บทคัดย่อ

ให้ $S \subseteq V(G)$ ในกราฟ $G = (V(G), E(G))$ เราจะเรียก S ว่า dominating set ของ G เมื่อสมาชิกแต่ละ v ใน $V(G)$ เป็นสมาชิกใน S หรือประชิดกับจุดใน S และ domination number ของกราฟ G เขียนแทนด้วย $\gamma(G)$ คือจำนวนสมาชิกที่น้อยที่สุดในบรรดา dominating set ของ กราฟ G เราจะกล่าวว่า S เป็น connected dominating set ของ G เมื่ออินดิวซ์สับกราฟ $G[S]$ เป็นกราฟไม่ขาดตอน และ connected domination number ของกราฟ G เขียนแทนด้วย $\gamma_c(G)$ คือจำนวนสมาชิกที่น้อยที่สุดในบรรดา connected dominating set ของ G กราฟ G จะเป็นกราฟ γ–vertex–critical เมื่อ $\gamma(G - v) < \gamma(G)$ สำหรับทุก ๆ จุด v ใน G กราฟ G จะเป็นกราฟ k–γ–critical เมื่อ $\gamma(G) = k$ แต่ $\gamma(G + e) < k$ สำหรับแต่ละเส้น $e \notin E(G)$ ในทำนองเดียวกันเรากล่าวว่า G จะเป็นกราฟ k–γ_c–critical เมื่อ $\gamma_c(G) = k$ แต่ $\gamma_c(G + e) < k$ สำหรับแต่ละเส้น $e \notin E(G)$

สำหรับจำนวนเต็มบวก k และ t ซึ่ง $t \geq 2$ เรากล่าวว่า G เป็นกราฟ k–(γ, t)–critical เมื่อ $\gamma(G) = k$ และสำหรับแต่ละคู่ของจุด u และ v ที่ไม่ประชิดกันใน G ซึ่ง $d(u, v) \leq t$ แล้ว $\gamma(G + e) < k$ ในทำนองเดียวกันเรากล่าวว่า G เป็นกราฟ k–(γ_c, t)—critical เมื่อ $\gamma_c(G) = k$ และสำหรับแต่ละคู่ของจุด u และ v ที่ไม่ประชิดกันใน G ซึ่ง $d(u, v) \leq t$ แล้ว $\gamma_c(G + e) < k$

สำหรับจำนวนเต็มบวก p และ k ที่มีภาวะคู่เสมอกัน กราฟ G ที่มีอันดับ p จะเป็นกราฟ k–factor–critical เมื่อกำจัดเซตของจุดจำนวน k จุดใด ๆ ใน G แล้วกราฟที่เหลือมีการจับคู่สมบูรณ์ เรากล่าวว่า G เป็นกราฟ maximal non–k–factor–critical เมื่อ G ไม่เป็นกราฟ k–factor–critical แต่ $G + e$ เป็นกราฟ k–factor–critical สำหรับเส้นแต่ละเส้น $e \notin E(G)$

ในรายงานการวิจัยฉบับนี้เราศึกษาเงื่อนไขเพียงพอที่จะทำให้กราฟ 3-vertex–critical มีการจับคู่สมบูรณ์และมีการจับคู่ที่ใกล้สมบูรณ์ รวมทั้งเงื่อนไขเพียงพอที่จะทำให้กราฟ 3-vertex–critical เป็นกราฟ k–factor–critical เมื่อ $1 \leq k \leq 3$ สำหรับกราฟ k–γ_c–critical เราศึกษาคุณสมบัติของกราฟนี้ที่มีจุดตัด ซึ่งทำให้ทราบว่ากราฟ 3–γ_c–critical จะมีจุดตัดได้ไม่เกิน 1 จุด ซึ่งนำไปสู่การศึกษาลักษณะเฉพาะเจาะจงของกราฟ 3–γ_c–critical ที่มีจุดตัด 1 จุด เรายังได้ศึกษาเงื่อนไขเพียงพอที่จะทำให้กราฟ 3–γ_c–critical เป็นกราฟ k–factor–critical เมื่อ $1 \leq k \leq 3$ สำหรับงานวิจัยที่เกี่ยวกับกราฟ 3–(γ, t)–critical และกราฟ 3–(γ_c, t)–critical จะเป็นเรื่องของ diameter และความสัมพันธ์ระหว่างกราฟเหล่านี้กับกราฟ 3–γ–critical และ กราฟ 3–γ_c–critical ตามลำดับ เราจบรายงานการวิจัยนี้ด้วยการศึกษาลักษณะเฉพาะเจาะจงของกราฟ maximal non–k–factor–critical

Abstract

A set $S \subseteq V(G)$ is a (vertex) dominating set for G if every vertex of G either belongs to S or is adjacent to a vertex of S. The minimum cardinality of a vertex dominating set for G is called the domination number of G and is denoted by $\gamma(G)$. A dominating set S for G is a connected dominating set if it induces a connected subgraph of G. The minimum cardinality of a connected dominating set for G is called the connected domination number of G and is denoted by $\gamma_c(G)$. A graph G is said to be γ–vertex–critical if $\gamma(G - v) < \gamma(G)$, for every vertex v in G. Graph G is said to be k–γ–critical if $\gamma(G) = k$ but $\gamma(G + e) < k$ for each edge $e \notin E(G)$. Similarly, G is said to be k–γ_c–critical if $\gamma_c(G) = k$ but $\gamma_c(G + e) < k$ for each edge $e \notin E(G)$.

For positive integers k, t with $t \geq 2$, we say that G is k–(γ, t)–critical if $\gamma(G) = k$ and for every pair of non–adjacent vertices u and v of G with $d(u, v) \leq t$, $\gamma(G + e) < k$. Similarly, G is said to be k–(γ_c, t)–critical if $\gamma_c(G) = k$ and for every pair of non–adjacent vertices u and v of G with $d(u, v) \leq t$, $\gamma_c(G + e) < k$.

A graph G of order p is k–factor–critical , where p and k are positive integers with the same parity, if the deletion of any set of k vertices results in a graph with a perfect matching. G is called maximal non–k–factor–critical if G is not k–factor–critical but $G + e$ is k–factor–critical for every missing edge $e \notin E(G)$.

In this report, we establish sufficient conditions for 3–vertex–critical graphs to contain a perfect matching and a near perfect matching. We also present sufficient conditions for 3–vertex–critical graphs to be k–factor–critical for $1 \leq k \leq 3$. For k –γ_c–critical graphs, we investigate these graphs with cutvertices. It turns out that 3 –γ_c–critical graphs can contain at most one cutvertex which leads to a characterization of 3 –γ_c–critical graphs with a cutvertex. We also establish sufficient conditions for 3 –γ_c–critical graphs to be k–factor–critical for $1 \leq k \leq 3$. Most of the results about 3–(γ, t)–critical and 3–(γ_c, t)–critical graphs concern their diameter and the relationship between these graphs and 3–γ–critical and 3–γ_c–critical graphs respectively. We conclude our report with a characterization of maximal non–k–factor–critical graphs.