บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยครั้งนี้เป็นการเปรียบเทียบค่าสถิติจากวิธีการสุ่มแบบง่ายและสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณ ภายใต้ลักษณะการแจกแจงค่าความยากของประชากรข้อสอบแบบปกติ แบบเบ้ซ้าย และแบบเบ้ขวา โดยใช้วิธีมอนติ คาร์โล ผู้วิจัยขอเสนอเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังนี้

1. วิธีการสุ่มแบบง่ายและวิธีการสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณ
2. การวิจัยโดยใช้วิธีมอนติ คาร์โล
3. ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

วิธีการสุ่มแบบง่ายและวิธีการสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณ

วิธีการสุ่มแบบง่าย (Simple Random Sampling: SRS)

โดยทั่วไปการเก็บข้อมูลทางการศึกษา จะทำการสุ่มผู้สอบจากประชากรที่กำหนดแล้วให้ตอบแบบทดสอบหรือข้อสอบทั้งฉบับ จากนั้นจึงทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ของประชากร จากค่าคะแนนเฉลี่ยของตัวอย่างหรือที่เรียกว่าค่าประมาณค่าคะแนนเฉลี่ยของประชากร และความแปรปรวนของตัวอย่างหรือที่เรียกว่าค่าประมาณความแปรปรวนของประชากร อุทุมพร จามรมาน (อุทุมพร จามรมาน, 2532,หน้า 79) พบว่า การที่จะรู้จักประชากรให้ดีต้องใช้เวลานานมาก ผู้วิจัยอาจไม่มีเวลาเพียงพอ เพราะต้องใช้เวลาไปในการสร้างเครื่องมือวิจัย ไปเก็บข้อมูล วิเคราะห์ และเขียนรายงาน จึงเกิดความขัดข้องในเรื่องข้อมูลเกี่ยวกับประชากร ทำให้ข้อมูลที่เกี่ยวกับประชากรทางการศึกษามักจะไม่สมบูรณ์เหมือนข้อมูลทางวิทยาศาสตร์ การที่จะทราบค่าพารามิเตอร์เป็นเรื่องยากเพราะการวิจัยทางการศึกษามักไม่ทำต่อเนื่องแบบวิทยาศาสตร์ การอ้างอิงค่าพารามิเตอร์จากงานวิจัยอื่นก็ทำไม่ได้เช่นกัน ทำให้การประมาณค่าพารามิเตอร์ไม่มีความหมาย

เพราะเมื่อประมาณมาแล้วไม่ทราบว่าจะครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ที่แท้จริงหรือไม่ และจากหลักที่ว่า "ถ้ารู้จักประชากรมากเพียงใด ก็จะได้ตัวอย่างที่เป็นตัวแทนประชากรมากเท่านั้น" นี้เป็นสิ่งที่ผู้วิจัยควรพิจารณาเพื่อให้ตัวอย่างที่ได้เป็นตัวแทนประชากรของงานวิจัย แทนที่จะเป็นตัวอย่างของประชากรไหนก็ไม่ทราบ การสรุปข้อมูลที่ได้จากตัวอย่างดังกล่าวนี้จึงจะสามารถสรุปได้

การสุ่มแบบง่ายโดยอาศัยทฤษฎีความน่าจะเป็น เป็นการสุ่มที่ดีและมีหลายวิธีการให้เลือกใช้ เช่น สุ่มโดยอาศัยการจับสลากจากกรอบการสุ่ม หรืออิงตารางเลขสุ่ม วิธีนี้ทุก ๆ หน่วยตัวอย่างที่อยู่ในกรอบการสุ่มจะได้รับโอกาสในการถูกเลือกเท่า ๆ กัน (อุทุมพร จามรมาน, 2532, หน้า 6) นอกจากนี้สิ่งที่ควรคำนึงถึงก่อนทำการสุ่ม คือต้องการสุ่มแบบใส่กลับคืน (With Replacement) เพื่อให้ทุกหน่วยตัวอย่างมีโอกาสถูกเลือกได้อีก หรือต้องการสุ่มแบบไม่ใส่กลับคืน (Without Replacement) คือทุกหน่วยตัวอย่างมีโอกาสถูกเลือกได้เพียงครั้งเดียว

ดังนั้น ผลดีของการสุ่มแบบง่าย ได้แก่ สามารถลดอคติอันเกิดจากการเลือกประชากรหรือตัวอย่างได้ และทำการศึกษาวิเคราะห์ทางสถิติได้ ส่วนผลเสีย ได้แก่ ปัญหาในการติดตามประชากรหรือตัวอย่างที่ถูกเลือก ถ้าที่อยู่ของประชากรอยู่ในพื้นที่กว้างขวางมากและมีความยุ่งยากในการกำหนดประชากรที่กำหนด (เชิดลาภ วสุวัต, 2534, หน้า 184)

ตัวอย่างวิธีการสุ่มแบบง่าย เช่น มีประชากรผู้สอบจำนวน 1,200 คน ประชากรข้อสอบจำนวน 600 ข้อ ต้องการสุ่มแบบไม่ใส่กลับคืน โดยสุ่มตัวอย่างผู้สอบให้ได้ 200 คน ดำเนินการโดยกำหนดเลขที่ให้กับผู้สอบทุกคน ตั้งแต่เลขที่ 1 ถึงเลขที่ 1,200 ต้องการตัวอย่าง 200 คน จากประชากร 1,200 คน จากนั้นจับฉลากมาจำนวน 1 เบอร์ สมมติว่าจับฉลากได้หมายเลข 2 นั่นคือ ตัวอย่างคนที่หนึ่งได้แก่หมายเลขเลขที่ 2 คนถัดไป ก็จับฉลากขึ้นมาเรื่อย ๆ ไปเรื่อย ๆ จนครบจำนวน 200 คน จากนั้นให้ตัวอย่างผู้สอบแต่ละคนทำแบบทดสอบทั้งฉบับ

วิธีการสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณ (Multiple Matrix Sampling: MMS)

กรณีที่ไม่สามารถทำการทดสอบกับประชากรทั้งหมดได้ และงานวิจัยต้องการอ้างอิงไปสู่ประชากร สิ่งสำคัญสำหรับนักวิจัยคือการสุ่มตลอดจนกำหนดจานวนตัวอย่างให้น้อยที่สุดที่พอเหมาะต่องานวิจัย เพื่อเป็นการประหยัด ค่าใช้จ่าย เวลา และแรงงานในการเก็บรวบรวมข้อมูล

ในการวิจัยครั้งนี้ เพื่อให้เกิดความเข้าใจเกี่ยวกับวิธีการสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคุณ ผู้วิจัยขออธิบายถึงวิธีการเก็บข้อมูลกรณีต่าง ๆ ดังนี้ (Gold, Basch and McDermott, 1983, pp.273-274)

