บทที่ 4
ผลสรุปและข้อเสนอแนะ

การวิจัยครั้งนี้เป็นการศึกษาถึงคุณสมบัติและประสิทธิภาพของตัวแบบทดสอบ T_1 และ T_2 ซึ่งใช้สำหรับทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของสองประชากรแบบปกติที่เป็นอิสระกัน แต่ไม่ทราบค่าความแปรปรวน โดยศึกษาจากคุณสมบัติเรื่องความแกร่งของการทดสอบเมื่อใช้ตัวแบบทดสอบทั้งสอง (สำหรับในกรณีที่สมมติฐานหลักเป็นจริง) และค่าประสิทธิภาพสัมพัทธ์ (สำหรับกรณีที่สมมติฐานหลักไม่จริง) เป็นหลัก ซึ่งในการวิจัยนี้กำหนดให้ ค่าประสิทธิภาพสัมพัทธ์ของตัวแบบทดสอบ T_1 เทียบกับตัวแบบทดสอบ T_2 มีค่าเท่ากับ f_2 / f_1 เมื่อ f_1 คือค่าความถี่สัมพัทธ์ของผลการทดสอบที่สรุปว่าปฏิเสธ H_0 เมื่อใช้ตัวแบบทดสอบ T_1 และ f_2 คือค่าความถี่สัมพัทธ์ของผลการทดสอบที่สรุปว่าปฏิเสธ H_0 เมื่อใช้ตัวแบบทดสอบ T_2 ส่วนตัวแบบทดสอบ T_1 และ T_2 ที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐานมีรูปแบบดังต่อไปนี้

สมมติว่า สุ่มตัวอย่างขนาด n_1 และ n_2 จากประชากรที่ 1 และ ที่ 2 อย่างเป็นอิสระกัน โดยประชากรทั้งสองมีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนเท่ากับ (μ_1, σ_1^2) และ (μ_2 , σ_2^2) ตามลำดับ ทั้งนี้ σ_1^2 และ σ_2^2 ไม่ทราบค่า จากตัวอย่างทั้ง 2 ชุด คำนวณได้ค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนเป็น ($\overline{X}_1$, s_1^2) และ ($\overline{X}_2$, s_2^2) สำหรับตัวอย่างชุดที่ 1 และ 2 ตามลำดับ และสมมติฐานของการทดสอบอยู่ในลักษณะ

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0$ เทียบกับ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq d_0$; สำหรับงานวิจัยครั้งนี้กำหนดให้ $d_0 = 0$

สำหรับตัวแบบทดสอบ T_1

กำหนดให้ตัวสถิติ T_1 อยู่ในรูป

$$T_1 = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - d_0}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$ ซึ่งมีการแจกแจงแบบ t ที่มีองศาอิสระเท่ากับ $\nu_1 = n_1 + n_2 - 2$

เมื่อ
$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n1}(x_{1i} - \overline{x}_1)^2}{n_1 - 1}$$

$$s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n2}(x_{2i} - \overline{x}_2)^2}{n_2 - 1}$$

$$\overline{X}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n1} x_{1i}}{n_1}$$

$$\overline{X}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n2} x_{2i}}{n_2}$$

จะได้ตัวแบบทดสอบ T_1 อยู่ในรูป **จะปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ α ถ้า** $|T_1| \leq t_{\alpha/2, v_1}$ เมื่อค่า $t_{\alpha/2, v_1}$ อ่านได้จากตารางการแจกแจงแบบ t ที่องศาอิสระเท่ากับ v_1 และระดับนัยสำคัญเท่ากับ $\alpha/2$

สำหรับตัวแบบทดสอบ T_2

กำหนดให้ตัวสถิติ T_2 อยู่ในรูป

$$T_1 = \frac{(\overline{x_1} - \overline{x_2}) - d_0}{\sqrt{s_1^2 \cdot \frac{1}{n_1} + s_2^2 \cdot \frac{1}{n_2}}}$$ ซึ่งมีการแจกแจงแบบ t ที่มีองศาอิสระเท่ากับ v_2

เมื่อ $$v_2 = \frac{\left(s_1^2 \frac{1}{n_1} + s_2^2 \cdot \frac{1}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$ โดยปัดให้เป็นจำนวนเต็มในลักษณะปัดลง

