3. ผลลัพธ์ที่สำคัญ

ให้ n,d,r และ m เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $r \le n$ จะเขียน $D = D(n,r,d,m)$ หมายถึงไดกราฟที่ประกอบด้วยไดกราฟบริบูรณ์ K_n และ K_m ซึ่งไม่มีจุดยอดร่วมกันโดยที่แต่ละจุด ยอดของ K_n มีอาร์คเชื่อมกับ จุดยอดของ K_m เป็นจำนวน d จุดที่แตกต่างกันและในจำนวน n จุด ของ K_n นี้มี r จุดที่เชื่อมในทิศทางเดียว และ n-r จุดที่เหลือเชื่อมสองทิศทาง ในตอนนี้จะใช้ทฤษฎีบทที่ 2.2 เพื่อหา arc-toughness ของไดกราฟแต่ละอันที่อยู่ในรูป D(n,r,d,m) เมื่อ $m > n+d$ ในการที่ จะใช้ทฤษฎีบทที่ 2.2 จะต้องกำหนดรายละเอียดเกี่ยวกับ arc-connectivity อันดับที่ i ของไดกราฟเพื่อจุดหมายนี้ด้วย ก่อนอื่นจะกล่าวถึง efficient separation ของไดกราฟ ดังนี้

ให้ D เป็นไดกราฟที่มีอันดับ p และ k เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ ซึ่ง $1 \le k \le p-1$ โดยที่ efficient k-separation ของ D หมายถึงการที่ลบอาร์คของ D ออกจำนวนน้อยที่สุดและทำให้ D แยกออกเป็น k+1 คอมโพเนนท์ จำนวนอาร์คที่ลบออกนี้เขียนแทนด้วย $\lambda^{(k)}(D)$จะเรียกคอมโพเนนท์ของ D ที่มีจุดยอดเดียวว่า trivial component นอกนั้นจะเรียกว่า non-trivial component

ทฤษฎีบทที่ 3.1 ให้ k และ n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $1 \le k \le n-1$ จะได้ว่า efficient k-separation ของ K_n จะแบ่ง K_n ออกเป็น k+1 คอมโพเนนท์ ซึ่งทุกคอมโพเนนท์จะเป็น trivial component หรือมี non-trivial component เพียงคอมโพเนนท์เดียวเท่านั้น

พิสูจน์ สมมุติว่าหลังจาก efficient k-separation แล้วมี non-trivial component 2 อัน คือ Q_1 และ Q_2 ให้ $|Q_1| = a$ และ $|Q_2| = b$ เนื่องจาก K_n เป็นไดกราฟบริบูรณ์ จะได้ว่า

$$H = \langle Q_1 \cup Q_2 \rangle_{K_n}$$

เป็นไดกราฟบริบูรณ์ K_{a+b} ดังนั้นถ้าจะแยก H ออกเป็น Q_1 และ Q_2 จะต้องลบอาร์คของ H ออก 2ab อาร์ค ในขณะที่พิจารณาอีกแบบหนึ่งว่า ถ้าจะแยกจุดหนึ่งออกจาก H เราจะลบอาร์คออกเพียง 2(a+b-1) อาร์คเท่านั้น เนื่องจาก $a \ge 2$, $b \ge 2$ จะได้ว่า $ab > a+b-1$ นั่นคือ $2ab > 2(a+b-1)$ ซึ่งขัดแย้งกับ $\lambda^{(k)}(D)$ มีค่าน้อยที่สุด ❑

ให้ A และ B เป็นเซตย่อยของ V(D) จะแทนจำนวนอาร์คของ D ซึ่งเชื่อมจุดยอดของ A กับจุดยอดของ B ด้วย $a_D(A,B)$ และเขียน $a_D(v,B)$ แทน $a_D(\{v\},B)$ เมื่อ v เป็นจุดยอดใดๆ ของ D จากที่กำหนดให้นี้จะสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้

