

บทที่ 1

บทนำ

1.1 บทนำและที่มาของปัญหา

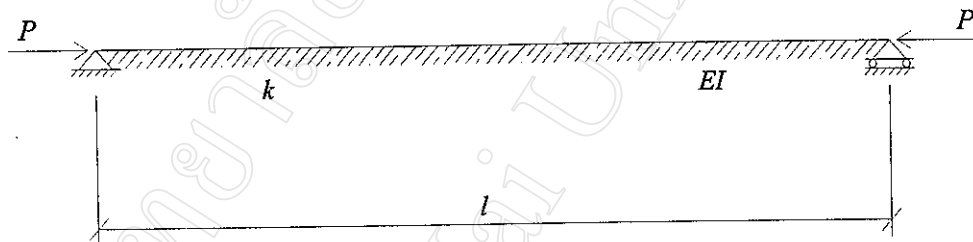
ตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบัน วัสดุที่ใช้ในงานวิศวกรรมโยธามิใช่ว่าจะมีความสมบูรณ์แบบที่ตั้งสมมุติฐานไว้ ความไม่สมบูรณ์แบบดังกล่าวเช่น ความไม่สม่ำเสมอของเนื้อวัสดุ (Nonhomogeneous) , ความไม่สม่ำเสมอของหน้าตัด (Nonuniform Cross Section) หรือการมีความโค้งเริ่มแรก (Initial Curvature) เป็นต้น ซึ่งแม้กระทั่งเหล็กรูปพรรณที่หล่อออกมาจากโรงงานก็ยังคงมีความโค้งเริ่มแรก หรืออย่างองค์อาคารคอนกรีตเสริมเหล็ก หรือคอนกรีตอัดแรงซึ่งนิยมใช้ในประเศไทยนั้น โดยทั่วไปการหล่อขึ้นส่วนในระหว่างการก่อสร้างจะไม่ได้ขึ้นส่วนที่เที่ยงตรงเหมือนในแบบแปลน อาจจะเพราะแบบที่ใช้หล่อบิดเบี้ยว หรือระหว่างการเทคอนกรีตอาจจะเกิดการเสียรูปทรงของแบบหล่ออันเนื่องมาจากน้ำหนักคอนกรีตที่เทลงไป ความไม่เที่ยงตรงของขึ้นส่วนโครงสร้างที่เกิดขึ้นอาจจะเป็นในลักษณะความไม่สม่ำเสมอของหน้าตัด หรือในลักษณะที่ทำให้ขึ้นส่วนของโครงสร้างมีความโค้งเริ่มแรก ซึ่งความไม่เที่ยงตรงหรือความไม่สมบูรณ์แบบนี้จะส่งผลกระทบต่อความสามารถในการรับน้ำหนักขององค์อาคารนั้นๆ และหากเป็นขึ้นส่วนของโครงสร้างที่ต้องสัมผัสกับพื้นดิน เช่น พื้น - คานที่วางบนดิน หรือคาน-เสาชั้นใต้ดินของอาคาร เป็นต้น ทำให้มีปัจจัยอิทธิพลของดินเข้ามาเกี่ยวข้องเพิ่มขึ้นอีก ซึ่งดินในแต่ละสถานที่ก็มีคุณสมบัติที่ต่างกัน ส่งผลให้องค์อาคารดังกล่าวมีพฤติกรรมที่แตกต่างกันไป

สำหรับโครงสร้างขององค์อาคารนั้น คาน-เสาถือเป็นขึ้นส่วนที่สำคัญ การวิเคราะห์คาน-เสาจึงยังเป็นปัญหาที่ได้รับความสนใจในวงการการศึกษาของนักวิจัยทั่วโลก ซึ่งการมีความโค้งเริ่มแรกของคาน-เสานั้น เป็นปัจจัยสำคัญที่จะต้องนำมาพิจารณา และหากคาน-เสานั้นสัมผัสกับพื้นดิน ผลกระทบของความโค้งเริ่มแรกก็จะแตกต่างกับเมื่อมิได้สัมผัสกับพื้นดิน ดังนั้นในการวิเคราะห์และออกแบบขององค์อาคารดังกล่าว จึงจำเป็นต้องเข้าใจพฤติกรรมให้ใกล้เคียงความเป็นจริงมากที่สุด

1.2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

1.2.1 การโก่งเคาะของเสารองรับโดยฐานรากยืดหยุ่น (Buckling of a Bar on an Elastic Foundation)

Timoshenko (1963) ได้วิเคราะห์เสาช่วงเดียว (Single Span) ที่มีความยาว l มีโมดูลัสยืดหยุ่น E มีโมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัด I วางอยู่บนฐานรากยืดหยุ่นที่มีโมดูลัส k รับแรงอัดในแนวแกน P ดังแสดงในรูปที่ 1.1 โดยกำหนดให้ฐานรากยืดหยุ่นเป็น Winkler Foundation กล่าวคือ แรงปฏิกิริยาของฐานรากยืดหยุ่นที่กระทำต่อจุดใดๆ บนเสาเป็นสัดส่วนโดยตรงกับระยะแฉ่นของเสาที่จุดนั้นๆ



