$

.....(2.95)

สำหรับช่วง $d \leq x \leq l$

ข. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 = 0$

สมการระยะแอนรวมทั้งหมดสำหรับกรณีนี้ได้แก่

$$\begin{aligned}
y &= y_0 + \frac{Q}{4p^3 EI \sin^2 \frac{pl}{\sqrt{2}}} \left\{ p \left[(x+2l-d) \cos \left[\frac{p}{\sqrt{2}} (d-x) \right] \right. \right. \\
&+ (d-x) \cos \left[\frac{p}{\sqrt{2}} (d-2l-x) \right] + (d-2l+x) \cos \left[\frac{p}{\sqrt{2}} (d+x) \right] \\
&- (d+x) \cos \left[\frac{p}{\sqrt{2}} (d-2l+x) \right] \left. \right] + \sqrt{2} \left[\sin \left[\frac{p}{\sqrt{2}} (d-x) \right] - \sin \left[\frac{p}{\sqrt{2}} (d-2l-x) \right] \right. \\
&- \sin \left[\frac{p}{\sqrt{2}} (d+x) \right] + \sin \left[\frac{p}{\sqrt{2}} (d-2l+x) \right] \left. \right] \left. \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}
\end{aligned}$$

.....(2.96)

สำหรับช่วง $0 \leq x \leq d$

$$\begin{aligned}
y = & y_0 + \frac{Q}{4p^3 EI \sin^2 \frac{pl}{\sqrt{2}}} \left\{ p \left[(d+2l-x) \cos \left[\frac{p}{\sqrt{2}}(d-x) \right] \right. \right. \\
& - (d-x) \cos \left[\frac{p}{\sqrt{2}}(d+2l-x) \right] + (d-2l+x) \cos \left[\frac{p}{\sqrt{2}}(d+x) \right] \\
& \left. - (d+x) \cos \left[\frac{p}{\sqrt{2}}(d-2l+x) \right] \right] - \sqrt{2} \left[\sin \left[\frac{p}{\sqrt{2}}(d-x) \right] + \sin \left[\frac{p}{\sqrt{2}}(d+2l-x) \right] \right. \\
& \left. - \sin \left[\frac{p}{\sqrt{2}}(d+x) \right] + \sin \left[\frac{p}{\sqrt{2}}(d-2l+x) \right] \right] \left. \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}
\end{aligned}$$

.....(2.97)

ค. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 > 0$

สมการระยะแอ่นรวมทั้งหมดสำหรับกรณีนี้ได้แก่

$$\begin{aligned}
y = & y_0 \\
& + \frac{Q}{m_3 m_4 (m_3^2 - m_4^2) EI \sin m_3 l \sin m_4 l} \left[m_4 \sin m_4 l \sin m_3 c \sin m_3 x - m_3 \sin m_3 l \sin m_4 c \sin m_4 x \right] \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}
\end{aligned}$$

.....(2.98)

$$\begin{aligned}
y = & y_0 \\
& + \frac{Q}{m_3 m_4 (m_3^2 - m_4^2) EI \sin m_3 l \sin m_4 l} \left[m_4 \sin m_4 l \sin m_3 d \sin m_3 (l-x) \right. \\
& \left. - m_3 \sin m_3 l \sin m_4 d \sin m_4 (l-x) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}
\end{aligned}$$

.....(2.99)

2.4.3 คาน-เสาที่มีความโค้งเริ่มแรกรองรับโดยฐานรากยึดหยุ่นรับโมเมนต์คด ณ ที่รองรับทั้ง 2 ด้าน

กรณีสุดท้ายนี้ จะทำการวิเคราะห์คาน-เสาลักษณะเดียวกับหัวข้อ 2.4.1 แต่เปลี่ยนจากรับน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ มาเป็นรับโมเมนต์คด ณ ที่รองรับทั้ง 2 ด้าน ดังแสดงในรูปที่ 2.1 (3)

รูปหน่วยย่อยของคาน-เสาสำหรับกรณีนี้ คล้ายดังแสดงในรูปที่ 2.2 ต่างกันเพียงกรณีนี้ไม่มีน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ ทำให้ได้สมการอนุพันธ์สำหรับหาระยะแอ่นเนื่องจากการคดของคาน-เสาคล้ายกับสมการ (2.11) นั่นคือ

$$(D^4 + p^2 D^2 + 4\beta^4)y_1 = \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \dots\dots\dots(2.100)$$

โดยที่

p^2 แสดงในสมการ (2.12)

P_e แสดงในสมการ (2.13)

β^4 แสดงในสมการ (2.14)

D^4 แสดงในสมการ (2.15)