1. ถ้าต้องการข้อมูลจากประชากรที่กำหนด (Defined Population) ทั้งหมดและให้ตอบคำถามหรือข้อสอบทุกข้อของประชากรข้อสอบ โดยไม่มีการสุ่มใดๆ ทั้งสิ้น ซึ่งการทำเช่นนี้เรียกว่าการทำสำมะโนประชากร (Census Taking) ผู้วิจัยสามารถจัดกระทำเมื่อประชากรมีจำนวนไม่มากทั้งผู้สอบและข้อสอบ และค่าทางสถิติต่าง ๆ ที่ได้ก็คือค่าที่แท้จริงของประชากรหรือที่เรียกว่าค่าพารามิเตอร์ (Parameter) ตัวอย่างเช่น ประชากรผู้สอบ จำนวน 1,000 คน และประชากรข้อสอบ จำนวน 100 ข้อ เป็นต้น

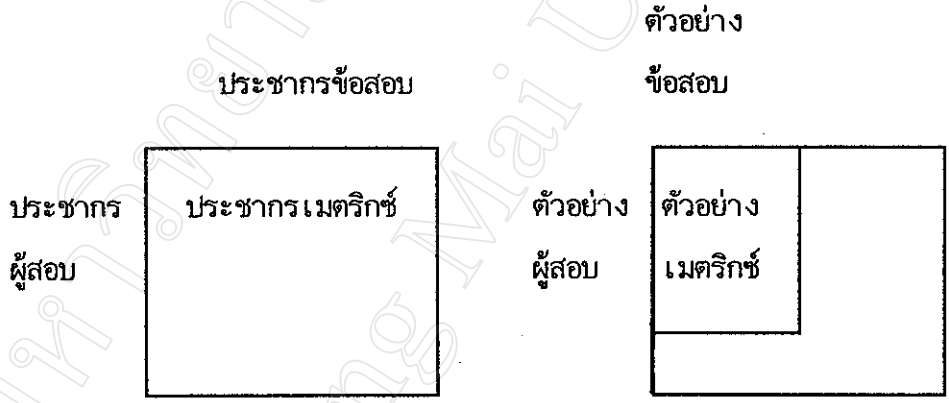
2. ถ้าประชากรผู้สอบจากประชากรที่กำหนดมีจำนวนมาก การลดจำนวนผู้สอบเพื่อให้การเก็บรวบรวมข้อมูลเป็นไปได้อย่างมีประสิทธิภาพ เรียกว่า การสุ่มตัวอย่างผู้สอบเพียงอย่างเดียว (Examinee Sampling) และให้ทำประชากรข้อสอบทุกข้อ ตัวอย่างเช่น สุ่มตัวอย่างผู้สอบมา 250 คน จากประชากรผู้สอบ 1,000 คน แล้วให้ทำข้อสอบทั้งฉบับ จำนวน 100 ข้อ ซึ่งวิธีการเช่นนี้นักวิจัยส่วนมากนิยมใช้กัน และนิยมเรียกวิธีการสุ่มชนิดนี้ว่าการสุ่มแบบง่าย (Simple Random Sampling)

3. ถ้าผู้วิจัยมีประชากรที่กำหนด เช่น ประชากรผู้สอบมีจำนวนไม่มากแต่ประชากรข้อสอบมีจำนวนข้อสอบมาก เช่น ข้อสอบจากคลังข้อสอบ จึงเลือกใช้การสุ่มจากประชากรข้อสอบหรือเรียกว่าการสุ่มข้อสอบ (Item Sampling) วิธีการนี้เป็นแนวทางหนึ่งในการนำมาใช้แก้ไขปัญหาเกี่ยวกับการจัดการสอบ โดยใช้วิธีการสุ่มข้อสอบจากประชากรข้อสอบแล้วให้ประชากรผู้สอบทำการสอบ ตัวอย่างเช่นสุ่มตัวอย่างข้อสอบมา 25 ข้อ จากคลังข้อสอบ 100 ข้อ แล้วให้ประชากรผู้สอบทั้งหมด 1,000 คน ตอบข้อสอบชุดย่อยจานวน 25 ข้อ เป็นต้น

4. ถ้าผู้วิจัยมีประชากรที่กำหนด และประชากรข้อสอบเป็นจำนวนมากทั้งคู่ จึงทำการสุ่มผู้สอบและข้อสอบ (Examinee And Item Sampling) เนื่องจากมีลักษณะการสุ่มแบบสองทาง จึงนิยมเรียกการสุ่มแบบนี้ว่า การสุ่มแบบเมตริกซ์ (Matrix Sampling)

ดังตัวอย่างเช่น สุ่มผู้สอบมาจำนวน 250 คน จากประชากรผู้สอบ 1,000 คน เพื่อทำตัวอย่างข้อสอบจำนวน 25 ข้อ ที่สุ่มมาจากประชากรข้อสอบ 100 ข้อ เป็นต้น

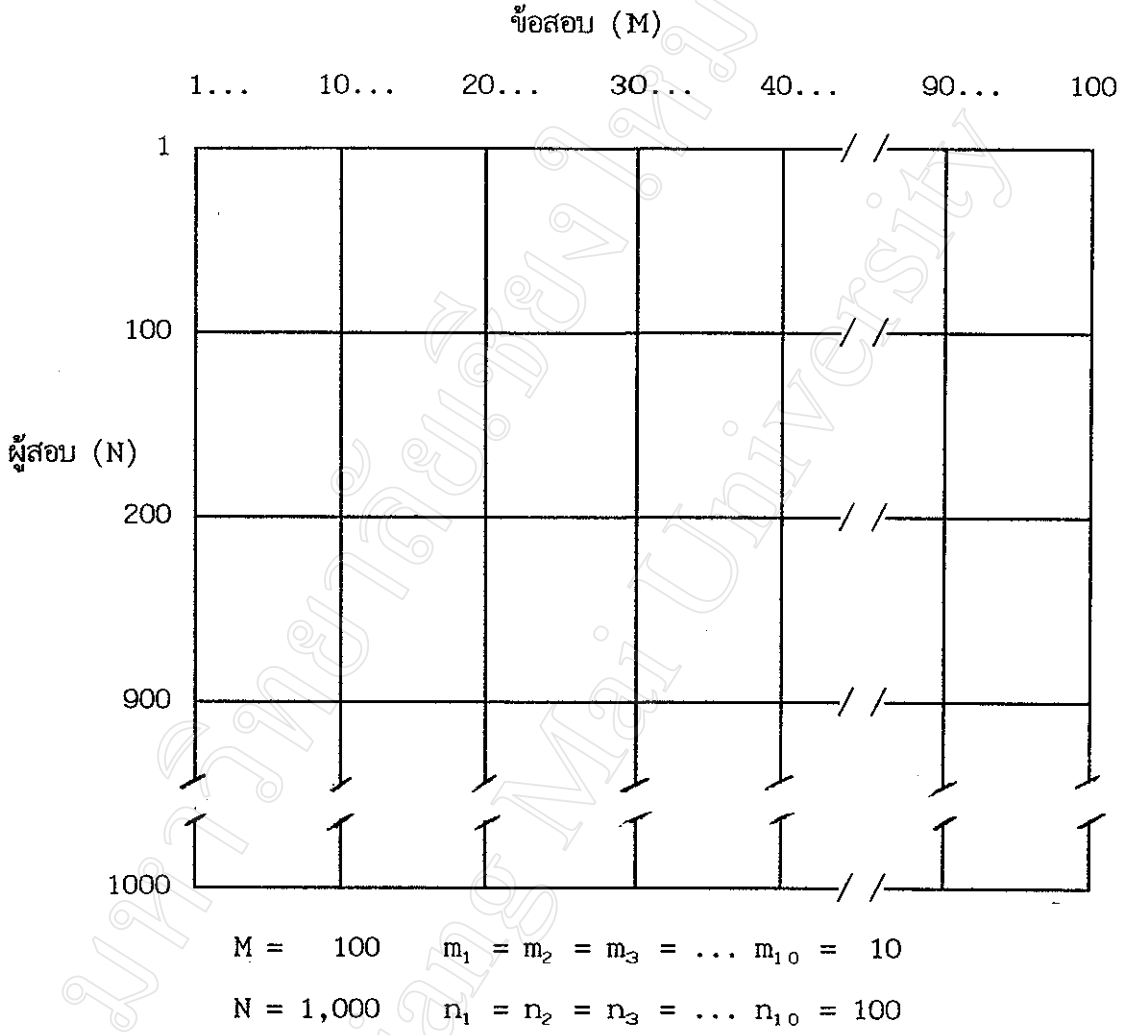
ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการสุ่มแบบเมตริกซ์ (Matrix Sampling) และการสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณ (Multiple Matrix Sampling) คือถ้านำข้อมูลที่ได้จากผู้สอบแต่ละคนที่ทำข้อสอบฉบับหนึ่ง แล้วนำข้อมูลเหล่านั้นมาจัดเรียงแบบตารางสองทาง ข้อมูลดังกล่าวจะเรียกว่าเมตริกซ์ข้อมูล (Data Matrix) (Sirotnik, 1974, p. 457) ส่วนข้อมูล หรือคะแนนที่ได้จากประชากรผู้สอบแต่ละคนทำข้อสอบทั้งฉบับ (ประชากรข้อสอบ) แล้วนำมาจัดเรียงเป็นเมตริกซ์ข้อมูล เรียกเมตริกซ์ข้อมูลนี้ว่า ประชากรเมตริกซ์ (Matrix Population) แต่ถ้าเป็นการสุ่มแบบเมตริกซ์ ข้อมูลหรือคะแนนซึ่งได้จากการสุ่มผู้สอบหนึ่งกลุ่มและจากการสุ่มข้อสอบมาหนึ่งชุด กรณีนี้เรียกเมตริกซ์ข้อมูลว่า ตัวอย่างเมตริกซ์ (Matrix Sample)



