2. ความรู้พื้นฐาน

ไดกราฟ D คือคู่อันดับ (V(D),A(D)) โดยที่ V(D) เป็นเซตจำกัดที่ไม่เป็นเซตว่างของสมาชิกที่เรียกว่า จุด และ A(D) เป็นแฟมมิลี่จำกัดของคู่อันดับของสมาชิกใน V(D) ซึ่งเรียกสมาชิกของ A(D) ว่า อาร์ค ทิศทางของอาร์คในไดกราฟจะแทนด้วยลูกศร อาร์คที่มี v เป็นจุดเริ่มต้นและมี w เป็นจุดปลายลูกศร เขียนแทนด้วย (v,w)

ถ้า D = (V(D),A(D)) เป็นไดกราฟ จะกล่าวว่าไดกราฟ D' = (V'(D),A'(D)) เป็นสับไดกราฟของ D ถ้า V'(D) และ A'(D) เป็นสับเซตของ V(D) และ A(D) ตามลำดับ

ถ้า D เป็นไดกราฟ จะเรียกกราฟที่ได้จาก D โดยการลบลูกศรออกว่า อันเดอร์ไลอิงกราฟของ D

จะเรียกไดกราฟ D ว่า simple digraph ถ้าอาร์คทั้งหมดของ D แตกต่างกันและ D ไม่มีลูป (ลูปคืออาร์คที่อยู่ในรูป (v,v)) และเรียก D ว่า multidigraph ถ้าอาร์คไม่แตกต่างกันทั้งหมดหรือมีลูป

จะเรียก simple digraph D ว่า ไดกราฟบริบูรณ์ ถ้า A(D) = V(D)xV(D) – เซตของลูป ไดกราฟบริบูรณ์ที่มี n จุดเขียนแทนด้วย K_n

จะกล่าวว่าจุด v และ w ในไดกราฟ D เป็นจุกประชิดกัน (adjacent) ถ้ามีอาร์คใน A(D) ที่อยู่ในรูป (v,w) หรือ (w,v) และกล่าวว่า v หรือ w อินซิเดนท์ (incident) กับอาร์ค (v,w) หรือ (w,v)

จะเรียกจำนวนอาร์คที่มี v เป็นจุดเริ่มต้นว่า out-degree ของ v เรียกจำนวนอาร์คที่มี v เป็นจุดปลายว่า in-degree ของ v และเรียกผลบวกของ out-degree กับ in-degree ของ v ว่าดีกรีของ v เขียนแทนด้วย $\deg_D(v)$

ไดวอล์ค (diwalk) จากจุด v_1 ถึง v_n ในไดกราฟ D คือลำดับจำกัดที่สลับกันระหว่างจุดและอาร์คของ D ในรูป $v_1, a_1, v_2, a_2, \ldots, v_{n-1}, a_{n-1}, v_n$ โดยที่ $a_i = (v_i, v_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ และจะเขียนแทนด้วย $v_1, v_2, \ldots, v_n$

ไดเทรล (ditrail) คือไดวอล์คที่มีอาร์คทั้งหมดแตกต่างกัน

ไดพาธ (dipath) คือไดเทรลที่มีจุดต่างกัน

จะเรียกไดกราฟ D ว่าเป็นคอนเนคเตดไดกราฟ (connected digraph) หรือวีคลี่-คอนเนคเตด (weakly connected) ถ้าอันเดอร์ไลอิงกราฟของไดกราฟ D เป็นคอนเนคเตดกราฟ

จะเรียกสับไดกราฟที่เป็นคอนเนคเตดไดกราฟที่มีขนาดใหญ่ที่สุดว่า องค์ประกอบ (component) ของไดกราฟ