ทฤษฎีบทประกอบที่ 3.2 ให้ $D = D(n,r,d,m)$ ซึ่ง $m > n+d$, $n \ge r$, $d \ge 2$ และ k เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $1 \le k \le n+m-1$ จะได้ว่ามี efficient k-separation ของ D ซึ่งทำให้ได้ trivial component เป็นจุดใน K_n

พิสูจน์ จะพิสูจน์โดยการขัดแย้ง สมมุติว่าทุกๆ efficient k-separation ของ D ไม่มี trivial component {x} ซึ่ง x เป็นสมาชิกของ $V(K_n)$ ให้ H_1 , H_2 , H_3 , ... , H_{k+1} เป็นคอมโพเนนท์ที่ได้หลังจาก efficient k-separation S ของ D จะแสดงว่า $V(K_n) \subset V(H_i)$ สำหรับบางค่า i =

$1,2,3,\ldots,k+1$ สมมุติว่า $V(K_n)$ ไม่เป็นสับเซตของ $V(H_i)$ ทุกๆ $i = 1,2,3,\ldots,k+1$ จะมี non-trivial component H_1 และ H_2 ซึ่ง $H_1 \cap K_n \neq \phi$ และ $H_2 \cap K_n \neq \phi$ ดังนั้น $n \geq 2$

ให้ $$K_b = \langle H_1 \cup K_n \rangle_{K_n} \;,\; K_c = \langle H_2 \cup K_n \rangle_{K_n}$$

$$K_f = \langle H_1 \cup K_m \rangle_{K_m} \text{ และ } K_g = \langle H_2 \cup K_m \rangle_{K_m}$$

จะเห็นว่า $b \geq 1$, $c \geq 1$ และ $f \geq 0$, $g \geq 0$ ในการแยก H_1 กับ H_2 ออกจากกันจะต้องลบอาร์คออกจำนวน $\alpha = a_D(H_1,H_2) = 2bc+2fg+a_D(K_c,K_f)+a_D(K_b,K_g)$ ในขณะที่ ถ้าแยกจุด v ใน $K_b \cup K_c$ จาก $\langle H_1 \cup H_2 \rangle_D$ ต้องลบอาร์คออกจำนวน

$$\begin{aligned}\beta &= a_D(v, \langle H_1 \cup H_2 \rangle_D) \\ &= 2b+2c-2+a_D(v,K_f)+a_D(v,K_g)\end{aligned}$$

จากผลลัพธ์นี้จะแสดงได้ว่า $\beta \leq \alpha$ ซึ่ง ถ้า $f = g = 0$ แล้ว จะเห็นได้ชัดว่าเป็นจริง ถ้า $f \geq 1$ เลือก v ใน K_c เนื่องจาก $a_D(v,K_g) \leq 2g \leq 2gf$ และ $b+c-1 \leq bc$ ดังนั้น $\beta \leq \alpha$ สำหรับกรณีที่ $g \geq 1$ จะแสดงได้ทำนองเดียวกันว่า $\beta \leq \alpha$ ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้ ดังนั้นเราสามารถกำหนดให้ $K_n \subset H_1$

กรณีที่ 1 $H_1 \cap K_m = \phi$

โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 3.1 จะได้ว่า K_m จะต้องถูกแยกออกเป็น trivial component ทั้งหมด ยกเว้น K_{m-k+1} (นั่นคือ $m \geq k$) ให้ a เป็นจำนวนอาร์คที่ต้องลบออกในการแยก D ออกเป็น k+1 คอมโพเนนท์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}a &= rd+2d(n-r)+2\binom{k-1}{2}+2(m-k+1)(k-1) \\ &= 2nd-rd+(k-1)(k-2)+2(k-1)(m-k+1)\end{aligned}$$

ต่อไปลองพิจารณาการแยกไดกราฟ D ด้วยวิธีพิเศษ S^* ซึ่งแยก D ออกปีน k+1 คอมโพเนนท์ $R_1,R_2,R_3, \ldots, R_{k+1}$ โดยที่ k คอมโพเนนท์แรกเป็น trivial component และ