ภาพประกอบ 1 ประชากรเมตริกซ์และตัวอย่างเมตริกซ์

จากภาพประกอบ 1 ข้อมูลที่ได้จากทั้งประชากรผู้สอบและประชากรข้อสอบ เรียกว่าประชากรเมตริกซ์ ส่วนข้อมูลที่ได้จากการสุ่มผู้สอบและข้อสอบ จากประชากรผู้สอบและประชากรข้อสอบ เรียกว่า ตัวอย่างเมตริกซ์

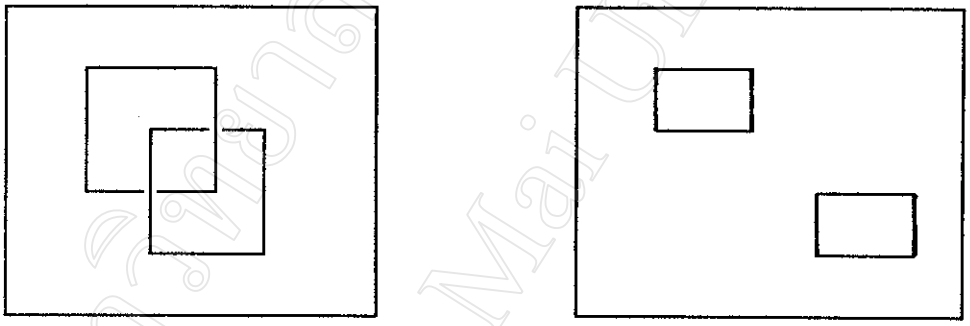
5. การสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณ (Multiple Matrix Sampling) เป็นการสุ่มข้อสอบและแบ่งออกเป็นชุดย่อยของตัวอย่างข้อสอบ (Subtests) หลาย ๆ ชุด และสุ่มผู้สอบแยกเป็นกลุ่มย่อยให้มีจำนวนเท่ากับจำนวนชุดย่อยของตัวอย่างข้อสอบ แล้วสุ่มกลุ่มย่อยของตัวอย่างผู้สอบให้ได้รับแต่ละชุดย่อยของตัวอย่างข้อสอบจนครบ



ภาพประกอบ 2 การสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณ

จากภาพประกอบ 2 ประชากรข้อสอบทั้งหมด 100 ข้อ ถูกแบ่งออกเป็นชุดย่อยตัวอย่างข้อสอบจำนวน 10 ชุด แต่ละชุดประกอบด้วยตัวอย่างข้อสอบจำนวน 10 ข้อ เช่นเดียวกัน ประชากรผู้สอบทั้งหมด 1,000 คน แบ่งเป็นจำนวน 10 กลุ่ม จำนวนตัวอย่างกลุ่มละ 100 คน จัดชุดย่อยตัวอย่างข้อสอบทั้ง 10 ชุด ให้กลุ่มตัวอย่างผู้สอบทั้ง 10 กลุ่ม สอบโดยวิธีการสุ่ม ซึ่งจะเห็นได้ว่าการสุ่มวิธีนี้ ช่วยให้ตัวอย่างผู้สอบทำการสอบข้อสอบที่มีจำนวนตัวอย่างข้อสอบน้อยข้อในแต่ละชุด ทำให้ไม่เกิดความเบื่อหน่ายในการสอบ

การสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณมีรูปแบบการสุ่ม สองรูปแบบ รูปแบบที่หนึ่งได้แก่การสุ่มแบบใส่คืน (With Replacement) โดยสมาชิกของกลุ่มประชากรที่ถูกสุ่มเป็นตัวอย่างของข้อสอบต่างๆ ในแบบทดสอบหรือผู้สอบแต่ละคนจะปรากฏในกลุ่มตัวอย่างต่างๆ มากกว่าหนึ่งกลุ่ม และรูปแบบที่สองได้แก่ การสุ่มตัวอย่างแบบไม่ใส่คืน (Without Replacement) ซึ่งสมาชิกของประชากรจะไม่ซ้ำกันในกลุ่มตัวอย่างต่างกลุ่ม คือสมาชิกหนึ่งอยู่ได้เพียงกลุ่มใดกลุ่มหนึ่งเท่านั้น รูปแบบการสุ่มตัวอย่างทั้งสองสามารถ แสดงตามภาพประกอบ 3 (Sirotnik, 1974, pp. 463-464)

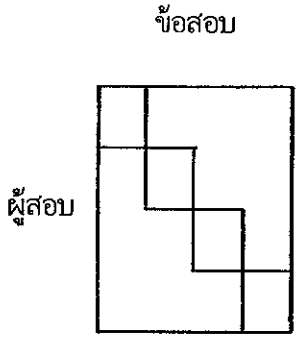


แบบใส่คืน แบบไม่ใส่คืน

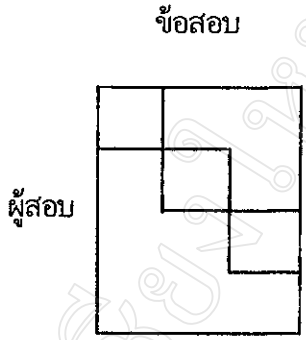
ภาพประกอบ 3 การสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณแบบใส่คืนและแบบไม่ใส่คืน

