

บทที่ 3

การออกแบบตัวควบคุม

3.1 บทนำ

กระบวนการของ ลูกตุ้มผกผัน จะเห็นได้ว่า เป็นกระบวนการที่ไม่มีเสถียรภาพ ดังนั้น ถ้าต้องการเปลี่ยนคุณสมบัติ ของกระบวนการให้เป็น ระบบที่มีเสถียรภาพ ทำได้โดยการออกแบบตัวควบคุมมาควบคุมระบบ โดยในวิทยานิพนธ์นี้ จะใช้ทฤษฎีการควบคุมสมัยใหม่ (Modern Control) โดยกระบวนการ จะถูกแทนด้วย สมการไดนามิก หรือ สมการสเตท ซึ่งสเตทของระบบ สามารถบอกสถานะภาพของระบบได้อย่างสมบูรณ์ ดังนั้น จึงออกแบบตัวควบคุม โดยการ ป้อนกลับโดยใช้สเตท (State feedback) โดยตั้งสมมุติฐาน ที่ว่า สเตททุกตัวสามารถวัด เพื่อที่จะนำมาป้อนกลับได้ การป้อนกลับด้วยสเตท จะทำให้ตำแหน่งของระบบลูปปิด (Closed-loop) เปลี่ยนไป โดยตำแหน่งของ โดมิแนนซ์โพล (dominant pole) คือ โพลที่อยู่ใกล้แกนจินตภาพ (imaginary axis) มากที่สุด ซึ่งมีผลต่อ การตอบสนองทางเวลาของระบบมากที่สุด ในวิธีนี้ จะไม่คำนึงถึง ผลของโพลที่ไม่ใช่โดมิแนนซ์โพล

ระบบที่สามารถควบคุมสเตท ทุกสเตท ของระบบได้ เรียกว่า controllable ดังนั้นระบบที่ controllable ก็จะสามารถควบคุมให้ทุกสเตทมีค่าตามที่ต้องการได้ โดยการเลือกอินพุตที่เหมาะสม นั่นก็คือสามารถออกแบบตัวควบคุมได้

ระบบที่สามารถรู้สเตท ทุกสเตท จากเอาต์พุตของระบบ เรียกว่า observable คือเอาต์พุตของระบบเป็นปริมาณที่สามารถวัดได้อย่างแน่นอน ซึ่งถ้าระบบ มีเอาต์พุตของระบบเป็นปริมาณที่สามารถวัดได้อย่างแน่นอน ในขณะที่สเตทของระบบไม่สามารถวัดโดยตรงได้ หรือต้องการเซนเซอร์ราคาแพง ถ้าระบบเป็น observable ก็สามารถประมาณค่าของสเตทจากเอาต์พุตได้ โดยไม่ต้องสร้างเครื่องมือวัดโดยตรง โดยการออกแบบ ตัวประมาณค่า (estimator) หรือ ตัวประมาณการวัด (observer)

ดังนั้น ก่อนที่จะทำการออกแบบระบบควบคุม ต้องการทำการตรวจสอบว่า กระบวนการที่จะควบคุม นั้น เป็น controllable หรือไม่ ซึ่งเรียกการตรวจสอบนี้ว่า controllability และ เมื่อกระบวนการไม่สามารถวัดเอาต์พุตได้ ทุกสเตท ต้องการทำการตรวจสอบกระบวนการนั้นด้วยว่าเป็น observable หรือไม่ ซึ่งเรียกการตรวจสอบนี้ว่า observability

3.2 Controllability และ Observability ของลูกตุ้มผกผัน

แนวความคิดของ controllability และ observability มีบทบาทสำคัญในการออกแบบระบบควบคุม โดยใช้สมการสแตท เป็นอย่างยิ่ง ในความเป็นจริง เงื่อนไขของ controllability และ observability อาจะรวมไปถึงการกระทำได้ ของการแก้ปัญหาการออกแบบระบบควบคุม ซึ่งการแก้ปัญหานี้ อาจจะทำไม่ได้ ถ้ากระบวนการที่พิจารณาไม่เป็น controllable แม้ว่า ระบบทางกายภาพ ทั้งหมดเป็น controllable และ observable โดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ที่คล้ายกัน อาจจะมีคุณสมบัติของ controllability และ observability ที่ไม่เหมือนกันก็ได้ ดังนั้นจึงมีความจำเป็นที่จะต้องรู้ก่อนว่า กระบวนการนั้น เป็น controllable และ observable หรือไม่ โดยจะทำการตรวจสอบ ดังต่อไปนี้