รูปที่ 1.1 เสารองรับโดยฐานรากยืดหยุ่น

ผลการวิเคราะห์สามารถหาแรงอัดวิกฤตได้ คือ

$$P_{cr} = P_e \left(m^2 + \frac{kl^4}{m^2 \pi^4 EI} \right) \quad \dots\dots\dots(1.1)$$

โดยที่

P_{cr} คือ แรงอัดวิกฤต

P_e คือ แรงโก่งเคาะของ Euler

$$= EI \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \quad \dots\dots\dots(1.2)$$

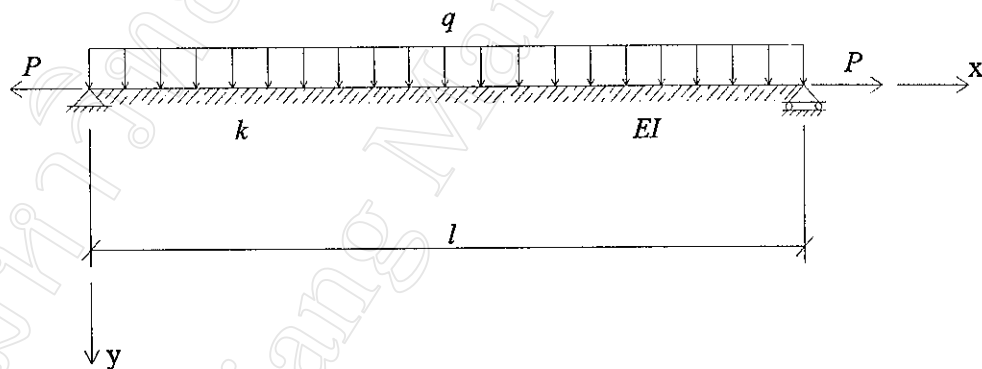
m คือ จำนวนของครึ่งคลื่นชาชน์

$$= 1, 2, 3, \dots$$

สมการ (1.1) นี้ จะเป็นสมการพื้นฐานในการหาแรงโก่งเคาะของคาน-เสารองรับโดยฐานรากยืดหยุ่นในงานวิจัยนี้ เมื่อพิจารณารูปสมการจะเห็นได้ว่าการโก่งเคาะจะเกิดเป็นรูปที่มีจำนวนครึ่งคลื่นขายน์ (m) เท่าใดก็ได้ที่ให้ค่าแรงอัดวิกฤตต่ำสุด ซึ่งขึ้นอยู่กับตัวแปรต่างๆในสมการ

1.2.2 คานรองรับโดยฐานรากยืดหยุ่นรับน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอร่วมกับแรงดึงในแนวแกน (Beams on Elastic Foundation under Simultaneous Axial Tension and Uniformly Distributed Load)

Hetenyi (1976) ได้วิเคราะห์คานช่วงเดียวที่มีความยาว l มีโมดูลัสยืดหยุ่น E มีโมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัด I วางอยู่บนฐานรากยืดหยุ่นที่มีโมดูลัส k รับแรงดึงในแนวแกน P ร่วมกับน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ q ตลอดความยาวคาน และตั้งจุดกำเนิด (Origin) แกน $x - y$ ไว้ที่ที่รองรับด้านซ้าย ดังแสดงในรูปที่ 1.2 โดยกำหนดให้ฐานรากยืดหยุ่นเป็น Winkler Foundation



รูปที่ 1.2 คานรองรับโดยฐานรากยืดหยุ่นรับน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอร่วมกับแรงดึงในแนวแกน

ผลการวิเคราะห์ได้สมการระยะแอน คือ

$$y = \frac{q}{k} \left\{ 1 - \frac{l}{2m_1 m_2 (\cos m_1 l + \cosh m_2 l)} \left[2m_1 m_2 \left(\cosh m_2 l \cos m_1 (l-x) + \cos m_1 x \cosh m_2 (l-x) \right) + (m_2^2 - m_1^2) \left(\sinh m_2 x \sin m_1 (l-x) + \sin m_1 x \sinh m_2 (l-x) \right) \right] \right\} \quad \text{.....(1.3)}$$