สำหรับการวิจัยครั้งนี้ ทำการสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณ แบบไม่ใส่คืน (Without Replacement) เพราะการสุ่มแบบนี้ เหมาะกับสภาพที่เป็นจริงในปัจจุบัน ในการปฏิบัติเป็นที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลาย

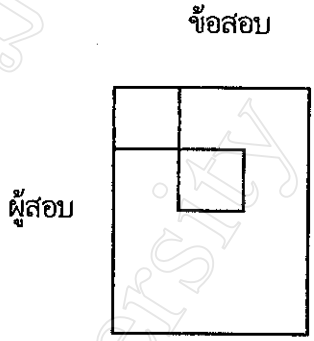
การสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณ แบบไม่ใส่คืน ยังมีการจัดรูปแบบลักษณะการสุ่มได้หลายรูปแบบ ไซรอทนิค (Sirotnik, 1974, p.466) ได้แสดงไว้พอเข้าใจเป็นสังเขป ห้า รูปแบบดังภาพประกอบ 4 คือ สุ่มแบบมีขนาดเท่ากันหรือแบบไม่เท่ากัน และมีการสุ่มแบบครบหมด (Exhausive) หรือแบบไม่ครบหมด (Nonexhausive)



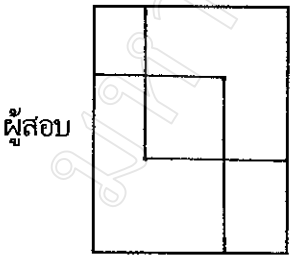
ก. สุ่มแบบครบทั้งประชากรข้อสอบและประชากรผู้สอบ แต่ละตัวอย่างเมตริกซ์มีขนาดเท่ากัน



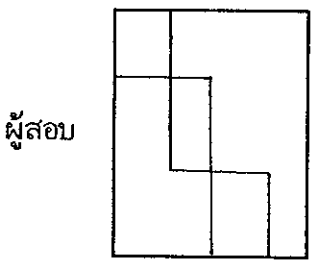
ข. สุ่มข้อสอบครบหมด สุ่มตัวอย่างผู้สอบไม่ครบ แต่ละตัวอย่างเมตริกซ์มีขนาดเท่ากัน



ค. สุ่มแบบไม่ครบทั้งประชากรข้อสอบและประชากรผู้สอบ แต่ละตัวอย่างเมตริกซ์มีขนาดเท่ากัน



ง. สุ่มแบบครบหมดทั้งประชากรข้อสอบและประชากรผู้สอบ แต่ละตัวอย่างเมตริกซ์มีขนาดไม่เท่ากัน



จ. สุ่มข้อสอบไม่ครบผู้สอบแบบครบหมดสุ่มแต่ละตัวอย่างเมตริกซ์มีขนาดไม่เท่ากัน

ภาพประกอบ 4 ลักษณะการสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณ

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Chiang Mai University

ข้อดีของวิธีการสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณ

ไซรอทนิค (Sirotnik, 1974, pp.469-476) และ ชูเมคเกอร์ (Shoemaker and Shoemaker, 1981, p.155) ได้กล่าวถึงข้อดีของวิธีการสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณดังนี้

1. ช่วยลดเวลาในการดำเนินการสอบ เพราะผู้สอบตอบชุดย่อยของข้อสอบ

2. นำมาใช้ได้เหมาะสมในเวลาที่จำกัดของการทดสอบความรู้ความเข้าใจ เพราะเวลาที่ใช้ขึ้นอยู่กับจำนวนข้อสอบของชุดย่อยของข้อสอบไม่ได้ขึ้นอยู่กับโดเมนของข้อสอบ (Item Domain)

3. กรณีประชากรที่กำหนดมีจำนวนมาก และพื้นที่กระจายหลายแห่งช่วยให้เก็บข้อมูลได้เร็วขึ้น หรือในโรงเรียนก็ช่วยให้กิจวัตรแต่ละวันของนักเรียนถูกรบกวนน้อยลง

4. เหมาะสำหรับ กรณีผู้สอบได้รับการทดสอบก่อนและหลังการสอน (Pre-Test and Post-Test) วิธีการสุ่มแบบพหุคูณช่วยให้ความจำเพาะของข้อสอบ (Test Specific) ลดลง

5. ช่วยประหยัดทางด้านเศรษฐกิจ เช่น เวลา ค่าใช้จ่าย บุคคลากร เป็นต้น

6. กรณีแบบทดสอบมีจำนวนข้อสอบมาก วิธีการสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณ มีความเหมาะสมมากกว่าวิธีการสุ่มแบบง่าย

7. เมื่อใช้จำนวนผู้สอบเท่ากันพบว่าการสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณที่สุ่มมาจากแบบไม่ใส่คืน (Without Replacement) และสุ่มแบบครบหมดทุกอย่าง (Exhausive) นั้น มีความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าคะแนนเฉลี่ย น้อยกว่า วิธีการสุ่มแบบอื่น ๆ

ข้อจำกัดของวิธีการสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณ

ไซรอทนิค (Sirotnik, 1974, pp. 469-476) และชูเมคเกอร์ (Shoemaker and Shoemaker, 1981, pp.155-156) ได้สรุปข้อจำกัดของวิธีการสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณไว้ดังนี้

1. มีความซับซ้อนยุ่งยากในการดำเนินการสอบ หรือการประเมินโครงการเพราะ ต้องจัดเตรียมทั้งตัวอย่างชุดย่อยของผู้สอบ และตัวอย่างแบบทดสอบชุดย่อยก่อนดำเนินการสอบ

2. ปัญหาของจำนวนผู้สอบและจำนวนข้อสอบในแต่ละตัวอย่างชุดย่อย ซึ่งต้องคำนึงถึงเรื่องสุ่มแบบครบหมด (Exhausive) หรือสุ่มแบบไม่ครบหมด (Nonexhausive) รวมทั้งสุ่มแบบใส่กลับคืนหรือแบบไม่ใส่กลับคืน

3. การคำนวณค่าประมาณพารามิเตอร์ยุ่งยาก จำเป็นต้องใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ช่วยในการประมวลผลข้อมูล

4. ปัญหาในเรื่องของสัดส่วนของข้อสอบในแต่ละตัวอย่างชุดย่อยของข้อสอบ ซึ่งควรจะมีสัดส่วนเท่ากันกับชุดของประชากรข้อสอบ ในเรื่องของค่าความยากของข้อสอบ รวมทั้งเนื้อหาของข้อสอบว่ามีครบตามต้องการในชุดย่อยของตัวอย่างข้อสอบทุกชุด

5. ไม่เหมาะสำหรับการหาคะแนน หรือคำตอบของผู้สอบแต่ละคนเพราะคำตอบที่ได้เป็นคะแนนรวมของผู้สอบทั้งกลุ่ม