3.2.1 Controllability

พิจารณาระบบที่ต่อเนื่องทางเวลา (continuous time system) ที่แสดงอยู่ในรูปของสมการสแตท

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.1)$$

เมื่อ x คือ เวกเตอร์สแตท (state vector) มิติ n

u คือ สัญญาณควบคุม เป็นปริมาณสเกลาร์

A คือ เมตริกซ์ มิติ $n \times n$

B คือ เมตริกซ์ มิติ $n \times m$

และเมื่อ n คือ แถวของเมตริกซ์, m คือ หลักของเมตริกซ์

ระบบที่แสดงโดยสมการที่ (3.1) กล่าวได้ว่าเป็น controllable ที่เวลา $t = t_0$ ถ้าระบบเป็นไปได้ที่จะการสร้างสัญญาณควบคุมที่ไม่มีขีดจำกัด (unconstrained control signal) ที่ทำให้การเปลี่ยนค่าของ สแตทเริ่มต้น (initial state) ไปเป็น สแตทสุดท้าย (final state) อื่น ๆ ในช่วงเวลาที่จำกัด ในช่วงเวลา $t_0 \leq t \leq t_1$ ถ้าทุกสแตทเป็น controllable ดังนั้นก็กล่าวได้ว่า ระบบเป็น controllable ด้วย

ในตอนี้ เราจะยอมรับ เงื่อนไขของ controllability โดยสมมุติ สแตทสุดท้าย เป็นจุดเริ่มต้นของสแตท และเวลาเริ่มต้นเป็นศูนย์ หรือ $t_0 = 0$

ผลการแก้ปัญหาของสมการที่ (3.1) โดยประยุกต์นิยามของ complete state controllability จะได้

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\
 x(0) &= -\int_0^{t_1} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

จากสมการแสดงของ e^{At} สามารถเขียนได้เป็น

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2 + \dots + \alpha_{m-1}(t)A^{m-1} \tag{3.3}$$

อ้างอิงถึง สมการที่ (3.3) สามารถเขียน $e^{A\tau}$ ได้เป็น

$$e^{-A\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau)A^k \tag{3.4}$$

แทนค่าสมการที่ (3.4) ลงในสมการที่ (3.2) จะได้

$$x(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)u(\tau)d\tau \tag{3.5}$$

กำหนดให้

$$\int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)u(\tau)d\tau = \beta_k$$

ดังนั้นสมการที่ (3.5) จะกลายเป็น

$$\begin{aligned}
 x(0) &= -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \beta_k \\
 x(0) &= -\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

ถ้าระบบเป็น controllable ดังนั้น ถ้าให้สเตตเริ่มต้น อื่น ๆ จะทำให้สมการที่ (3.6) ปฏิบัติตามเดิม ซึ่งจะเป็นไปได้ ถ้าเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

ซึ่งเป็น เมตริกซ์ $n \times n$ มี ลำดับชั้น (rank) เท่ากับ n

จากการวิเคราะห์นี้ เราสามารถกล่าวได้ว่า เงื่อนไขสำหรับ controllability คือ ระบบที่แสดงโดยใช้สมการที่ (3.1) จะเป็น controllable ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ $B, AB, \dots, A^{n-1}B$ เป็น อิสระต่อกันในตัวเอง (linearly independent) หรือ เมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

ซึ่งเป็น เมตริกซ์ $n \times n$ มี ลำดับชั้น (rank) เท่ากับ n

เงื่อนไขนี้ยังขยายรวมไปถึงกรณี ที่ เวกเตอร์ควบคุม (control vector) ; u มีมิติเท่ากับ r ถ้าระบบที่แสดงโดยสมการสแตท

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

เมื่อ u เป็น เวกเตอร์ มิติ r ดังนั้นสามารถพิสูจน์ เงื่อนไขของ controllability ที่ เมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

ซึ่งเป็น เมตริกซ์ มิติ $n \times nr$ มีลำดับชั้น (rank) เท่ากับ n หรือ เป็น หลักเวกเตอร์ มิติ n ที่เป็นอิสระต่อกันในตัวเอง (linearly independent)

เมตริกซ์

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

เรียกว่า controllability matrix.