โดยที่

y คือ ระยะแอนของคาน

x คือ ระยะตามความยาวคาน

$$m_1 = \sqrt{\beta^2 - \frac{p^2}{4}} \quad \text{.....(1.4)}$$

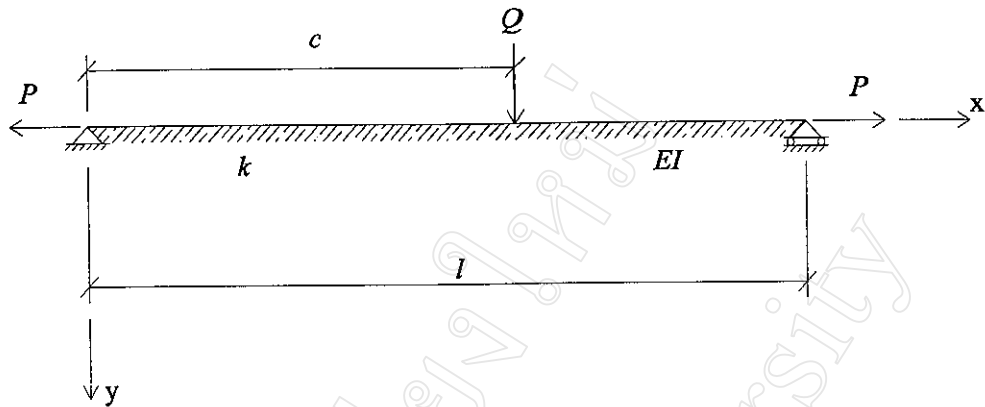
$$m_2 = \sqrt{\beta^2 + \frac{p^2}{4}} \quad \text{.....(1.5)}$$

$$p = \sqrt{\frac{P}{EI}} = \left(\frac{\pi}{l} \right) \sqrt{\frac{P}{P_e}} \quad \text{.....(1.6)}$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \quad \text{.....(1.7)}$$

1.2.3 คานรองรับโดยฐานรากยืดหยุ่นรับน้ำหนักบรรทุกเป็นจุดร่วมกับแรงดึงในแนวแกน (Beams on Elastic Foundation under Simultaneous Axial Tension and Concentrated Load)

Hetenyi (1976) ได้วิเคราะห์คานช่วงเดียวที่มีความยาว l มีโมดูลัสยืดหยุ่น E มีโมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัด I วางอยู่บนฐานรากยืดหยุ่นที่มีโมดูลัส k รับแรงดึงในแนวแกน P ร่วมกับน้ำหนักบรรทุกเป็นจุด Q ซึ่งกระทำบนคานห่างจากที่รองรับด้านซ้ายเป็นระยะ c และตั้งจุดกำเนิดแกน $x-y$ ไว้ที่ที่รองรับด้านซ้าย ดังแสดงในรูปที่ 1.3 โดยพิจารณาฐานรากยืดหยุ่นเป็น Winkler Foundation



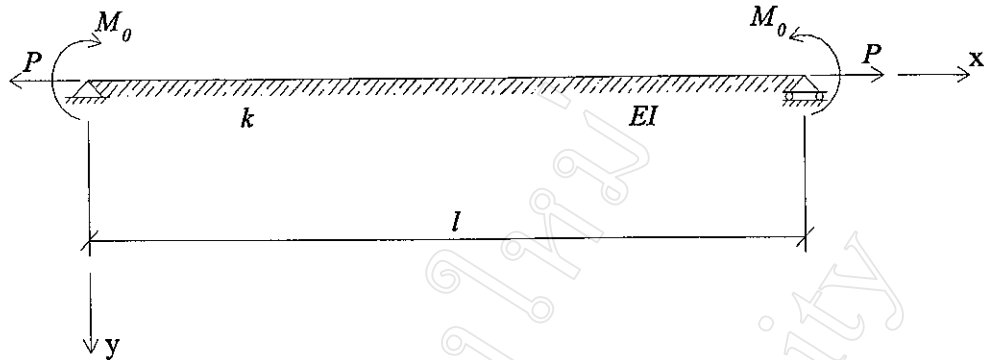
รูปที่ 1.3 คานรองรับโดยฐานรากยืดหยุ่นรับน้ำหนักบรรทุกเป็นจุดร่วมกับแรงดึงในแนวแกน

ผลการวิเคราะห์ได้สมการระยะแอ่น คือ

$$y = 2Ql^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}}{(n\pi)^4 EI + (n\pi)^2 P + kl^4} \quad \dots\dots\dots(1.8)$$

1.2.4 คานรองรับโดยฐานรากยืดหยุ่นรับโมเมนต์คัต ณ ที่รองรับทั้ง 2 ด้านร่วมกับแรงดึงในแนวแกน (Beams on Elastic Foundation under Simultaneous Axial Tension and Equal Concentrated End Moments)

Hetenyi (1976) ได้วิเคราะห์คานช่วงเดียวที่มีความยาว l มีโมดูลัสยืดหยุ่น E มีโมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัด I วางอยู่บนฐานรากยืดหยุ่นที่มีโมดูลัส k รับแรงดึงในแนวแกน P ร่วมกับโมเมนต์คัต M_0 ณ ที่รองรับทั้ง 2 ด้าน และตั้งจุดกำเนิดแกน $x - y$ ไว้ที่ที่รองรับด้านซ้าย ดังแสดงในรูปที่ 1.4 โดยพิจารณาฐานรากยืดหยุ่นเป็น Winkler Foundation