6. มีผลกระทบด้านบริบท (Context Effect) เล็กน้อยเมื่อเทียบผลการตอบตัวอย่างข้อสอบชุดย่อยของผู้สอบจากวิธีเมตริกซ์เชิงพหุคูณ แทนที่จะให้ผู้สอบตอบข้อสอบทั้งฉบับ (ประชากรข้อสอบ) ดังนั้นจึงไม่เหมาะสมต่อตัวอย่างข้อสอบชุดย่อยชนิดจำกัดเวลาสั้น ๆ (Speed Tests)

ขั้นตอนของวิธีการสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณ

ไซรอทนิค (Sirotnik, 1974, pp. 469-470) และชูเมคเกอร์ (Shoemaker and Shoemaker, 1981, p.154) ได้เสนอขั้นตอนของวิธีการสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณ เป็นลำดับขั้น ดังนี้

ขั้นที่ 1 แบ่งประชากรข้อสอบออกเป็นกลุ่มตามโดเมนของข้อสอบ (Item Domain) อย่างน้อยสองกลุ่มขึ้นไป

ขั้นที่ 2 ออกแบบ (Design) ขนาดของเมตริกซ์ว่าจะต้องใช้จำนวนกลุ่มเมตริกซ์ (k) กี่กลุ่ม ชุดย่อยของข้อสอบมีตัวอย่างข้อสอบจำนวน (m) กี่ข้อ และผู้สอบชุดย่อยมีตัวอย่างผู้สอบจำนวนชุดละ (n) กี่คน โดยเขียนเป็นแผนของ k/m/n

ขั้นที่ 3 แบ่งข้อสอบตามกลุ่มความรู้ต่าง ๆ ที่ต้องการวัด ออกเป็นชุดย่อยของข้อสอบจำนวน k ชุด โดยสุ่มข้อสอบตามชั้นภูมิของระดับค่าความยากของข้อสอบและตามเนื้อหาที่ต้องการ ให้มีสัดส่วนจำนวนข้อเท่ากันในแต่ละชุด และทำการสุ่มแบบไม่ใส่คืน

ขั้นที่ 4 ทำการสุ่มแบบง่ายว่าผู้สอบแต่ละกลุ่มย่อยจะได้รับชุดย่อยของข้อสอบชุดใดมาทำการสอบ

ขั้นที่ 5 กำหนดขอบเขตและข้อจำกัดซึ่งต้องกำหนดไว้ในการดำเนินการสอบ

ขั้นที่ 6 ดำเนินการสอบตามมาตรฐานการสอบ โดยระวังไม่ให้มีการสับเปลี่ยนชุดย่อยของข้อสอบ ในผู้สอบแต่ละกลุ่มที่จัดไว้

ขั้นที่ 7 คำนวณค่าสถิติหรือค่าประมาณพารามิเตอร์ต่าง ๆ โดยใช้คอมพิวเตอร์

การวิจัยโดยใช้วิธีมอนติ คาร์โล

1. ความเป็นมาของวิธีมอนติ คาร์โล

มอนติ คาร์โล เป็นสาขาหนึ่งของคณิตศาสตร์ ที่ใช้คอมพิวเตอร์ช่วยในการจำลองสถานการณ์ (Simulation) โดยอาศัยตัวเลขสุ่ม (Random Number) หรือเลขสุ่มเทียม (Pseudo Random Number) มาสร้างตัวแปรให้มีลักษณะใกล้เคียงกับสถานการณ์จริง และมีการทดลองซ้ำได้หลาย ๆ ครั้ง เพื่อให้ได้ค่าที่แน่นอนสำหรับสรุปหรืออธิบายปรากฏการณ์ต่าง ๆ ในสถานการณ์จริงนั้น ๆ หรือช่วยหาคำตอบในเรื่องราวต่าง ๆ ที่ยังไม่แน่ใจในผลที่จะเกิดขึ้น (Hammersley and Handscomb, 1964, p.2 อ้างใน ต่าย เชี่ยงฉี, 2537, หน้า 1) วิธีมอนติ คาร์โลถูกใช้แก้ปัญหาแรกเริ่มที่สุด คือ ในคริสศตวรรษที่ 17 ในปี ค.ศ.1733 จอร์ส หลุยส์ เลคเลอร์ และ บูฟฟอน (Georges Louis Leclere and Comte de Buffon) ได้พัฒนาทฤษฎีความน่าจะเป็น (Probability Theory) ทำการทดลองที่เรียกว่าปัญหาเข็มของบูฟฟอน (The Buffon's Needle Problem) เพื่อหาคำตอบที่ว่า ความน่าจะเป็น (Probability : P) ของเข็มยาว 1 หน่วย ถูกโยนแบบสุ่มลงมาบนพื้นราบ ที่มีการลากเส้นขนานบนพื้น โดยให้ระยะระหว่างเส้นขนานคู่หนึ่งๆ มีค่า d หน่วย โดยกำหนดให้ d มีค่ามากกว่า 1 แล้ว ความน่าจะเป็นที่เข็มตกลงมาตัดกับเส้นขนานนี้ มีค่า $P = 2\ 1/\pi d$ หรือเป็นค่าประมาณของอัตราส่วนของจำนวนครั้งที่โยนเข็มลงมาบนพื้นให้ตัดกับเส้นขนานต่อจำนวนครั้งของการโยนเข็มลงมาทั้งหมดนั่นเอง การทดลองที่สร้างชื่อเสียงให้กับ กอสเซท (W.S. Gosset) มากที่สุด คือ ในปี ค.ศ.1908 ได้นำวิธีมอนติ คาร์โล มาศึกษาสหสัมพันธ์ และการแจกแจงค่าที (t-distribution) (Rubinstein, 1981, pp.11-121, ต่าย เชี่ยงฉี 2534, หน้า 62, สมชัย ยืนนาน, 2538, หน้า 28) ชื่อมอนติ คาร์โล ถูกนำมาใช้โดย ฟอน นอยมันน์ และอูลาม (Von Neuman and Ulam) ระหว่างสงครามโลกครั้งที่สอง ในปี ค.ศ.1944 โดยใช้เป็นรหัสลับ ของงานที่ทำในลอส อาลามอส (Los Alamos) ซึ่งเป็นงานที่เกี่ยวข้องกับการสร้าง

ระเบิดปรมาณูในโครงการแมนฮัทตัน (Manhattan Project) โดยนำวิธีมอนติ คาร์โล มาหาผลของการแพร่อย่างสุ่มของนิวตรอน (Neutron Diffusion) ในวัสดุเชื้อเพลิง ซึ่งเป็นการทดลองทางคณิตศาสตร์เพื่อหาผลของคำตอบก่อนที่จะทำการทดลองจริง เพื่อเป็นการลดอันตรายและช่วยประหยัดค่าใช้จ่ายก่อนการทดลองจริง (บัญชา พนเจริญสวัสดิ์, 2527, หน้า 700, สมชัย ยืนนาน, 2538, หน้า 28) หลังจากนั้นวิธีมอนติ คาร์โล ถูกนำมาใช้อย่างกว้างขวาง ทั้งทางด้าน ฟิสิกส์ คณิตศาสตร์ สถิติและการวิจัย นับว่าวิธีมอนติ คาร์โล มีประโยชน์อย่างมากในการขยายความรู้ในเชิงทฤษฎี เช่น การนำมาศึกษาค่าความคลาดเคลื่อนทางสถิติ เปรียบเทียบประสิทธิภาพของการทดสอบต่าง ๆ (ต่าย เชี่ยงฉี, 2534, หน้า 63) เป็นต้น