จะได้ตัวแบบทดสอบ T_2 อยู่ในรูป **จะปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ α ถ้า** $|T_2| \leq t_{\alpha/2, v_2}$ เมื่อค่า $t_{\alpha/2, v_2}$ อ่านได้จากตารางการแจกแจงแบบ t ที่องศาอิสระเท่ากับ v_2 และระดับนัยสำคัญเท่ากับ $\alpha/2$

ผลการวิจัยซึ่งได้จากการจำลองข้อมูลในสถานะการณ์ต่าง ๆ ที่อาจเป็นไปได้ด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ DEC โดยใช้วิธีการจำลอง (simulation) ด้วยเทคนิคมอนติคาร์โล (Monte Carlo technique) พอสรุปผลได้ดังนี้

กรณีที่สมมติฐานหลักเป็นจริง

1. ***เมื่อทราบว่าความแปรปรวนของประชากรทั้งสองเท่ากันแต่ไม่ทราบค่า*** พบว่า ตัวแบบทดสอบทั้งสองมีความแกร่งของการทดสอบ เมื่อ n_1 , n_2 มีขนาดมากกว่า 5 ขึ้นไป

2. ***เมื่อทราบว่าความแปรปรวนของประชากรทั้งสองไม่เท่ากันและไม่ทราบค่า*** (โดยที่ $\sigma_2^2 > \sigma_1^2$) พบว่า ถ้า $n_1 \neq n_2$ ตัวแบบทดสอบ T_2 เท่านั้นที่มีความแกร่งของการทดสอบ (ตัวแบบทดสอบ T_1 ไม่มีความแกร่งของการทดสอบ) โดยทั้งนี้ค่าความถี่สัมพัทธ์ของผลการทดสอบที่สรุปว่าปฏิเสธ H_0 เมื่อใช้ตัวแบบ T_1 จะมีค่ามากกว่าค่าระดับนัยสำคัญที่กำหนด (α) ถ้า $n_1 > n_2$ และจะมีค่าน้อยกว่าค่า α ถ้า $n_1 < n_2$ ผลดังกล่าวจะปรากฏชัดเจนยิ่งขึ้นเมื่ออัตราส่วนของค่าความแปรปรวน (σ_2^2 / σ_1^2) มีค่ามากขึ้น แต่หากขนาดตัวอย่าง $n_1 = n_2$ แล้ว ทั้งสองตัวแบบทดสอบมีความแกร่งของการทดสอบ

กรณีที่สมมติฐานหลักไม่เป็นจริง

1. ***เมื่อทราบว่าความแปรปรวนของประชากรทั้งสองเท่ากันแต่ไม่ทราบค่า*** พบว่า เมื่อผลต่างระหว่างค่าเฉลี่ยประชากรทั้งสองมีค่าเพิ่มขึ้น ตัวแบบทดสอบทั้งสองให้ค่าความถี่สัมพัทธ์ของผลการทดสอบที่สรุปว่าปฏิเสธ H_0 ซึ่งตั้งว่าค่าเฉลี่ยประชากรทั้งสองเท่ากันนั้นมีค่ามากขึ้นตาม กล่าวคือโอกาสที่จะปฏิเสธว่าค่าเฉลี่ยประชากรทั้งสองเท่ากัน

นั้นสูงขึ้น แต่เมื่ออัตราส่วนของค่า σ_2^2 / σ_1^2 เพิ่มมากขึ้น ค่าความถี่สัมพัทธ์จะลดลงหรือโอกาสที่จะปฏิเสธสมมติที่ว่าค่าเฉลี่ยประชากรทั้งสองเท่ากันนั้นมีโอกาสน้อยลง กล่าวคือประสิทธิภาพของตัวแบบทดสอบทั้งสองจะลดลงนั่นเอง สำหรับการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวแบบทดสอบ T_1 และ T_2 พบว่า ส่วนใหญ่แล้วประสิทธิภาพของตัวแบบทดสอบ T_1 สูงกว่า T_2 เล็กน้อย โดยมีค่าอยู่ในช่วง 1.02 - 1.08 เท่า จึงอาจกล่าวได้ว่า ประสิทธิภาพของตัวแบบทดสอบทั้งสองไม่แตกต่างกัน โดยเฉพาะอย่างเมื่อผลต่างระหว่างค่าเฉลี่ยทั้งสอง ($d_0 = |\mu_1 - \mu_2|$) มีค่ามากกว่า 2