รูปที่ 1.4 คานรองรับโดยฐานรากยึดหยุ่นรับโมเมนต์คด ณ ที่รองรับทั้ง 2 ด้านร่วมกับแรงคดในแนวแกน

ผลการวิเคราะห์ได้สมการระยะแอ่น คือ

$$y = \frac{M_0}{2m_1 m_2 EI} \left[\frac{\sinh m_2 (l-x) \sin m_1 x + \sinh m_2 x \sin m_1 (l-x)}{\cos m_1 l + \cosh m_2 l} \right] \quad \dots\dots\dots(1.9)$$

โดยที่

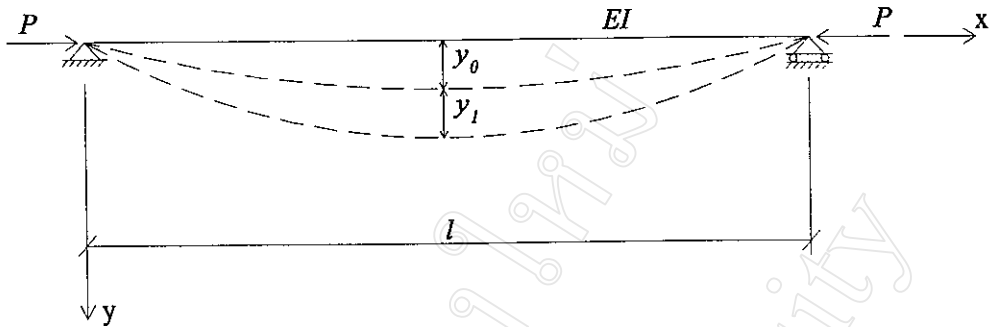
m_1 แสดงในสมการ (1.4)

m_2 แสดงในสมการ (1.5)

1.2.5 ผลกระทบของความโค้งเริ่มแรกที่มีต่อเสา (The Effect of Initial Curvature on Deflections)

โดยทั่วไป ความโค้งเริ่มแรกไม่มีผลกระทบต่อการคดของคานที่รับเฉพาะน้ำหนักบรรทุก แต่สำหรับคาน-เสาซึ่งมีแรงอัดในแนวแกนกระทำร่วมกับน้ำหนักบรรทุกนั้น การคดที่เกิดจากแรงอัดนี้จะมีปฏิสัมพันธ์กับความโค้งเริ่มแรก ดังนั้นในการวิเคราะห์คาน-เสาจึงต้องนำผลกระทบของการมีความโค้งเริ่มแรกมาพิจารณาด้วย

Timoshenko (1963) ได้วิเคราะห์เสาช่วงเดียวที่มีความโค้งเริ่มแรก เสามีความยาว l มีโมดูลัสยืดหยุ่น E มีโมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัด I รับแรงอัดในแนวแกน P และตั้งจุดกำเนิดแกน $x-y$ ไว้ที่ที่รองรับด้านซ้ายดังแสดงในรูปที่ 1.5 โดยกำหนดให้ความโค้งเริ่มแรกเป็นฟังก์ชันครึ่งคลื่นไซน์ คือ



รูปที่ 1.5 เสาที่มีความโค้งเริ่มแรก

$$y_0 = a \sin \frac{\pi x}{l} \quad \dots\dots\dots(1.10)$$

โดยที่

y_0 คือ ระยะแอ่นเนื่องจากความโค้งเริ่มแรก

a คือ สัมประสิทธิ์ระยะแอ่นเริ่มแรกมากที่สุดที่กึ่งกลางคาน-เสา

ดังนั้น โมเมนต์ดัดที่หน้าตัดใดๆ ภายในเสาจะมีค่าเป็น

$$M = Py = P(y_0 + y_1) \quad \dots\dots\dots(1.11)$$

โดยที่

y คือ ผลรวมของระยะแอ่นเนื่องจากความโค้งเริ่มแรก กับ ระยะแอ่น

เนื่องจากการดัด

$$= y_0 + y_1$$

y_1 คือ ระยะแอ่นเนื่องจากการดัด

สามารถสร้างสมการอนุพันธ์ได้เป็น

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + p^2 y_1 = -p^2 a \sin \frac{\pi x}{l} \quad \dots\dots\dots(1.12)$$

คำตอบทั่วไป (General Solution) ของสมการ (1.12) อยู่ในรูป

$$y_1 = A \sin px + B \cos px + \frac{\alpha}{l - \alpha} a \sin \frac{\pi x}{l} \quad \dots\dots\dots(1.13)$$

โดยที่

A และ B คือ สัมประสิทธิ์ค่าคงที่

p แสดงในสมการ (1.6)

$$\alpha = \frac{P}{P_e} = \left(\frac{pl}{\pi} \right)^2 \quad \dots\dots\dots(1.14)$$

P_e แสดงในสมการ (1.2)