(1) ถ้า $k \leq r$ แล้ว $R_i \subset K_n$, $R_i = \{v_i\}$, $i=1,2,3,\ldots,k$ โดยที่ v_i เชื่อมกับสมาชิกใน K_m ทางเดียว

(2) ถ้า $r<k\leq n$ แล้ว $R_i \subset K_n$, $i=1,2,3,\ldots,k$ และ $R_i = \{v_i\}$, $i=1,2,3,\ldots,r$ โดยที่ v_i เชื่อมกับสมาชิกใน K_m ทางเดียว

(3) ถ้า $n<k$ แล้ว $R_i \subset K_n$, $i=1,2,3,\ldots,n$

ถ้าให้ a^* เป็นจำนวนอาร์คที่ลบออกในการแยก D โดย S^* แล้วจะได้ว่า

$$a^* = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k}[2(n-i)+d] & \text{ถ้า } k\leq r \\ \sum_{i=1}^{k}2(n-i)+rd+2d(k-r) & \text{ถ้า } r<k\leq n \\ \sum_{i=1}^{n}2(n-i)+2nd-rd+\sum_{i=1}^{k-n}2(m-i) & \text{ถ้า } k>n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2kn-k(k+1)+kd & \text{ถ้า } k\leq r \\ 2kn-k(k+1)+2kd-rd & \text{ถ้า } r<k\leq n \\ 2nd-rd+2(k-n)m+kn-k(k-n+1) & \text{ถ้า } k>n \end{cases}$$

จาก $m>n+d$, $r \leq n$ และ $2 \leq d$ เราสามารถแสดงได้ว่า $a-a^* \geq 0$ ดังนี้

ถ้า $k \leq r$ จะได้ว่า $a-a^* \geq n(d-2)+2(2k-1)+d(n-r+k-2)$ จะเห็นว่าถ้า $k>1$ หรือ $n-r>0$ แล้ว $a-a^* \geq 0$ แต่ถ้า $k = 1$ และ $n-r = 0$ จะได้ว่า $a = nd$ และ $a^* = 2(n-1)+d$ ซึ่งพิสูจน์ โดยวิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์บน $d \geq 2$ จะได้ว่า $a-a^* \geq 0$

ถ้า $r<k \leq n$ จะได้ว่า $a-a^* \geq 2[nd-(n+d)+k]+2(k-1) \geq 0$ เพราะว่า ถ้า $n =1$ แล้ว $nd-(n+d)+k \geq 0$ และถ้า $n \geq 2$ แล้ว $nd \geq (n+d)$

ถ้า $k>n$ จะได้ว่า $a-a^* = 2(n-k)(n-1) \geq 0$ เพราะว่า $m \geq k$

กรณีที่ 2 $H_1 \cap K_m = K_1$

ใช้วิธีการพิสูจน์แบบเดียวกับการพิสูจน์ทฤษฎีบทประกอบ 3.1 สามารถแสดงได้ว่าในการแยก D โดย S จะได้ว่าคอมโพเนนท์ของ K_m จะเป็น trivial ยกเว้น K_{m-k} $(m \geq k+1)$ ให้ a แทนจำนวนอาร์คที่ลบออกในการแยกนี้ จะได้ว่า

$$a \geq 2n(d-1)-r(d-1)+2km-k(k+1)$$

จาก $m>n+d$, $r \leq n$ และ $2 \leq d$ เราสามารถแสดงได้ว่า $a-a^* \geq 0$ ดังนี้

ถ้า $k \leq r$ จะได้ว่า $a-a^* \geq (2n-r)(d-1)+kd+2k \geq 0$

ถ้า $r<k \leq n$ จะได้ว่า $a-a^* \geq (2n-r)(d-1)+rd+2k \geq 0$

ถ้า $k>n$ จะได้ว่า $a-a^* \geq 2n(m-k-1)+n+r \geq 0$ เพราะว่า $m \geq k+1$

กรณีที่ 3 $H_1 \cap K_m = K_t$, $t > 1$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 3.1 จะได้ว่าในการแยก D โดย S component ของ K_m จะเป็น trivial ทั้งหมดยกเว้น K_t ดังนั้น $t = m-k$ ให้ a เป็นจำนวนอาร์คที่ลบออกในการแยกนี้ จะได้ว่า

$$a \geq \begin{cases} 2mk-k(k+1) & \text{ถ้า } d \leq m-k \\ 2mk-k(k+1)+2n(d+k-m)-r(d+k-m) & \text{ถ้า } d > m-k \end{cases}$$