2. ขั้นตอนของวิธีมอนติ คาร์โล

หลักการสำคัญของวิธีมอนติ คาร์โล (Monte Carlo Method) คือ การนำเอาตัวเลขสุ่ม (Random Number) มาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ซึ่งมีขั้นตอนที่สำคัญดังนี้

2.1 สร้างตัวเลขสุ่ม (Generate Random Number) ในระยะแรก ๆ กระทำโดยการอาศัยเครื่องมือทางกายภาพ เช่น ล้อรูเล็ต ลูกเต๋า ไพ่ กระดาษเขียนเบอร์ เป็นต้น ซึ่งเครื่องมือดังกล่าวใช้ได้เมื่อต้องการใช้ตัวเลขสุ่มจำนวนไม่มากนัก ต่อมามีการนำเอาเครื่องมืออิเล็กทรอนิกส์มาใช้ และที่นิยมใช้แพร่หลายที่สุด คือเครื่องสร้างตัวเลขสุ่มที่สร้างโดยบริษัทแรนด์ (Rand Co-oporation) ที่สร้างตัวเลขสุ่มได้เป็นล้านตัวจากเครื่องกำเนิดพัลส์ (Pulse) การสร้างหรือเลือกใช้ตัวเลขสุ่มจากเครื่องมืออิเล็กทรอนิกส์หรือที่เรียกว่าเครื่องคอมพิวเตอร์ยังมีปัญหา 2 ประการ คือ เป็นการยากที่จะทำให้คอมพิวเตอร์สามารถเรียกใช้ได้เมื่อมีความต้องการ และเป็นการยากที่จะทำให้เครื่องมือดังกล่าวสร้างตัวเลขสุ่มชุดเดิมเมื่อต้องการใช้เปรียบเทียบวิธีการต่าง ๆ ภายใต้เงื่อนไขของเลขสุ่มชุดเดียวกัน หรือถ้าจะเก็บเลขสุ่มเหล่านี้ไว้ในหน่วยความจำหรือจานแม่เหล็ก ก็จะทำให้สูญเสียหน่วยความจำ หรือเสียเวลาในการค้นหา ฉะนั้นการสร้างตัวเลขสุ่มในคอมพิวเตอร์ จึงนิยมสร้างตัวเลขสุ่มเทียม (Pseudo Random Number)โดยอาศัยสูตรทางคณิตศาสตร์ วิธีที่ใช้กันมากมี 2 วิธี คือ

วิธีที่ 1 โดยวิธีส่วนกลางกำลังสอง (Midsquare Method) เป็นวิธีที่ ฟอน นอยมันน์ ได้นำมาใช้ในปี ค.ศ.1940 ซึ่งเป็นยุคแรก ๆ ของการสร้างตัวเลขสุ่มเทียม โดยมีขั้นตอนในการสร้างดังนี้ (ศิริจันทร์ ทองประเสริฐ, 2535, หน้า 87-88)

(1) เลือกตัวเลขขึ้นมาสี่หลัก

(2) ยกกำลังสองของตัวเลขนั้น ถ้าตัวเลขที่ได้ไม่ครบแปดหลัก ให้เติมศูนย์ข้างหน้าให้ครบแปดหลัก

(3) ใช้เลขสี่หลักกลางที่ได้ในขั้นที่ (2) เป็นตัวเลขแบบสุ่ม

(4) ยกกำลังสองของตัวเลขในข้อ (3)

(5) ทำซ้ำในขั้นที่ (3) และ (4) จนได้จำนวนตัวเลขสุ่มตามต้องการ

ตัวอย่าง สมมุติว่าเลือกตัวเลขสุ่มตัวแรกเป็น $X_0 = 1376$

$X_0 = 1376$ จะได้ $X^2_0 = 01893376$

$X_1 = 8933$ จะได้ $X^2_1 = 79798489$

$X_2 = 7984$ จะได้ $X^2_2 = 63744256$

$X_3 = 7442$ จะได้ $X^2_3 = 55383364$

$X_4 = 3833$ จะได้ $X^2_4 = 14691889$

$X_5 = 6918$ ..

ฉะนั้นตัวเลขสุ่มที่ได้ คือ 1376, 8933, 7984, 7442, 3833, 6918..

การสร้างตัวเลขสุ่มโดยวิธีนี้ยังมีปัญหาสองประการ คือ ไม่ทราบช่วงของตัวเลขสุ่มที่จะหมุนกลับมาซ้ำเดิมอีก และถ้ากำหนดตัวเลขสุ่มตัวแรกไม่เหมาะสม จะทำให้ได้ตัวเลขสุ่มที่ไม่เป็นแบบสุ่ม (ต่าย เชี่ยงฉี, 2534, หน้า 64)

วิธีที่ 2 โดยวิธีเศษเหลือ (Congruent Method) ที่นิยมใช้กันมากที่สุดคือ เศษเหลือของผลคูณ (Multiplicative Congruential Method) ซึ่งมีสูตร ดังนี้

$$X_{i+1} = a X i \pmod m$$

ตัวอย่าง สมมุติว่าเลือก $a = 2$, $m = 10$ และ $X_0 = 1$

$X_0 = 1$

$X_1 = 2$ คูณ 1 (Mod 10) = 2

$X_2 = 2$ คูณ 2 (Mod 10) = 4

$X_3 = 2$ คูณ 4 (Mod 10) = 8

$X_4 = 2$ คูณ 8 (Mod 10) = 6

$X_5 = 2$ คูณ 6 (Mod 10) = 2

...

ฉะนั้นตัวเลขสุ่มที่ได้ คือ 1,2,4,8,6,2,... ซึ่งจะเห็นว่าเลขสุ่มเริ่มวนกลับมาเลขเดิมแล้ว เพื่อไม่ให้เลขสุ่มวนกลับมาเลขเดิมเร็วเกินไป ในทางปฏิบัติเมื่อใช้คอมพิวเตอร์สร้างตัวเลขสุ่มโดยวิธีนี้ นิยมกระทำดังนี้ (ศิริจันทร์ ทองประเสริฐ, 2535, หน้า 89)

(1) เลือกตัวเลขสุ่มใดๆ ที่น้อยกว่า 9 หลัก ใช้เป็น X_0 โดยปกติถ้าเป็นคอมพิวเตอร์ฐานสอง X_0 จะให้เป็นเลขคี่ที่เป็นบวก และคอมพิวเตอร์ฐานสิบ X_0 จะให้เป็นเลขบวกที่หารด้วย 2 และ 5 ไม่ลงตัว

(2) คูณเลขในข้อ(1) ด้วยค่า a ซึ่ง a ควรมีค่าไม่น้อยกว่า 5 หลัก โดยปกติค่า a จะหาได้จาก