นำสมการ (1.13) มาแทนสถานะขอบ (ที่ $x = 0$ และ $x = l, y_1 = 0$) เพื่อหาสัมประสิทธิ์ค่าคงที่ ซึ่งในที่สุดจะได้สมการระยะแอนเนื่องจากการคัต คือ

$$y_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha} a \sin \frac{\pi x}{l} \quad \dots\dots\dots(1.15)$$

และจะได้ระยะแอนรวมทั้งหมด คือ

$$y = y_0 + y_1 = \frac{y_0}{1-\alpha} \quad \dots\dots\dots(1.16)$$

เมื่อพิจารณาสมการ (1.16) จะเห็นได้ว่าระยะแอนรวมทั้งหมดอยู่ในรูปที่ระยะแอนเริ่มแรกกับแรงอัดในแนวแกนมีปฏิสัมพันธ์กัน โดยแรงอัดในแนวแกนจะมีผลช่วยเพิ่มระยะแอนของเสาด้วยขนาด $\frac{1}{1-\alpha}$ และหากแรงอัดในแนวแกน P เพิ่มขึ้นเรื่อยๆจนเข้าใกล้ค่าแรงอัดวิกฤต

ระยะแอนของเสาจะเพิ่มขึ้นจนไม่สามารถหาค่าได้

หากเรากำหนดให้ความโค้งเริ่มแรกอยู่ในรูปอนุกรมของฟังก์ชันซายน์ คือ

$$y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \dots\dots\dots(1.17)$$

และดำเนินการแก้ปัญหาวัดเดียวกับที่แสดงในสมการ (1.11) ถึง (1.15) สมการระยะแอนเนื่องจากการคัตที่ได้จะอยู่ในรูป

$$y_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 - \alpha} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \dots\dots\dots(1.18)$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าหากนำเฉพาะเทอมแรกของอนุกรมในสมการ (1.18) มาพิจารณา คำตอบที่ได้ก็จะเหมือนในสมการ (1.15)

1.2.6 The Reciprocal Theorem

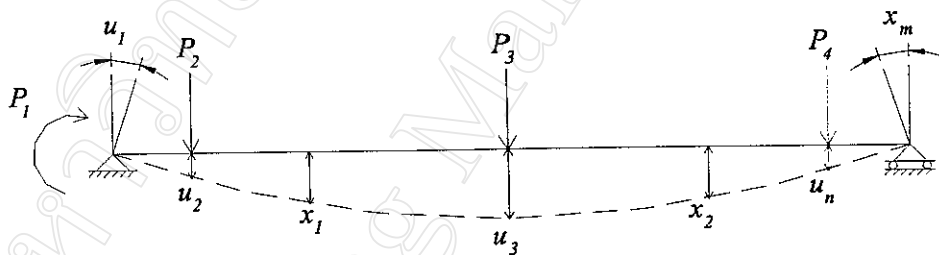
The reciprocal theorem ได้ถูกคิดค้นขึ้นโดย Clerk Maxwell ในปี ค.ศ. 1864 , โดย Otto Mohr ในปี ค.ศ. 1874 และในปี ค.ศ. 1876 Betti ได้แสดงการวิเคราะห์คาน 2 ระบบ ดังแสดงในรูปที่ 1.6 กล่าวคือ

ระบบที่ 1 มีแรง P_j กระทำบนคาน โดยกำหนดให้ระยะเปลี่ยนตำแหน่งตรงจุดที่แรง P_j กระทำเป็น u_j และให้ระยะเปลี่ยนตำแหน่งที่ตรงกับจุดที่แรง Q_j กระทำในระบบที่ 2 เป็น x_j ดังแสดงในรูปที่ 1.6ก

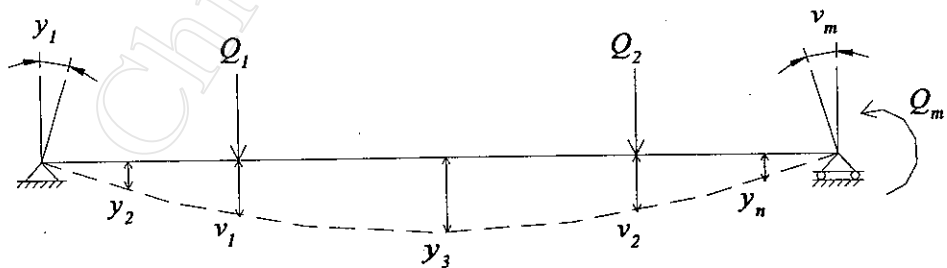
ระบบที่ 2 มีแรง Q_j กระทำบนคาน โดยกำหนดให้ระยะเปลี่ยนตำแหน่งตรงจุดที่แรง Q_j กระทำเป็น v_j และให้ระยะเปลี่ยนตำแหน่งที่ตรงกับจุดที่แรง P_j กระทำในระบบที่ 1 เป็น y_j ดังแสดงในรูปที่ 1.6ข