เช่นเดียวกับหัวข้อ 2.4.2 นั่นคือสมการ (2.100) คล้ายกับสมการ (2.11) ดังนั้นจึงจะยกคำตอบที่ได้จากหัวข้อ 2.4.1.1.3 มาประยุกต์ใช้ โดยกำหนดให้ $q = 0$

2.4.3.1 คำตอบทั่วไปของสมการอนุพันธ์

สมการระยะแอ่นเนื่องจากการคดที่ได้มีดังนี้

ก. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 < 0$

สมการระยะแอ่นเนื่องจากการคดสำหรับกรณีนี้คือ

$$y_1 = (A \cosh m_1 x + B \sinh m_1 x) \cos m_2 x + (C \cosh m_1 x + D \sinh m_1 x) \sin m_2 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \dots\dots\dots(2.101)$$

ข. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 = 0$

สมการระยะแอนเนื่องจากการค้ำสำหรับกรณีนี้คือ

$$y_1 = A \cos \frac{px}{\sqrt{2}} + B \sin \frac{px}{\sqrt{2}} + x \left(C \cos \frac{px}{\sqrt{2}} + D \sin \frac{px}{\sqrt{2}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \dots\dots\dots(2.102)$$

ค. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 > 0$

สมการระยะแอนเนื่องจากการค้ำสำหรับกรณีนี้คือ

$$y_1 = A \cos m_3 x + B \sin m_3 x + C \cos m_4 x + D \sin m_4 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \dots\dots\dots(2.103)$$

2.4.3.2 สภาวะขอบ

ปัญหาที่นำมาวิจัยในกรณีนี้ ที่รองรับทั้ง 2 ด้านเป็นแบบยึดหมุน ระยะแอน ณ ที่รองรับจึงมีค่าเป็นศูนย์ แต่ที่รองรับทั้ง 2 ด้านมีโมเมนต์ค้ำกระทำอยู่ ดังนั้นโมเมนต์ค้ำ ณ ที่รองรับจึงต้องเท่ากับโมเมนต์ค้ำที่กระทำ ณ จุดนั้น หรือเขียนในรูปสมการได้เป็น

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \dots\dots\dots(2.104)$$

$$x = l, \quad y = 0 \quad \dots\dots\dots(2.105)$$

$$x = 0, \quad \frac{d^2 y_1}{dx^2} = -\frac{M_a}{EI} \quad \dots\dots\dots(2.106)$$

$$x = l, \quad \frac{d^2 y_1}{dx^2} = -\frac{M_b}{EI} \quad \dots\dots\dots(2.107)$$

นำความสัมพันธ์ของค่า x และ y ในสมการ (2.104) ถึงสมการ (2.107) ไปแทนในสมการระยะแอนที่ได้จากหัวข้อ 2.4.3.1 ทำให้ได้ระบบสมการ 4 สมการที่จะใช้ในการหาสัมประสิทธิ์ค่าคงที่ และเมื่อแก้ปัญหาระบบสมการเรียบร้อยแล้ว ผลที่ได้มีดังนี้

ก. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 < 0$

สัมประสิทธิ์ค่าคงที่สำหรับกรณีนี้ได้แก่

$$A = 0 \quad \dots\dots\dots(2.108)$$

$$B = \frac{(M_b \cosh m_1 l - M_a \cos m_2 l) \sin m_2 l}{2m_1 m_2 EI (\cosh^2 m_1 l - \cos^2 m_2 l)} \quad \dots\dots\dots(2.109)$$

$$C = \frac{(M_a \cosh m_1 l - M_b \cos m_2 l) \sinh m_1 l}{2m_1 m_2 EI (\cosh^2 m_1 l - \cos^2 m_2 l)} \quad \dots\dots\dots(2.110)$$

$$D = -\frac{M_a}{2m_1 m_2 EI} \quad \dots\dots\dots(2.111)$$

ข. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 = 0$

สัมประสิทธิ์ค่าคงที่สำหรับกรณีนี้ได้แก่

$$A = 0 \quad \dots\dots\dots(2.112)$$

$$B = \frac{\left(M_a - M_b \cos \frac{pl}{\sqrt{2}}\right) l}{\sqrt{2} p EI \sin^2 \frac{pl}{\sqrt{2}}} \quad \dots\dots\dots(2.113)$$

$$C = -\frac{M_a \cos \frac{pl}{\sqrt{2}} - M_b}{\sqrt{2} p EI \sin \frac{pl}{\sqrt{2}}} \quad \dots\dots\dots(2.114)$$

$$D = -\frac{M_a}{\sqrt{2} p EI} \quad \dots\dots\dots(2.115)$$

ค. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 > 0$

สัมประสิทธิ์ค่าคงที่สำหรับกรณีนี้ได้แก่

$$A = \frac{M_a}{(m_3^2 - m_4^2) EI} \quad \dots\dots\dots(2.116)$$

$$B = \frac{M_b - M_a \cos m_3 l}{(m_3^2 - m_4^2) EI \sin m_3 l} \quad \dots\dots\dots(2.117)$$

$$C = -\frac{M_a}{(m_3^2 - m_4^2)EI} \dots\dots\dots(2.118)$$

$$D = \frac{M_a \cos m_4 l - M_b}{(m_3^2 - m_4^2)EI \sin m_4 l} \dots\dots\dots(2.119)$$