จาก $m>n+d$, $r \leq n$ และ $2 \leq d$ เราสามารถแสดงได้ว่า $a-a^* \geq 0$ ดังนี้

กรณีที่ $k \le r$ ถ้า $d \le m-k$ จะได้ว่า $a-a^* \ge kd+2k \ge 0$ และถ้า $d>m-k$ จะได้ว่า $a-a^* \ge kd+2k+(d+k-m)(2n-r) \ge 0$

กรณีที่ $r<k \le n$ ถ้า $d \le m-k$ จะได้ว่า $a-a^* \ge kd+rd \ge 0$ และถ้า $d>m-k$ จะได้ว่า $a-a^* \ge 2k+rd+(d+k-m)(2n-r) \ge 0$

กรณีที่ $k>n$ ถ้า $d \le m-k$ จะได้ว่า $a-a^* \ge 2n[m-(d+k)+rd \ge 0$ เพราะว่า $m \ge d+k$ และถ้า $d>m-k$ จะได้ว่า $a-a^* \ge r(m-k) \ge 0$ เพราะว่า $m \ge k$

ดังนั้นทุกกรณีจะได้ว่า $a-a^* \ge 0$ ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้ จะได้ว่าทฤษฎีบทประกอบ 3.2 เป็นจริง ❑

ในการหาจำนวน $\lambda^{(k)}(D)$ นั้นเราจะหาได้โดยอาศัยจำนวน $\lambda^{(k-1)}(D)$ และ $\lambda(D)$ และในการพิสูจน์เรื่องนี้ต้องอาศัย $deg_D(v)$ ซึ่งหมายถึงผลบวกของ out-degree กับ in-degree ของ v

ทฤษฎีบทประกอบที่ 3.3 ให้ $D = D(n,r,d,m)$ เมื่อ $m > n+d$, $d \ge 2$ และ k เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $1 \le k \le n+m-1$ จะได้ว่า

$$\lambda^{(k)}(D) = \lambda^{(k-1)}(D-v)+\lambda(D)$$

เมื่อ $v \in V(K_n)$

พิสูจน์ ให้ $v \in V(K_n)$ (ถ้า $r \ge 1$ เลือก v ที่มีอาร์คเชื่อมกับจุดใน K_m ทิศทางเดียว)

เนื่องจาก $m > n+d$ จะได้ว่า

$$deg_D(v) = \lambda(D)$$

และเนื่องจาก $\lambda^{(k)}(D)$ มีค่าน้อยที่สุด จะได้ว่า

$$\lambda^{(k)}(D) \le \lambda^{(k-1)}(D-v)+\lambda(D)$$

ในอีกทางหนึ่ง ให้ A เป็นเซตของอาร์คที่ลบออกโดย efficient k-separation ของ D ซึ่งมี component หนึ่งเป็นจุด v ของ $V(K_n)$ ซึ่งทำได้โดยอาศัยทฤษฎีบทประกอบที่ 3.2 ถ้าให้

$$A^* = A \cap A(D-v)$$

จะได้ว่า $$|A^*| = |A|-a_D(v,D)$$

จาก $\lambda^{(k-1)}(D-v)$ มีค่าน้อยที่สุด จะได้ว่า

$$|A|-a_D(v,D) \ge \lambda^{(k-1)}(D-v)$$

เนื่องจาก $a_D(v,D) = \lambda(D)$ จะได้ว่า $\lambda^{(k)}(D) \ge \lambda^{(k-1)}(D-v)+\lambda(D)$

