บทที่ 2
ตัวแบบทดสอบ T - tests

2.1 การทดสอบสมมติฐานทางสถิติ (statistical hypothesis testing)

เนื่องจากสมมติฐานคือข้อสมมติที่กำหนดขึ้นจากความเชื่อของบุคคลหนึ่งหรือกำหนดขึ้นจากความเชื่อของบุคคลทั่ว ๆ ไป ความเชื่อที่กำหนดขึ้นนี้อาจจะเป็นจริงก็ได้ แต่โดยทั่วไปแล้วสมมติฐานที่ได้จากประสบการณ์เกี่ยวกับเรื่องนั้น ๆ เป็นระยะเวลานาน ๆ มักจะเป็นจริง เช่น ผู้หญิงอายุยืนกว่าผู้ชาย น้ำหนักเฉลี่ยของเด็กแรกเกิดในเมืองกับชนบทของประเทศไทยแตกต่างกัน เป็นต้น แต่อย่างไรก็ตาม ยังมีความจำเป็นต้องทำการทดสอบโดยการเปรียบเทียบข้อสมมติฐานดังกล่าวกับข้อมูลที่เกี่ยวข้อง ซึ่งได้ทำการเก็บรวบรวมมาจากประชากรที่สนใจศึกษา เช่น

สมมติฐานที่ว่า " ***น้ำหนักเฉลี่ยของเด็กแรกเกิดในเมืองกับชนบทของประเทศไทยแตกต่างกัน*** " สมมติฐานนี้จะทราบว่า ถูกหรือผิดก็ต้องเก็บรวบรวมข้อมูลเกี่ยวกับน้ำหนักของเด็กแรกเกิดทั้งหมดทั้งที่เกิดในเมืองและชนบท แล้วนำมาหาน้ำหนักเฉลี่ยของเด็กแรกเกิดในเมืองและน้ำหนักเฉลี่ยของเด็กแรกเกิดในชนบท ถ้าน้ำหนักเฉลี่ยของเด็กแรกเกิดในเมืองต่างกับน้ำหนักเฉลี่ยของเด็กแรกเกิดในชนบท แสดงว่า สมมติฐานที่ตั้งไว้ถูกต้อง แต่ในทางปฏิบัติการเก็บรวบรวมข้อมูลเกี่ยวกับน้ำหนักเฉลี่ยของเด็กแรกเกิดทุกคนที่เกิดในเมืองไทย อาจทำไม่ได้หรือทำได้ก็ต้องเสียเวลาและค่าใช้จ่ายในการเก็บรวบรวมข้อมูลมาก ดังนั้นจึงนิยมใช้วิธีเลือกตัวแทนของเด็กแรกเกิดในเมืองไทย โดยการสุ่มเลือกเด็กแรกเกิดที่เกิดในเมืองและชนบทมาจำนวนหนึ่ง แล้วชั่งน้ำหนักเพื่อหาค่าน้ำหนักเฉลี่ยของเด็กแรกเกิดในเมืองและค่าน้ำหนักเฉลี่ยของเด็กแรกเกิดในชนบท โดยค่าน้ำหนักเฉลี่ยที่ได้นี้เป็นเพียงค่าประมาณเท่านั้น ความถูกต้องและความเชื่อถือได้ของค่าน้ำหนักเฉลี่ยจึงขึ้นอยู่กับวิธีการสุ่มเลือกตัวอย่างและตัวประมาณค่าที่ใช้ ดังนั้นความแตกต่างระหว่างน้ำหนักเฉลี่ยของเด็กแรกเกิดในชนบทกับในเมืองที่ได้นี้ อาจจะไม่ได้เกิดจากความแตกต่างระหว่างท้องที่ที่เด็กเท่านั้น แต่อาจเกิดจากความคลาดเคลื่อนในการเลือกตัวอย่างก็ได้ กล่าวคือ ถ้าความแตกต่างระหว่างน้ำหนักเฉลี่ยทั้งสองมีมากก็อาจสรุปได้เลยว่า สมมติฐานที่ตั้งไว้แตกต่างกัน แต่ถ้าความแตกต่างมีน้อย ผลต่างน้ำหนักอาจเกิดจากความคลาดเคลื่อนในการเลือกตัวอย่างไม่ดีหรือการเก็บข้อมูลใช้มาตรวัดที่ไม่ละเอียดก็ได้ ปัญหาจึงตามมาว่า ความแตกต่างควรจะมีค่ามากที่สุดเท่าไรจึงทำให้เราจะสรุปได้ว่า มีความแตกต่างระหว่างน้ำหนักเฉลี่ยของเด็กแรกเกิดในท้องที่สองท้องที่ ซึ่งการทดสอบสมมติฐานทางสถิติสามารถแก้ปัญหานี้ได้

