1. บทนำ

ให้ G เป็นซิมเปิลกราฟซึ่งมี V(G) เป็นเซตของจุดยอดและ E(G) เป็นเซตของด้าน $\omega(G)$ เป็นจำนวนคอมโพเนนท์ของกราฟ G จะเรียกเซตย่อย S ของ V(G) ว่า vertex-cutset ของ G ถ้า $\omega(G-S) > 1$ ใน [4] V. Chav'atal ได้กำหนด vertex-toughness ของกราฟ G ซึ่งกำหนดโดย

$$\tau(G) = \min \left\{ \frac{|S|}{\omega(G-S)} \mid S \text{ เป็น vertex-cutset ของ } G \right\}$$

และจะเรียกเซตย่อย X ของ E(G) ว่า edge-cutset ของ G ถ้า $\omega(G-X) > 1$ Chav'atal ได้กำหนด edge-toughness ของ G ว่า คือ

$$\min \left\{ \frac{|X|}{\omega(G-X)} \mid X \text{ เป็น edge-cutset ของ } G \right\}$$

แต่การกำหนดจำนวน edge-toughness ของ G โดยวิธีนี้ไม่น่าสนใจมากนัก เพราะว่าจำนวนนี้จะมีค่าเป็นครึ่งหนึ่งของ $\lambda(G)$ เสมอ

ดังนั้นเพื่อให้จำนวน edge-toughness น่าสนใจขึ้น ใน [11] Y.H. Peng, C.C. Chen and K.M. Koh จึงได้กำหนดจำนวน edge-toughness ของ G ใหม่โดยแทนค่า $\omega(G-X)$ ด้วย $\omega(G-X)-1$ นั่นคือ edge-toughness ของกราฟ G เขียนแทนด้วย $\tau_1(G)$ กำหนด โดย

$$\tau_1(G) = \min \left\{ \frac{|X|}{\omega(G-X)-1} \mid X \text{ เป็น edge-cutset ของ } G \right\}$$

จากนิยามนี้ Peng และคณะได้หาจำนวน edge-toughness ของวงศ์ของกราฟซึ่งมีลักษณะดังนี้ ให้ n,d และ m เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $d \le m$ และให้ G(n,d,m) แทนกราฟซึ่งประกอบด้วยกราฟบริบูรณ์ K_n และ K_m ซึ่งไม่มีจุดร่วมกัน และแต่ละจุดยอดของ K_m จะเชื่อมกับจุดที่แตกต่างกันของ K_m เป็นจำนวน d จุด ซึ่ง Peng และคณะสามารถพิสูจน์ได้ว่า

ทฤษฎีบทที่ 1.1 ให้ G = G(n,d,m) ซึ่ง m>n+d ถ้า p และ q เป็นอันดับและขนาดของ G ตามลำดับแล้ว

$$\tau_1(G) = \begin{cases} \dfrac{q}{p-1} & \text{ถ้า } n+d+1<m\le n+2d-1 \\[2ex] \dfrac{n-1+2d}{2} & \text{ถ้า } m>n+2d-1 \end{cases}$$

สำหรับไดกราฟใดๆ ใน [1] เที่ยง ภูมิสะอาด และประกิต จำปาชนม์ ได้ให้นิยาม arc-toughness ของไดกราฟทำนองเดียวกันกับ edge-toughness ของกราฟ กล่าวคือ ถ้า D เป็นไดกราฟ ซึ่งมี V(D) เป็นเซตของจุดและ A(D) เป็นเซตของอาร์ค จะเรียกเซตย่อย X ของ A(D) ว่า arc-cutset ของ D ถ้า $\omega(D-X) > 1$ และกำหนดให้ arc-toughness ของ D คือ

$$\tau(D) = \min \left\{ \frac{|X|}{\omega(D-X)-1} \mid X \text{ เป็น arc-cutset ของ } D \right\}$$

สำหรับวงศ์ของไดกราฟซึ่งมีลักษณะดังนี้ ให้ n,m,d และ r เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $r \leq d \leq m$ และให้ D(n,d,r,m) เป็นไดกราฟซึ่งประกอบด้วยไดกราฟบริบูรณ์ K_n และ K_m ซึ่งไม่มีจุดยอดร่วมกัน และแต่ละจุดยอดของ K_n จะเชื่อมกับจุยอดที่แตกต่างกันของ K_m เป็นจำนวน d จุด โดยที่ใน จำนวน d จุดนี้มี r จุดซึ่งเชื่อมกันในสองทิศทาง แต่ d-r จุดที่เหลือเชื่อมกันเพียงทิศทางเดียว เที่ยง และ ประกิต สามารถพิสูจน์ได้ว่า

ทฤษฎีบทที่ 1.2 ให้ D = D(n,d,r,m) ซึ่ง m>n+d ถ้า p และ q เป็นอันดับและขนาดของ D ตามลำดับแล้ว

$$\tau(D) = \begin{cases} \dfrac{q}{p-1} & \text{ถ้า } n+d+1<m\leq n+d+r-1 \\ n+d+r-1 & \text{ถ้า } m>n+d+r-1 \end{cases}$$

ในงานวิจัยนี้ต้องการหา arc-toughness ของวงศ์ของไดกราฟซึ่งมีลักษณะดังนี้ ให้ n,m,d และ r เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $r \leq n$ จะให้ D(n,r,d,m) คือไดกราฟซึ่งประกอบด้วยไดกราฟบริบูรณ์ K_n และ K_m ซึ่งไม่มีจุดร่วมกัน โดยที่แต่ละจุดยอดของ K_n จะอาร์คเชื่อมกับจุดที่แตกต่างกันของ K_m เป็นจำนวน d จุดที่แตกต่างกัน และในจำนวน n จุดของ K_n นี้มี r จุดที่มีอาร์คเชื่อมในทิศทางเดียว ส่วน n-r จุดที่เหลือมีอาร์คเชื่อมสองทิศทาง