3.2.2 Controllability ของลูกตุ้มผกผัน

สมการสแตท ของลูกตุ้มผกผัน ที่แสดงในรูปสมการ

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$Y = Cx$$

โดยอ้างอิงจากสมการที่ (2.27) ซึ่งเป็น สมการสแตท ของลูกตุ้มผกผัน คือ

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8.1750 & -45.5537 & 0 \\ 0 & 35.2647 & 89.3210 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 42.5455 \\ -83.4225 \end{bmatrix} u \quad (3.8)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$\text{เมื่อ } x = \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix}$$

และ $V_a = K_a * u$ โดยที่ K_a อัตราขยายของวงจรมอเตอร์ มีค่าเท่ากับ 1.8

เราสามารถตรวจสอบความเป็น controllable ของลูกตุ้มผกผัน ได้โดยการหาค่าของ controllability matrix.

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$



เมื่อ สเตทของลูกตุ้มผกผัน มีค่า $n = 4$ ค่าของ controllability matrix. จะกลายเป็น

$$P = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B]$$

แทนค่า ของ A และ B จะได้

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 42 & -1938 & 88969 \\ 0 & -83 & 3800 & -176055 \\ 42 & -1938 & 88969 & -4083972 \\ -83 & 3800 & -176055 & 8080886 \end{bmatrix}$$

ทดสอบหา ลำดับชั้น (rank) ของ controllability matrix จะได้

$$\text{rank}(P) = 4$$

สามารถสรุปได้ว่า ลูกตุ้มผกผัน เป็น กระบวนการที่ controllable ดังนั้นก็สามารถออกแบบตัวควบคุม เพื่อที่จะทำให้ลูกตุ้มผกผัน มีเสถียรภาพได้

3.2.3 Observability

ระบบที่แสดงโดยสมการที่ (3.1) กล่าวได้ว่าเป็น observable ถ้า ทุกสเตท $x(t_0)$ สามารถหาได้จาก การวัดของเอาต์พุต $Y(t)$ ในช่วงเวลาที่จำกัด คือในช่วงเวลา $t_0 \leq t \leq t_1$ ระบบที่จะเป็น observable ถ้าทุกการเปลี่ยนแปลงของสเตท มีผลกระทบต่อทุกค่าของเอาต์พุต

แนวความคิดของ observability ใช้ในการแก้ปัญหาการสร้างขึ้น ของตัวแปรสเตทที่ไม่ได้วัด จากตัวแปรที่วัดค่า แนวความคิดนี้สำคัญมาก เพราะว่าในทางปฏิบัติ ต้องประสบความสำเร็จยากกับการควบคุมการป้อนกลับด้วยสเตท นั่นคือ บางสเตทไม่สามารถวัดได้โดยตรง หรือวัดได้แต่ต้องใช้เครื่องมือที่ราคาแพง ด้วยเหตุนี้ จึงมีความ จำเป็นต้องประมาณค่าของ ตัวแปรสเตทที่ไม่ได้วัดค่า ดังนั้นการประมาณค่าของตัวแปรสเตท จะทำได้ก็ต่อเมื่อ ระบบเป็น observable เท่านั้น

ในการพิจารณาเงื่อนไขของ observability เราจะพิจารณาระบบที่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำ ด้วยเหตุผลที่ว่า ระบบที่แสดงอยู่ในรูปสมการสเตท

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$Y = Cx + Du$$

ดังนั้น

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

และค่าของ $Y(t)$ คือ

$$Y(t) = Ce^{At}x(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(\tau)$$

เมื่อเมตริกซ์ A, B, C , และ D รู้ค่า และ $u(t)$ ก็รู้ค่าด้วย ทำให้สองเทอมสุดท้ายทางด้านขวามือของสมการนี้ รู้ค่าด้วย ซึ่งอาจทำให้เกิดการหักล้างกันกับ ค่าที่วัดได้จาก $Y(t)$ ดังนั้น จึงเป็นเงื่อนไขที่จำเป็น และเพียงพอ สำหรับ observability โดยจะพิจารณาระบบที่แสดงในรูปสมการสเทท ต่อไปนี้ แทน