การทดสอบสมมติฐานทางสถิติกระทำได้โดยการกำหนดสมมติฐานทางสถิติขึ้นมา แล้วพยายามหาหลักฐานที่มีอยู่ในตัวแทนหรือตัวอย่างที่สุ่มมาได้นั้น มาใช้ในการตรวจสอบและตัดสินใจเกี่ยวกับสมมติฐานทางสถิติที่ตั้งขึ้นหรือสิ่งที่สงสัย ฉะนั้นถ้าเรามีหลักฐานไม่เพียงพอที่จะนำไปหักล้างข้อสมมติฐานที่ตั้งขึ้น ก็หมายความว่าเราจะต้องยอมรับสมมติฐานนั้น (accept hypothesis) แต่ถ้าหลักฐานที่ได้มากพอที่จะนำไปหักล้างสมมติฐานนั้นก็หมายความว่า เราจะปฏิเสธสมมติฐานนั้น (reject hypothesis)

ในการทดสอบสมมติฐานทางสถิตินั้น เราจะกำหนดสมมติฐานขึ้นมา 2 สมมติฐาน โดยสมมติฐานแรกกำหนดขึ้นในลักษณะที่มีวัตถุประสงค์ที่จะลบล้างหรือไม่ยอมรับ ฉะนั้นจึงเรียกสมมติฐานนี้ว่า "***สมมติฐานหลัก*** (null hypothesis) และใช้อักษรย่อว่า H_0 ถ้าหากมีหลักฐานเพียงพอที่จะไม่ยอมรับสมมติฐานหลักแล้วเราควรจะเลือกสมมติฐานใดมาแทน สมมติฐานแบบหลังนี้จะเรียกว่า ***สมมติฐานรอง*** (alternative hypothesis) และใช้

อักษรย่อว่า H_1 โดยสมมติฐานหลักและสมมติฐานรองจะมีลักษณะขัดแย้งกัน และอาจมีลักษณะเป็นสมมติฐานเชิงเดี่ยว (กำหนดค่าพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบแน่นอนเพียงค่าเดียว) หรือสมมติฐานเชิงประกอบ (ไม่สามารถกำหนดค่าพารามิเตอร์ที่ทดสอบเป็นค่าเดี่ยวที่แน่นอนได้) สำหรับขั้นตอนของการทดสอบสมมติฐานทางสถิติพอสรุปได้ดังนี้

1. ตั้งสมมติฐานเพื่อการทดสอบ ซึ่งอาจตั้งเป็นชนิดการทดสอบแบบสองทางหรือแบบทางเดียว
2. กำหนดระดับนัยสำคัญ (α)
3. เลือกตัวสถิตทดสอบ (test statistics) และเกณฑ์การตัดสินใจที่เหมาะสม โดยจะพิจารณาจากสมมติฐานที่ตั้งไว้ พารามิเตอร์ที่ทดสอบและระดับนัยสำคัญ
4. คำนวณหาค่าตัวสถิติทดสอบ โดยการแทนค่าข้อมูลที่สังเกตและเก็บรวบรวมได้จากตัวอย่างที่เลือกมา
5. สรุปผลการทดสอบ โดยถ้าค่าสถิติทดสอบที่คำนวณได้จากข้อ 4. ตกอยู่ในช่วงบริเวณของการยอมรับสมมติฐานหลัก ก็ยอมรับสมมติฐานหลัก แต่ถ้าค่าสถิติทดสอบคำนวณได้ตกอยู่ในบริเวณเขตการปฏิเสธสมมติฐานหลัก ก็จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก

2.2 การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของสองประชากรปกติที่เป็นอิสระกัน

เมื่อ μ_1 , μ_2 คือค่าเฉลี่ยของประชากรที่ 1 และ ที่ 2 ตามลำดับ และ d_0 คือผลต่างของค่าเฉลี่ยของประชากรดังกล่าว (ส่วนมากจะกำหนด $d_0 = 0$) สมมติฐานที่จะทดสอบอยู่ในลักษณะ

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0$ เทียบกับ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq d_0$

หรือ $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0$ เทียบกับ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > d_0$

หรือ $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0$ เทียบกับ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < d_0$

สำหรับตัวสถิติทดสอบขึ้นอยู่กับการแจกแจงของประชากรที่เกี่ยวข้อง ขนาดตัวอย่างที่สุ่มมาและความแปรปรวนของสองประชากรว่าทราบค่าหรือไม่ ซึ่งสำหรับงานวิจัยนี้จะพิจารณาเฉพาะในสองกรณีดังต่อไปนี้คือ

กรณีที่ 1.