ดังนั้น $$\lambda^{(k)}(D) = \lambda^{(k-1)}(D-v)+\lambda(D)$$

❑

ทฤษฎีบทประกอบที่ 3.4 ให้ $D = D(1,0,d,m)$ ซึ่ง $m > d+1$, $d \geq 2$ และ k เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $1 \leq k \leq m$ จะได้ว่า

$$\lambda^{(k)}(D) = \begin{cases} 2d & \text{ถ้า } k = 1 \\ 2d+\sum_{i=1}^{k-1} 2(m-i) & \text{ถ้า } k > 1 \end{cases}$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $m > 1+d$ จะได้ว่า $\lambda(D) = 2d$ และโดยทฤษฎีบทประกอบที่ 3.3 จะได้ว่า

$$\lambda^{(k)}(D) = \lambda^{(k-1)}(D-v)+\lambda(D) \quad \text{เมื่อ } v \in V(K_1)$$

ถ้า $k = 1$ จะได้ว่า $\lambda^{(k)}(D) = \lambda(D) = 2d$

ถ้า $k > 1$ เนื่องจาก $D-v = K_m$

โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 3.1 จะได้ว่า

$$\lambda^{(k-1)}(D-v) = \sum_{i=1}^{k-1} 2(m-i)$$

เมื่อแทนค่าจะได้ผลตามที่ต้องการ

❏

ทฤษฎีบทประกอบที่ 3.5 ให้ $D = D(1,1,d,m)$ ซึ่ง $m > d+1$, $d \geq 2$ และ k เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $1 \leq k \leq m$ จะได้ว่า

$$\lambda^{(k)}(D) = \begin{cases} d & \text{ถ้า } k = 1 \\ d+\sum_{i=1}^{k-1} 2(m-i) & \text{ถ้า } k > 1 \end{cases}$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $m > 1+d$ จะได้ว่า $\lambda(D) = d$ และพิสูจน์เช่นเดียวกับทฤษฎีบทประกอบที่ 3.4 จะได้ผลตามที่ต้องการ ❏

ทฤษฎีบทประกอบที่ 3.6 ให้ $D = D(n,r,d,m)$ ซึ่ง $m > n+d$, $d \geq 2$ และ k เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $1 \leq k \leq m+n-1$ จะได้ว่า

$$(\Delta) \qquad \lambda^{(k)}(D) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k}[2(n-i)+d] & \text{ถ้า } k \leq r \\ \sum_{i=1}^{k}[2(n-i)]+2kd-rd & \text{ถ้า } r < k \leq n \\ n^2-n+2nd-rd+\sum_{i=1}^{k-n}2(m-i) & \text{ถ้า } k > n \end{cases}$$

พิสูจน์ จะพิสูจน์โดยวิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์บน n

กรณีที่ $n = 1$ จะเป็นจริงโดยทฤษฎีบทประกอบที่ 3.4 และ 3.5

ให้ p เป็นจำนวนเต็มที่เป็นค่าคงตัวและ $p \geq 1$ สมมุติว่า (Δ) เป็นจริงสำหรับทุกๆ ไดกราฟ $D(p,r,d,m)$ ซึ่ง $m > p+d$ พิจารณาไดกราฟ $D(p+1,r,d,m)$ ซึ่ง $m > p+1+d$ โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 3.3 จะได้ว่า

$$\lambda^{(k)}(D) = \lambda^{(k-1)}(D-v)+\lambda(D)$$

เมื่อ $v \in V(K_{p+1})$ เนื่องจาก $D-v = D(p,r,d,m)$ และ $m > p+d$ โดยกำหนดให้ จะได้ว่า

$$\lambda^{(k-1)}(D) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k-1}[2(p-i)+d] & \text{ถ้า } k-1 \leq r-1 \\ \sum_{i=1}^{k-1}[2(p-i)]+2(k-1)d-(r-1)d & \text{ถ้า } r-1 < k-1 \leq n \\ p^2-p+2pd-(r-1)d+\sum_{i=1}^{k-1-p}2(m-i) & \text{ถ้า } k-1 > p \end{cases}$$