$a = 8T \pm 3$ ..... สำหรับคอมพิวเตอร์ฐานสอง

$a = 200T \pm Q$..... สำหรับคอมพิวเตอร์ฐานสิบ

เมื่อ T คือ เลขใด ๆ ที่เป็นบวก

Q คือ ค่าหนึ่งค่าใดต่อไปนี้ $\pm$ (3, 11, 13, 19, 21, 27, 29, 37, 53, 59, 61, 67, 69, 77, 83, หรือ 91)

(3) คูณผลคูณในข้อ 2 ด้วย 1/m โดยปกติค่า m จะหาได้จาก

$m = 2^b$ .....สำหรับคอมพิวเตอร์ฐานสอง

$m = 10^d$ .....สำหรับคอมพิวเตอร์ฐานสิบ

เมื่อ b คือ จำนวน bites ใน 1 word

d คือ จำนวนหลักใน 1 word

(4) เลือกใช้ตัวเลขหลังทศนิยมของเลขที่ได้ในข้อ (3) เป็นตัวเลขสุ่มที่ต้องการ

(5) ตัดจุดทศนิยมออกจากตัวเลขในข้อ (4) แล้วดำเนินการตามขั้นตอนที่ (2)

(6) ทำซ้ำในขั้นที่ (2) ถึง (5) จนกว่าจะได้จำนวนตัวเลขสุ่มมากเท่าที่ต้องการ

ในปัจจุบันมีโปรแกรมสำเร็จรูปสำหรับเรียกตัวเลขสุ่มใช้ในเครื่องคอมพิวเตอร์ เช่น ภาษาเบสิค (Basic) มีคำสั่งที่ใช้เรียกตัวเลขสุ่มได้ คือ RANDOMIZED และ RND (ต่าย เชี่ยงฉี, 2537, หน้า 3-5)

คุณสมบัติของตัวเลขสุ่มที่ดี

(1) ตัวเลขสุ่มที่ได้จะต้องมีลักษณะการกระจายความน่าจะเป็นแบบสม่ำเสมอ (Uniform Distribution)

(2) ตัวเลขสุ่มที่ได้ต้องเป็นอิสระแก่กัน

(3) อนุกรมของตัวเลขสุ่มที่ได้ต้องสามารถสร้างซ้ำเดิมได้ (Reproducible)

(4) อนุกรมของตัวเลขสุ่มที่ได้ต้องไม่ซ้ำเดิมในช่วงที่ต้องการใช้ตัวเลขสุ่ม

(5) ต้องใช้เวลาน้อยในการสร้างตัวเลขสุ่ม

(6) ต้องใช้หน่วยความจำในคอมพิวเตอร์น้อย

(ต่าย เชี่ยงฉี, 2537, หน้า 5-6)

2.2 นำตัวเลขสุ่มมาประยุกต์ใช้กับปัญหาต่าง ๆ เป็นขั้นตอนของการนำตัวเลขสุ่มมาสร้างตัวแปรตามลักษณะการแจกแจงของปัญหาที่ต้องการศึกษา เพื่อใช้เป็นข้อมูลของปัญหานั้น (Swarup and Mohan, 1982, pp. 666-674 อ้างใน ต่าย เชี่ยงฉี, 2537, หน้า 4) เช่น สร้างตัวเลขสุ่มขึ้นมาจำนวนหนึ่ง แล้วนำเลขสุ่มนั้นมาสร้างเป็นคะแนนผลการสอบของผู้สอบ บางครั้งตัวแปรของปัญหาที่จะศึกษาไม่ได้สร้างจากตัวเลขสุ่มโดยตรง แต่มีขั้นตอนที่ต้องอาศัยตัวเลขสุ่มเป็นพื้นฐาน

การเขียนโปรแกรม สำหรับสร้างตัวแปรที่มีการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ย (Mean) เท่ากับ 0 ความแปรปรวน (Vriance) เท่ากับ 1 โดยใช้ภาษาเบสิค (ปัญชา พนเจริญสวัสดิ์, 2527, หน้า 703) ดังนี้

```
10  X = -LOG(1-RND(1))
20  Y = RND(1)*1.4*EXP(-X)
```

```
30  Z = SQR(2/3.14159)*EXP(-X*X/2)
40  IF Y<Z THEN 60
50  GOTO 10
60  A = RND(1)
70  IF A<0.5 THEN X = -X
80  PRT X
```

ถ้าจะปรับตัวแปรให้มีการแจกแจงที่มีลักษณะเบ้ซ้าย (เบ้บวก) สามารถทำได้โดยใช้สูตร ดังนี้ (Fleishman, 1978, pp. 521-532 อ้างใน ต่าย เชี่ยงฉี, 2537, หน้า 4)

$$Y = -2.3268 + 1.16050961X - 0.290978X^2 - 0.0886191X^3$$

ถ้าจะปรับตัวแปรให้มีการแจกแจงที่มีลักษณะเบ้ขวา (เบ้ลบ) สามารถทำได้โดยใช้สูตร ดังนี้ (Fleishman, 1978, pp. 521-532 อ้างใน ต่าย เชี่ยงฉี, 2537, หน้า 4)

$$Y = 2.345 + 1.1605091X - 0.2710708X^2 - 0.092819X^3$$

2.3 **ทำการทดลองซ้ำ** ต้องมีการทดลองซ้ำหลายๆ ครั้ง เพื่อลดความคลาดเคลื่อนของคำตอบที่จะได้ (Hammersley and Handscomb, 1964, p. 5 and p. 21 อ้างใน ต่าย เชี่ยงฉี, 2537, หน้า 5) และสรุปความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ในปัญหานั้น ๆ

3. จุดเด่นของการใช้วิธีมอนติ คาร์โล

เนื่องจากวิธีมอนติ คาร์โล ใช้ตัวเลขสุ่มเป็นพื้นฐานในการสร้างตัวแปรของปัญหาโดยอาศัยโมเดล ทฤษฎี สูตร หรือกฎเกณฑ์ต่าง ๆ ที่มีอยู่ และมีการทดลองซ้ำหลาย ๆ ครั้ง เพื่อลดความคลาดเคลื่อนต่าง ๆ ซึ่งนับว่ามีประโยชน์ที่สำคัญ ดังนี้

(1) วิธีมอนติ คาร์โล สามารถควบคุมตัวแปรแทรกซ้อนและสามารถสังเกตได้อย่างสมบูรณ์ (Payne, 1982, p.3) นอกจากนี้ยังสามารถทำการทดลองซ้ำภายใต้สภาพแวดล้อม (Context)

เดิมหลาย ๆ ครั้งได้ ส่วนในการทดลองจริงนั้นทำไม่ได้เพราะไม่สามารถรักษาสภาพแวดล้อมให้เหมือนเดิมทุกอย่างได้ เมื่อเวลาได้เปลี่ยนไป

(2) วิธีมอนติ คาร์โล ถ้ามีโมเดล ทฤษฎี สูตร หรือกฎเกณฑ์ต่าง ๆ ที่ถูกต้องรองรับในการสร้างตัวแปรของปัญหาในการทดลองแล้ว ผลที่ได้จะถูกต้องแม่นยำกว่า เมื่อใช้ทดลองในสถานการณ์จริง ทั้งนี้เพราะสามารถลดตัวแปรแทรกซ้อนที่เป็นเชิงจิตวิทยาได้