2. ***เมื่อทราบว่าความแปรปรวนของประชากรทั้งสองไม่เท่ากันและไม่ทราบค่า*** (โดยที่ $\sigma_2^2 > \sigma_1^2$) สำหรับคุณสมบัติของตัวแบบทดสอบทั้งสอง พบว่า เมื่อผลต่างระหว่างค่าเฉลี่ยประชากรทั้งสองมีค่าเพิ่มขึ้น ตัวแบบทดสอบทั้งสองให้ค่าความถี่สัมพัทธ์ของผลการทดสอบที่สรุปว่าปฏิเสธ H_0 ซึ่งตั้งว่าค่าเฉลี่ยประชากรทั้งสองเท่ากันนั้นมีค่ามากขึ้นตาม กล่าวคือ โอกาสที่จะปฏิเสธว่าค่าเฉลี่ยประชากรทั้งสองเท่ากันนั้นสูงขึ้น แต่เมื่ออัตราส่วนของค่า σ_2^2 / σ_1^2 เพิ่มมากขึ้น ค่าความถี่สัมพัทธ์จะลดลงหรือโอกาสที่จะปฏิเสธสมมติที่ว่าค่าเฉลี่ยประชากรทั้งสองเท่ากันนั้นมีโอกาสน้อยลง กล่าวคือประสิทธิภาพของตัวแบบทดสอบทั้งสองจะลดลงนั่นเอง ส่วนผลของการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างตัวแบบทดสอบ T_1 และ T_2 พบว่า ณ ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.10 และ 0.05 เมื่อถ้า $n_1 = n_2$ และผลต่างระหว่างค่าเฉลี่ยทั้งสองมีค่ามากกว่า 1.0 ประสิทธิภาพของตัวแบบทดสอบทั้งสองไม่ค่อยแตกต่างกัน ยกเว้นที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.01 ซึ่งพบว่า T_1 จะมีประสิทธิภาพสูงกว่า T_2

แต่หากขนาดตัวอย่าง $n_1 > n_2$ แล้วพบว่า ประสิทธิภาพของตัวแบบทดสอบ T_1 สูงกว่า T_2 โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อผลต่างระหว่างค่าเฉลี่ยทั้งสองมีค่าน้อยกว่า 2.5 หรืออัตราส่วนของค่าความแปรปรวนทั้งสอง (σ_2^2 / σ_1^2) มีค่ามากขึ้น

ส่วนเมื่อ $n_1 < n_2$ พบว่า ประสิทธิภาพของตัวแบบทดสอบ T_2 สูงกว่า T_1 โดยผลจะปรากฏชัดเจนยิ่งขึ้นเมื่ออัตราส่วนของค่าความแปรปรวนทั้งสอง (σ_2^2 / σ_1^2) มีค่ามากขึ้น

อย่างไรก็ตาม ถ้าผลต่างระหว่างค่าเฉลี่ยทั้งสองมีขนาดใหญ่ขึ้น ค่าประสิทธิภาพสัมพัทธ์มีแนวโน้มเพิ่มขึ้น (สำหรับกรณี $n_1 > n_2$) หรือลดลง (สำหรับกรณี $n_1 < n_2$) จนทำให้ประสิทธิภาพของตัวแบบทดสอบทั้งสองไม่แตกต่างกัน

ข้อเสนอแนะ

ผู้วิจัยใคร่สรุปข้อเสนอแนะถึงวิธีการเลือกใช้ตัวแบบทดสอบ T - tests (T_1, T_2) สำหรับใช้ทดสอบสมมติฐานทางสถิติที่เกี่ยวกับความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของสองประชากรปกติที่เป็นอิสระกัน แต่ไม่ทราบค่าความแปรปรวน ดังนี้ กรณีที่ทราบว่าความแปรปรวนของทั้งสองประชากรเท่ากัน ควรใช้ตัวแบบทดสอบ T_1 เพราะจะทำให้ผู้วิจัยมั่นใจได้มากกว่า T_2 ถึงแม้ว่าประสิทธิภาพของตัวแบบทดสอบ T_1 จะสูงกว่าตัวแบบทดสอบ T_2 ไม่มากนักในบางสถานะการณ์ ส่วนกรณีที่ทราบว่าความแปรปรวนของทั้งสองไม่เท่ากันโดยที่ $\sigma_2^2 > \sigma_1^2$ หาก $n_1 < n_2$ แล้วควรใช้ตัวแบบทดสอบ T_2 แต่ถ้า $n_1 \geq n_2$ ควรใช้ตัวแบบทดสอบ T_1