เนื่องจาก $\lambda(D) = 2p+d$ ถ้า $r \geq 1$ และ $\lambda(D) = 2p+2d$ ถ้า $r = 0$

แทนค่าและจัดใหม่ จะได้ว่า (Δ) เป็นจริงสำหรับไดกราฟ $D(p+1,r,d,m)$ เมื่อ $m > p+1+d$

โดยวิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์ จะได้ว่า (Δ) เป็นจริงสำหรับทุกๆไดกราฟ $D(n,r,d,m)$ เมื่อ $m > n+d$ ❑

โดยอาศัยผลลัพธ์ที่ได้ข้างต้นจะสามารถหาค่า arc-toughness ของไดกราฟ $D(n,r,d,m)$ ได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.7 ให้ $D = D(n,r,d,m)$ ซึ่ง $m > n+d$, $d \geq 2$ และ k เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $1 \leq k \leq m+n-1$ จะได้ว่า

$$\tau(D) = \min\{R_1, R_2, R_3, R_4\}$$

เมื่อ $R_1 = 2n+d-r-1$, $R_2 = 2n+d-(r+2)+\frac{d}{r+1}$, $R_3 = n+2d-1+\frac{rd}{n}$

และ $R_4 = 2n-(m+n)+\frac{2nd-rd+2(m-1)m}{m+n-1}$

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 3.6 จะได้ว่า

$$\Delta\lambda_k(D) = \begin{cases} 2(n-k)+d & \text{ถ้า } k\leq r \\ 2(n-k)+2d & \text{ถ้า } r<k\leq n \\ 2(m+n-k) & \text{ถ้า } k>n \end{cases}$$

เนื่องจาก $\{\Delta\lambda_k(D) \mid 1 \leq k \leq m+n-1\}$

$$= \{2(n-k)+d \mid 1\leq k\leq r\} \cup \{2(n-k)+2d \mid r+1\leq k\leq n\} \cup \{2(m+n-k) \mid n+1\leq k\leq m+n-1\}$$

และลำดับทั้งสามคือ

$\{2(n-k)+d \mid 1\leq k\leq r\}$, $\{2(n-k)+2d \mid r+1\leq k\leq n\}$ และ $\{2(m+n-k) \mid n+1\leq k\leq m+n-1\}$

เป็นลำดับที่ไม่เพิ่ม โดยทฤษฎีบทที่ 2.2 จะได้ว่า

$$\tau_1(D) = \min\left\{\frac{\lambda^r}{r}, \frac{\lambda^{r+1}}{r+1}, \frac{\lambda^n}{n}, \frac{\lambda^{n+1}}{n+1}, \frac{\lambda^{m+n-1}}{m+n-1}\right\}$$

ต่อไปจะแสดงว่า $\frac{\lambda^n}{n} \leq \frac{\lambda^{n+1}}{n+1}$

โดยทฤษฎีบทประกอบที่ 3.6 และ $m>n+d$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(n+1)\lambda^n &= n\lambda^n + \lambda^n = n\lambda^n + 2n^2-n(n+1)+2nd-rd \\ n\lambda^{n+1} &= n(\lambda^n + \Delta\lambda_{n+1}) \\ &= n[\lambda^n + 2(m-1)] \\ &\geq n\lambda^n + 2n^2+2nd\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{\lambda^n}{n} \leq \frac{\lambda^{n+1}}{n+1}$ นั่นคือ

$$\tau_1(D) = \min\left\{\frac{\lambda^r}{r}, \frac{\lambda^{r+1}}{r+1}, \frac{\lambda^n}{n}, \frac{\lambda^{m+n-1}}{m+n-1}\right\}$$

โดยการใช้ทฤษฎีบทประกอบที่ 3.6 อีกครั้งหนึ่ง จะได้ว่าทฤษฎีบทนี้เป็นจริง

□