โดยที่

$$j = 1, 2, 3, \dots$$



ก. ระบบที่ 1



ข. ระบบที่ 2

รูปที่ 1.6 คานที่ใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎี Reciprocal

ถ้ากำหนดให้เริ่มแรกมีแรง P_j กระทำบนคาน โดยแรง P_j แปรผันตรงกับระยะเปลี่ยนตำแหน่ง ดังนั้นงานที่ทำโดยแรง P_j คือ

$$\sum_{j=1}^n \frac{P_j u_j}{2}$$

จากนั้นพิจารณามีแรง Q_j กระทำบนคานโดยที่แรง P_j ยังคงกระทำอยู่ และแรง Q_j นี้แปรผันตรงกับระยะเปลี่ยนตำแหน่งเช่นกัน ดังนั้นงานที่ทำโดยแรง P_j เนื่องจากมีแรง Q_j กระทำบนคานคือ

$$\sum_{j=1}^n P_j y_j$$

งานเนื่องจากแรง Q_j คือ

$$\sum_{j=1}^m \frac{Q_j v_j}{2}$$

โดยตั้งสมมติฐานว่าระยะเปลี่ยนตำแหน่ง y_j เนื่องจากแรง Q_j ไม่มีผลกระทบต่อแรง P_j ที่ยังคงกระทำอยู่บนโครงสร้าง

ดังนั้น งานรวมทั้งหมดคือ

$$\sum_{j=1}^n \frac{P_j u_j}{2} + \sum_{j=1}^n P_j y_j + \sum_{j=1}^m \frac{Q_j v_j}{2}$$

ในทำนองเดียวกัน หากกำหนดให้ครั้งแรกมีแรง Q_j กระทำบนคาน แล้วจึงให้มีแรง P_j กระทำในภายหลัง งานรวมทั้งหมดที่ได้คือ

$$\sum_{j=1}^m \frac{Q_j v_j}{2} + \sum_{j=1}^m Q_j x_j + \sum_{j=1}^n \frac{P_j u_j}{2}$$

และงานเนื่องจากแรงกระทำทั้ง 2 รูปแบบข้างต้นนี้จะต้องมีค่าเท่ากัน จึงได้ความสัมพันธ์ระหว่างแรง 2 ระบบคือ

$$\sum_{j=1}^n P_j y_j = \sum_{j=1}^m Q_j x_j \quad \dots\dots\dots(1.19)$$

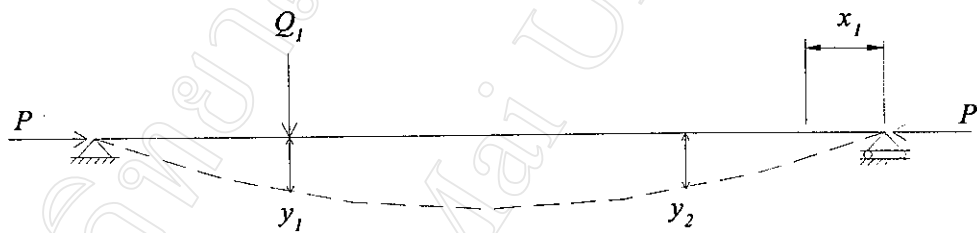
สมการ (1.19) นี้เป็นใจความสำคัญของทฤษฎี Reciprocal ซึ่งจะนำไปประยุกต์ใช้กับคาน-เสาที่ต้องนำวิธี Superposition มาช่วยวิเคราะห์ ดังจะกล่าวในหัวข้อถัดไป

1.2.7 Principle of Superposition and Reciprocal Theorem

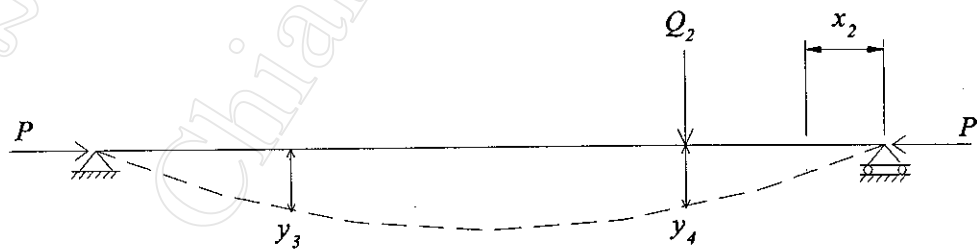
พิจารณาคาน 2 ระบบ ดังแสดงในรูปที่ 1.7 กล่าวคือ

ระบบที่ 1 มีแรงอัดในแนวแกน P กระทำร่วมกับน้ำหนักบรรทุก Q_1 โดยกำหนดให้ระยะเปลี่ยนตำแหน่งที่ตรงกับจุดที่น้ำหนักบรรทุก Q_1 กระทำในระบบที่ 1 เป็น y_1 กำหนดให้ระยะเปลี่ยนตำแหน่งตรงกับจุดที่น้ำหนักบรรทุก Q_2 กระทำในระบบที่ 2 เป็น y_2 และกำหนดให้ระยะเปลี่ยนตำแหน่งในแนวแกนที่ปลายคานเป็น x_1 ดังแสดงในรูปที่ 1.7ก