Peng และคณะได้หาขอบเขตของ edge-toughness สำหรับกราฟใดๆ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.1 ให้ G เป็นกราฟซึ่งมีอันดับ p และมี edge-connectivity λ จะได้ว่า

$$\frac{p\lambda}{2(\lambda-1)} \leq \tau_1(G) \leq \lambda$$

และจากทฤษฎีบทนี้ จะได้บทแทรกที่เป็นขอบเขตของ esge-toughnss ของกราฟ G ดังนี้

บทแทรก สำหรับกราฟ G ใดๆ ซึ่งมี edge-connectivity λ

$$\frac{p}{2} \leq \tau_1(G) \leq \lambda$$

ถ้า G เป็นกราฟที่คอนเนค ซึ่งมีอันดับ p และขนาด q ใน [7] D.L.Goldlmith, B.Manvel and V.Faber ได้แนะนำสัญญลักษณ์ $\lambda^{(i)}(G)$ ซึ่งเรียกว่า edgd-connectivity อันดับที่ i ซึ่งหมายถึงจำนวนด้านที่น้อยที่สุดของ G ซึ่งเมื่อลบออกจาก G แล้วทำให้จำนวน component ของ G เพิ่มขึ้น i components และถ้าให้

$$B = \left\{ \frac{\lambda^{(i)}(G)}{i} \mid i = 1,2,3,\ldots,p-1 \right\}$$

จากความหมายนี้จะได้ว่า $\tau_1(G) = \min B$ และจากความหมายของ $\lambda^{(i)}(G)$ จะเห็นว่า

$$\lambda^{(0)}(G) = 0\ ,\quad \lambda^{(1)}(G) = \lambda(G) \quad \text{และ} \quad \lambda^{(p-1)}(G) = q$$

แต่ละค่า $i = 1,2,3,\ldots,p-1$ ถ้าเขียน

$$\Delta\lambda_i(G) = \lambda^{(i)}(G) - \lambda^{(i-1)}(G)$$

ซึ่งจะเป็นจำนวนเต็มบวกเสมอ หรืออาจจะเขียน $\Delta\lambda_i$ แทน $\Delta\lambda_i(G)$ และเขียน $\lambda^{(i)}$ แทน $\lambda^{(i)}(G)$ ต่อไปถ้าให้

$$k_i = \frac{\lambda^{(i)}(G)}{i}\ ,\ i = 1,2,3,\ldots,p-1$$

จะได้ว่า $\tau_1(G) = \min \{k_i \mid i = 1,2,3,\ldots,p-1\}$ และ Peng และคณะยังแสดงให้เห็นว่า $\tau_1(G)$ สามารถหาได้จากสับเซตแท้ของเซตนี้ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.2 ให้ G เป็นกราฟที่มีอันดับ p และ edge-connectivity λ สมมุติว่าลำดับ

$$\{ \Delta\lambda_i \mid i = 1,2,3,\ldots,p-1\}$$

แบ่งออกเป็น n ลำดับย่อย

$$f_i = \{ \Delta\lambda_i \mid r_{i+1} \leq i \leq r_{j+1}=1\} \text{ เมื่อ } r_0 = 0\ ,\ r_n = p-1 \text{ และ}$$

$$k_i = \frac{\lambda^{(i)}(G)}{i}\ ,\ i = 1,2,3,\ldots,p-1$$

(i) ถ้าแต่ละค่า $j = 1,2,3,\ \ldots\ ,\ n-1$, f_j เป็นลำดับที่ไม่เพิ่ม แล้ว

$$\tau_1(G) = \min \{ k_{r_1},\ k_{r_j+1}, k_{r_{j+1}} \mid i = 1,2,3,\ldots,n \}$$

(ii) ถ้า f_0 เป็นลำดับที่ไม่ลด และ แต่ละค่า $j = 1,2,3,\ldots,n-1$, fj เป็นลำดับที่ไม่เพิ่ม แล้ว

$$\tau_1(G) = \min \{ \lambda,\ k_{r_j+1}, k_{r_{j+1}} \mid i = 1,2,3,\ldots,n \}$$

โดยทฤษฎีบทนี้ ทำให้สามารถแสดงได้ว่าทฤษฎบที่ 1.1 เป็นจริง และเนื่องจากทฤษฎีบทนี้เป็นจริง สำหรับกรณีที่ G เป็น multigraph ด้วย ดังนั้นถ้ากราฟ G ในทฤษฎีบทที่ 2.2 เป็นไดกราฟที่ได้จากกราฟ G โดยที่ทุกคู่ของจุดใน G ที่ adjacent กันจะมีอาร์คเชื่อมสองทิศทาง จะได้ว่า arc-toughness ของไดกราฟที่ได้จาก G ดังกล่าวจะเป็นสองเท่าของ edge-toughness ของกราฟ G เสมอ