เมื่อสุ่มตัวอย่างขนาด n_1 และ n_2 มาโดยอิสระกันจากสองประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนเท่ากับ (μ_1, σ_1^2) และ (μ_2 , σ_2^2) ตามลำดับ ทั้งนี้ทราบว่า $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ แต่ไม่ทราบค่า โดย n_1 และ $n_2 < 30$

ตัวสถิติทดสอบที่ถูกแนะนำใช้ทั่วไปได้แก่

$$T_1 = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_o}{\sqrt{s_p^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$ ซึ่งมีการแจกแจงแบบ t ที่มีองศาอิสระเท่ากับ $\nu_1 = n_1 + n_2 - 2$

เมื่อ $$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

s_1^2 = ความแปรปรวนที่คำนวณได้จากตัวอย่างที่สุ่มจากประชากรที่ 1

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n1}(x_{1i}-\bar{x}_1)^2}{n_1-1}$$

s_2^2 = ความแปรปรวนที่คำนวณได้จากตัวอย่างที่สุ่มจากประชากรที่ 2

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n2}(x_{2i}-\bar{x}_2)^2}{n_2-1}$$

$\bar{x}_1$ = ค่าเฉลี่ยที่คำนวณได้จากตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากรที่ 1

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n1}x_{1i}}{n_1}$$

$\bar{x}_2$ = ค่าเฉลี่ยที่คำนวณได้จากตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากรที่ 2

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n2}x_{2i}}{n_2}$$

เกณฑ์การตัดสินใจที่ระดับนัยสำคัญ α เป็นดังนี้

ลักษณะสมมติฐานที่ทดสอบ	จะปฏิเสธสมมติฐานหลักเมื่อ
1. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0$ เทียบกับ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$T_1 \leq -t_{\alpha/2,\nu_1}$ หรือ $T_1 \geq t_{\alpha/2,\nu_1}$
2. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0$ เทียบกับ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > d_0$	$T_1 \geq t_{\alpha,\nu_1}$
3. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0$ เทียบกับ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < d_0$	$T_1 \leq -t_{\alpha,\nu_1}$

กรณีที่ 2.

เมื่อสุ่มตัวอย่างขนาด n_1 และ n_2 มาโดยอิสระกันจากสองประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนเท่ากับ (μ_1, σ_1^2) และ (μ_2, σ_2^2) ตามลำดับ ทั้งนี้ทราบว่า $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ แต่ไม่ทราบค่า โดย n_1 และ $n_2 < 30$ ตัวสถิติทดสอบที่ถูกแนะนำใช้ทั่วไปได้แก่

$$T_1 = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-d_0}{\sqrt{s_1^2\cdot\frac{1}{n_1}+s_2^2\cdot\frac{1}{n_2}}}$$ ซึ่งมีการแจกแจงแบบ t ที่มีองศาอิสระเท่ากับ ν_2

เมื่อ $\nu_2 = \dfrac{(s_1^2\frac{1}{n_1}+s_2^2.\frac{1}{n_2})^2}{\frac{(\frac{s_1^2}{n_1})^2}{n_1-1}+\frac{(\frac{s_2^2}{n_2})^2}{n_2-1}}$ โดยปัดให้เป็นจำนวนเต็มในลักษณะปัดลง

เกณฑ์การตัดสินใจที่ระดับนัยสำคัญ α เป็นดังนี้

ลักษณะสมมติฐานที่ทดสอบ	จะปฏิเสธสมมติฐานหลักเมื่อ
1. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0$ เทียบกับ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$T_2 \leq -t_{\alpha/2,\nu_2}$ หรือ $T_2 \geq t_{\alpha/2,\nu_2}$
2. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0$ เทียบกับ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > d_0$	$T_2 \geq t_{\alpha,\nu_2}$
3. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0$ เทียบกับ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < d_0$	$T_2 \leq -t_{\alpha,\nu_2}$

ทั้งนี้คุณสมบัติและประสิทธิภาพของตัวแบบทดสอบทั้งสอง รวมทั้งหากเราใช้ตัวแบบทดสอบผิดกรณีแล้วผลการทดสอบจะเป็นอย่างไร รุนแรงมากน้อยเพียงไร ก็มิทำการศึกษาหรือกล่าวไว้