ระบบที่ 2 มีแรงอัดในแนวแกน P กระทำร่วมกับน้ำหนักบรรทุก Q_2 โดยกำหนดให้ระยะเปลี่ยนตำแหน่งที่ตรงกับจุดที่น้ำหนักบรรทุก Q_2 กระทำในระบบที่ 2 เป็น y_4 กำหนดให้ระยะเปลี่ยนตำแหน่งตรงกับจุดที่น้ำหนักบรรทุก Q_1 กระทำในระบบที่ 1 เป็น y_3 และกำหนดให้ระยะเปลี่ยนตำแหน่งในแนวแกนที่ปลายคานเป็น x_2 ดังแสดงในรูปที่ 1.7ข



ก. คานรับแรงอัดในแนวแกน P ร่วมกับน้ำหนักบรรทุก Q_1



ข. คานรับแรงอัดในแนวแกน P ร่วมกับน้ำหนักบรรทุก Q_2

รูปที่ 1.7 ตัวอย่างคาน-เสาสำหรับประยุกต์ใช้ทฤษฎี Reciprocal

โดยกำหนดให้แรงอัดในแนวแกน P คงที่และมีค่าเท่ากันทั้ง 2 ระบบ เมื่อนำทฤษฎี Reciprocal มาประยุกต์ใช้กับคานทั้ง 2 ระบบดังแสดงในรูปที่ 1.7 สามารถแสดงเป็นสมการได้ คือ

$$Q_1 y_3 + P x_2 = Q_2 y_2 + P x_1 \quad \dots\dots\dots(1.20)$$

เมื่อกำหนดให้การเปลี่ยนแปลงความยาวของคาน-เสาเกิดขึ้นเนื่องจากแรงอัดในแนว แกนเท่านั้น ดังนั้น x_1 เท่ากับ x_2 นั่นคือ

$$P(x_1 - x_2) = 0 \quad \dots\dots\dots(1.21)$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$Q_1 y_3 = Q_2 y_2 \quad \dots\dots\dots(1.22)$$

หากคาน-เสาที่พิจารณามีสถานะเป็นไปตามเงื่อนไขข้างต้น สามารถใช้วิธีการ Superposition ช่วยในการวิเคราะห์ได้

1.3 สรุปสาระสำคัญจากเอกสารที่เกี่ยวข้อง

ประสิทธิ์ สาธร (2518) ได้ศึกษาการใช้คานคอดินเป็นฐานรากอาคารสำหรับชั้นดิน อ่อนในกรุงเทพมหานครแทนการใช้เสาเข็ม โดยใช้ทฤษฎีคานรองรับโดยฐานรากยืดหยุ่น (Beams on Elastic Foundation) พบว่า พฤติกรรมการรับน้ำหนักบรรทุกของคานคอดินที่ใช้เป็นฐาน รากเป็นไปตามทฤษฎีคานรองรับโดยฐานรากยืดหยุ่น และในการคำนวณออกแบบฐานรากแบบ คานคอดินควรใช้ค่า Modulus of Subgrade Reaction $K' = K_0 B$ โดยตรง

โดยที่

K_0 คือ โมดูลัสของฐานรากยืดหยุ่นที่ได้จากการทดสอบ

B คือ ความกว้างของคาน

Ting (1982) ได้วิเคราะห์คานซึ่งรองรับโดยฐานรากแบบ Winkler ที่รองรับทั้ง 2 ด้าน เป็นแบบยึดรั้งยืดหยุ่น (Elastic Restraints) และรับน้ำหนักบรรทุกแบบต่างๆ ผลการวิเคราะห์ที่ ได้สามารถนำไปใช้กับคานซึ่งมีสถานะขอบ (Boundary Conditions) แบบต่างๆ ได้ และง่ายต่อ การนำไปเขียนเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อช่วยคำนวณ

West and Mafi (1984) ได้พัฒนากระบวนการทางตัวเลขเพื่อคำนวณคาน-เสาช่วงเดียวหรือหลายช่วง (Single or Multi-Span) แบบพลศาสตร์ (Dynamic) ซึ่งวางบนที่รองรับยืดหยุ่น (Elastic Supports) ผลการวิเคราะห์แสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงโก่งเคาะกับโมดูลัสของฐานราก, ค่าโมดูลัสวิกฤตกับแรงในแนวแกน, ความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequencies) กับโมดูลัสของที่รองรับ, และกราฟแสดงความสัมพันธ์ร่วมระหว่าง $p-K-\omega^2$ เพื่อหาสภาวะวิกฤตที่จะเกิดขึ้นโดยที่

p แสดงในสมการ (1.6)