(3) ทำให้สิ้นเปลืองเวลา แรงงาน และค่าใช้จ่ายน้อยกว่า ตลอดทั้งลดการเสี่ยงก่อนการกระทำจริง เมื่อเทียบกับการทดลองในสถานการณ์จริง (ต่าย เชี่ยงฉี, 2535, หน้า 5)

ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

โดยทั่วไป นักวิจัยได้ประมาณค่าพารามิเตอร์ของแบบทดสอบโดยใช้ตัวอย่างผู้สอบเพียงอย่างเดียวในการตอบข้อสอบทั้งฉบับ ลอยด์ (Loyd, 1988 อ้างใน กัมพล ไชยนันท์,2535, หน้า 27) และในการเปรียบเทียบวิธีการสุ่มผู้สอบแบบง่ายกับวิธีการสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณพบว่าค่าคะแนนเฉลี่ยประมาณค่าได้ดีกว่าเมื่อใช้การสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณ ส่วนการประมาณความแปรปรวน ทั้งสองวิธีดังกล่าวให้ผลดีเท่ากัน ปัจจุบันการจำลอง (Simulation) โดยใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ได้เข้ามาช่วยลดความยุ่งยากของการกระทำจริง การ์คและคณะ (Garg,et al, 1986) ได้ใช้วิธีมอนติ คาร์โล จำลองข้อมูลเพื่อเปรียบเทียบวิธีการสุ่มแบบง่ายกับวิธีการสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณ กับในการพัฒนาแบบทดสอบ โดยจำลองประชากรผู้สอบให้มีลักษณะการแจกแจงค่าความสามารถของผู้สอบแบบปกติ และประชากรข้อสอบให้มีลักษณะการแจกแจงคะแนนจากการสอบ (Test Scores) สามแบบ คือ แบบปกติ โค้งป่านกลาง และแบนราบ พบว่าการประมาณค่าความยากของข้อสอบไม่แตกต่างกัน แต่ค่าอำนาจจำแนกของข้อสอบ ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ และความตรงของแบบทดสอบ วิธีการสุ่มแบบง่ายให้ค่าประมาณดีกว่าวิธีการสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณ เมื่อเพิ่มจำนวนหน่วยคำตอบวิธีการสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณให้ผลดีกว่าวิธีการสุ่มแบบง่าย

เกรสสาร์ด (Gressard, 1988, p.2856-A) ได้ทำการทดลองเปรียบเทียบวิธีการสุ่มทั้งสองวิธี คือ วิธีการสุ่มแบบง่าย และสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณ โดยใช้ข้อมูลจำลองและข้อมูลจริง พบว่า ไม่มีหลักฐานยืนยันแน่ชัดว่าวิธีไหนดีกว่ากันในการประมาณค่าคะแนนเฉลี่ย แต่เมื่อสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณที่มีจำนวนตัวอย่างข้อสอบชุดย่อยน้อยข้อ และแบ่งชั้นภูมิข้อสอบตามค่าอำนาจจำแนกของข้อสอบจะเพิ่มความแม่นยำในการประมาณความแปรปรวนได้อย่างมีนัยสำคัญ

ชาร์ทอค (Chartock, 1980, p.638-A) ได้ใช้ระดับค่าความยากของข้อสอบ ในการแบ่งชั้นภูมิ และศึกษาถึงผลของค่าอำนาจจำแนก ต่อ ความแม่นยำ ในการประมาณค่าเฉลี่ยคะแนนและความแปรปรวนคะแนนของประชากร โดยการจำลองสถานการณ์และสุ่มตัวอย่างแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณแบบไม่คาบเกี่ยวกัน จำนวนหกฉบับ และผู้สอบจำลองตามระดับค่าความสามารถของผู้สอบแบบปกติ พบว่า จากงานวิจัยที่ผ่านมา วิธีการสุ่มตัวอย่างแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณประมาณค่าเฉลี่ยคะแนนได้ดีกว่า แต่ประมาณความแปรปรวนคะแนนได้แม่นยำน้อยกว่า หรือใกล้เคียงกับวิธีการสุ่มแบบง่ายและขอบเขตค่าอำนาจจำแนกของข้อสอบมีผลต่อความแม่นยำในการประมาณความแปรปรวนคะแนนมากกว่าการประมาณค่าเฉลี่ยคะแนน

ซาการ์และซัพเพส (Sachar, and Suppes, 1980) ศึกษาเกี่ยวกับการประมาณค่าคะแนนของแบบทดสอบทั้งฉบับจากค่าคะแนนที่ได้จากข้อสอบชุดย่อยของการสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณ โดยซาการ์และซัพเพส อ้างถึง ลอร์ด (Lord, 1962) ที่ได้เสนอว่าการสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณมีประโยชน์ต่อการนำไปทำแบบทดสอบมาตรฐานแห่งชาติ เพราะการสุ่มทั้งผู้สอบและข้อสอบนี้ ช่วยลดเวลาในการตอบข้อสอบของผู้สอบแต่ละคน โดยอาศัยข้อตกลงเบื้องต้นที่ว่ากลุ่มตัวอย่างทั้งผู้สอบและข้อสอบได้รับการสุ่มอย่างเป็นอิสระต่อกัน รวมทั้งคำตอบของข้อสอบแต่ละข้อไม่ขึ้นอยู่กับบริบทของข้อสอบของแบบทดสอบนั้น ๆ นอกจากนี้ ยังได้กล่าวถึงผลการทดลองของ โอเวนและสตัฟเฟิลบีม (Owens and Stufflebeam, 1969) ซึ่งทำการทดสอบหาค่าประมาณของค่าเฉลี่ยคะแนนและประมาณของความแปรปรวนคะแนน โดยโอเวนได้พยายามหาค่าประมาณค่าพารามิเตอร์ของคะแนนที่ได้จากผู้สอบทุกคน เมื่อผู้สอบแต่ละคนได้กระทำข้อสอบบางส่วนของประชากรข้อสอบ และไซรอทนิคและเวลลิงตัน (Sirotnik and Wellington, 1977) ใช้กรอบวิเคราะห์ความแปรปรวนพบว่าลักษณะการแจกแจงคะแนนของผู้สอบเป็นสิ่งสำคัญในการประมาณค่าของการจัดอันดับเปอร์เซนต์ไทล์ ซึ่งซาการ์และซัพเพสได้ทำการทดลองโดยใช้ข้อมูลจริงและจำลองสถานการณ์ จัดข้อสอบชุดย่อยให้มีข้อสอบแบบคาบเกี่ยวกัน (Overlap) และแบบไม่คาบเกี่ยวกัน (Nonoverlapping) รวมทั้งจัดทำข้อสอบคู่ขนาน ศึกษาค่าความถดถอยและเปรียบเทียบดูว่าบริบทของข้อสอบ (Context Item) ส่งผลต่อวิธีการสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณหรือไม่ โดยอ้างถึงราชค์ (Rasch, 1960) ในการทำนายคะแนนตามค่าความยากของข้อสอบ ซาการ์และซัพเพสพบว่าบริบทของข้อสอบไม่มีผลกระทบต่อการสุ่มแบบเมตริกซ์เชิงพหุคูณ