2.4.3.3 คำตอบของปัญหา

นำสัมประสิทธิ์ค่าคงที่ A, B, C และ D ที่ได้จากหัวข้อ 2.4.3.2 ไปแทนในสมการ (2.101) ถึงสมการ (2.103) ตามกรณีของตนแล้วจัดรูปสมการใหม่ ทำให้ได้สมการระยะแอ่นรวมทั้งหมดของคาน-เสา ดังนี้

ก. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 < 0$

สมการระยะแอ่นรวมทั้งหมดสำหรับกรณีนี้คือ

$$y = y_0 + \frac{l}{2m_1 m_2 EI (\cosh^2 m_1 l - \cos^2 m_2 l)} \left\{ M_a \left[\cosh m_1 l \sin m_2 x \sinh m_1 (l-x) - \cos m_2 l \sin m_2 (l-x) \sinh m_1 x \right] + M_b \left[\sin m_2 l \cosh m_1 l \cos m_2 x \sinh m_1 x - \cos m_2 l \sinh m_1 l \sin m_2 x \cosh m_1 x \right] \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \dots\dots\dots(2.120)$$

ข. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 = 0$

สมการระยะแอ่นรวมทั้งหมดสำหรับกรณีนี้คือ

$$y = y_0 - \frac{l}{\sqrt{2} p EI \sin^2 \frac{pl}{\sqrt{2}}} \left\{ M_a \left[x \cos \frac{px}{\sqrt{2}} \cos \frac{pl}{\sqrt{2}} \sin \frac{pl}{\sqrt{2}} + \left(x \sin^2 \frac{pl}{\sqrt{2}} - l \right) \sin \frac{px}{\sqrt{2}} \right] + M_b \left[l \cos \frac{pl}{\sqrt{2}} \sin \frac{px}{\sqrt{2}} - x \cos \frac{px}{\sqrt{2}} \sin \frac{pl}{\sqrt{2}} \right] \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \dots\dots\dots(2.121)$$

ก. เมื่อ $p^4 - 16\beta^4 > 0$

สมการระยะแอนรวมทั้งหมดสำหรับกรณีนี้คือ

$$y = y_0 + \frac{l}{(m_3^2 - m_4^2)EI \sin m_3 l \sin m_4 l} \left\{ M_a \left[\sin m_4 l \sin m_3 (l-x) - \sin m_3 l \sin m_4 (l-x) \right] + M_b \left[\sin m_4 l \sin m_3 x - \sin m_3 l \sin m_4 x \right] \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \dots\dots\dots(2.122)$$

จะเห็นว่าหากสมการ (2.120) ตัดเทอม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ ออก แล้ว

กำหนดให้ M_a และ M_b มีค่าเท่ากัน ($M_a = M_b = M_0$) สมการจะลดรูปเหลือเพียง

$$y = \frac{M_0}{2m_1 m_2 EI} \left[\frac{\sin m_2 x \sinh m_1 (l-x) + \sin m_1 (l-x) \sinh m_2 x}{\cos m_2 l + \cosh m_1 l} \right]$$

ซึ่งคล้ายกับสมการ (1.9) ต่างกันตรงที่ตัวแปร m_1 และ m_2 สลับตำแหน่งกันเท่านั้น

สมการระยะแอนที่ได้ ดังแสดงในหัวข้อ 2.4.1.3 , หัวข้อ 2.4.2.3 และหัวข้อ 2.4.3.3 สามารถนำไปแปลงเป็นสมการแรงเฉือนและสมการโมเมนต์คัตได้โดยอาศัยสมการ (2.8) และสมการ (2.3) ตามลำดับ ซึ่งจะเห็นว่าสมการระยะแอนที่ได้ มีเทอมที่เกิดจากการมีความโค้งเริ่ม

แรก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ อยู่ด้วยทุกสมการ ทำให้สามารถแยกเทอมนี้ออกมาต่าง

หากได้ จึงง่ายต่อการแสดงและวิเคราะห์ผลกระทบของการมีความโค้งเริ่มแรกที่มีต่อการเปลี่ยนแปลงแรงเฉือนและโมเมนต์คัตภายในคาน-เสา ดังจะได้แสดงในบทต่อไป