K คือ The elastic spring constant of the support

$$= \frac{k}{k_1} \quad \dots\dots\dots(1.23)$$

k_1 คือ The critical foundation constant

$$= -EI \frac{\pi^4}{l^4} \quad \dots\dots\dots(1.24)$$

$$\omega = \frac{\Omega}{\Omega_1} \quad \dots\dots\dots(1.25)$$

Ω คือ The circular natural frequency of vibration

Ω_1 คือ The fundamental natural frequency

$$= \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad \dots\dots\dots(1.26)$$

m คือ The mass per unit length

Cheng and Pantelides (1988) ได้เสนอ 2 วิธีวิเคราะห์แบบสถิต (Static) สำหรับคาน-เสาที่รองรับโดยฐานรากยืดหยุ่นเพื่อหาแรงอัดวิกฤต (Critical Axial Load) และรูปร่างการโก่งเคาะ (Buckling Mode-Shapes) โดยวิธีการแรกคิดแรงเฉือนจาก Total Slope ส่วนวิธีที่สองคิดแรงเฉือนจาก Bending Slope ผลการวิเคราะห์แสดงให้เห็นว่าการโก่งเคาะอาจไม่เกิดใน Mode แรก ซึ่งขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของคาน-เสาและค่าคงที่ของ Elastic Media และยังพบว่าค่าคงที่ของ Elastic Media ที่จุด Transition มีค่าน้อยลงเมื่ออัตราส่วนความชะลูด (Slenderness Ratio) สูงขึ้น และเมื่อมีการพิจารณาการเปลี่ยนรูปเนื่องจากแรงเฉือนด้วย แรงอัดวิกฤตจะลดลงโดยเฉพาะเมื่ออัตราส่วนความชะลูดน้อยลง

Cheng and Pantelides (1988) ได้เสนอ 2 วิธีวิเคราะห์แบบพลศาสตร์ (Dynamic) สำหรับ คาน-เสาที่รองรับโดยฐานรากยืดหยุ่น รับแรงในแนวแกนแบบสถิตและ Lateral Time-Dependent Excitations โดยวิธีการแรกคิดแรงเฉือนจาก Total Slope ส่วนวิธีที่สองคิดแรงเฉือนจาก Bending Slope และยกตัวอย่างคำนวณแล้วแสดงผลในรูปกราฟ

Razaqpur (1989) ได้นำวิธีการ Finite Element มาวิเคราะห์คาน-เสาซึ่งรองรับโดย Weak Winkler Foundation พบว่า กรณีที่แรงในแนวแกนและโมดูลัสของฐานรากมีค่าน้อย Beam-Column Element ที่สร้างขึ้นมาไม่แตกต่างกับ Beam Element ที่ไม่มีฐานรากยืดหยุ่นรองรับ กรณีที่แรงในแนวแกนมีค่ามากแต่โมดูลัสของฐานรากมีค่าน้อย Beam-Column Element ที่สร้างขึ้นมาไม่แตกต่างกับ Beam-Column Element ที่ไม่มีฐานรากยืดหยุ่นรองรับ

1.4 วัตถุประสงค์ของการศึกษา

เพื่อศึกษาผลกระทบของการมีความโค้งเริ่มแรก ที่มีต่อการเปลี่ยนแปลงแรงภายในคาน-เสา รองรับโดยฐานรากยืดหยุ่น อันได้แก่ แรงเฉือน (Shear Force) และโมเมนต์ดัด (Bending Moment) โดยแสดงความสัมพันธ์ระหว่างโมดูลัสของฐานรากยืดหยุ่น , แรงอัดในแนวแกน , และรูปร่างความโค้งเริ่มแรก

1.5 ขอบเขตและแนวคิดของการศึกษา

1.5.1 คาน-เสามีช่วงเดียว (Single Span) หน้าตัดคงที่ตลอดความยาว (Prismatic) ที่รองรับ ณ ปลายทั้ง 2 ด้านเป็นแบบยึดหมุน (Hinged Support) ระหว่างช่วงความยาวคาน-เสารองรับโดยฐานรากยืดหยุ่น (Elastic Foundation)

1.5.2 กำหนดให้ความโค้งเริ่มแรกเป็นรูปอนุกรมของฟังก์ชันซายน์ (Fourier Sine Series) นั่นคือ

$$y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

1.5.3 นำหน้ากบบรรทุกบนคาน-เสาที่ใช้ในการวิเคราะห์ได้แก่ นำหน้ากบบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ (Uniformly Distributed Load) , นำหน้ากบบรรทุกเป็นจุด (Concentrated Load) และ โมเมนต์ดัด ณ ที่รองรับทั้ง 2 ด้าน (Concentrated End Moments)

1.5.4 ฐานรากยึดหยุ่นเป็น Winkler Foundation กล่าวคือ แรงปฏิกิริยาของฐานรากยึดหยุ่นที่กระทำต่อจุดใดๆ บนคาน-เสาเป็นสัดส่วนโดยตรงกับระยะแอนของคาน-เสาที่จุดนั้นๆ

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Chiang Mai University