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax \\ Y &= Cx\end{aligned}\tag{3.9}$$

เมื่อ เวกเตอร์เอาต์พุต (output vector) $Y(t)$ คือ

$$Y(t) = Ce^{At}x(0)$$

อ้างอิงถึงสมการที่ (3.4) ที่ว่า

$$e^{-At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k$$

เมื่อแทนค่าลงใน $Y(t)$ จะได้

$$Y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) CA^k x(0)$$

หรือ

$$Y(t) = \alpha_0(t)Cx(0) + \alpha_1(t)CAx(0) + \dots + \alpha_{n-1}(t)CA^{n-1}x(0)\tag{3.10}$$

ถ้าระบบเป็น observable ดังนั้น จะให้เอาต์พุต $Y(t)$ ทุกเวลาในช่วงเวลา $0 \leq t \leq t_1$ ค่าของ $x(0)$ หาได้จากสมการที่ (3.10) โดยเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

ซึ่งเป็นเมตริกซ์ มิติ $nm \times n$ จะต้องมี ลำดับชั้น (rank) เท่ากับ n

จากการวิเคราะห์นี้ เราได้ว่า เงื่อนไขสำหรับ observability คือ ระบบที่แสดงในสมการสเทท ดังสมการที่ (3.9) เป็น observable ก็ต่อเมื่อ เมตริกซ์

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\tag{3.11}$$

ซึ่งเป็นเมตริกซ์ มิติ $nm \times n$ จะต้องมี ลำดับชั้น (rank) เท่ากับ n หรือ มีหลักเวกเตอร์ มิติ n ที่เป็นอิสระต่อกันตัวเอง ซึ่งเรียกเมตริกซ์ O นี้ว่า observability matrix.

3.2.4 Observability ของลูกตุ้มผกผัน

จากสมการสเตต ของลูกตุ้มผกผัน ที่แสดงในสมการที่ (3.8) เราสามารถตรวจสอบความเป็น observable ของลูกตุ้มผกผัน ได้โดยการหาค่าของ observability matrix.

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

เมื่อ สเตตของลูกตุ้มผกผัน มีค่า $n = 4$ และสามารถวัดค่าสเตตได้ $m = 2$ ดังนั้นค่าของ observability matrix จะกลายเป็น

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix}$$

ซึ่งเป็นเมตริกซ์ มิติ 8×4 แทนค่าของ A และ C จะได้

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & -45 & 0 \\ 0 & 35 & 89 & 0 \\ 0 & 372 & 2075 & -8 \\ 0 & -730 & -4068 & 35 \end{bmatrix}$$

ทดสอบหา ลำดับชั้น (rank) ของ observability matrix จะได้

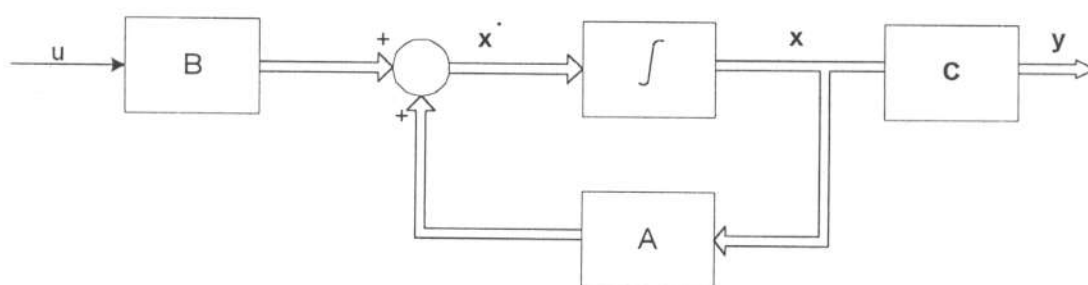
$$\text{rank}(O) = 4$$

สามารถสรุปได้ว่า ลูกตุ้มผกผัน เป็น กระบวนการที่ observable ดังนั้นก็สามารถออกแบบ ตัวประมาณค่าได้ เพื่อที่จะต้องไม่ได้วัดค่าของสเตตของลูกตุ้มผกผันทุกสเตต

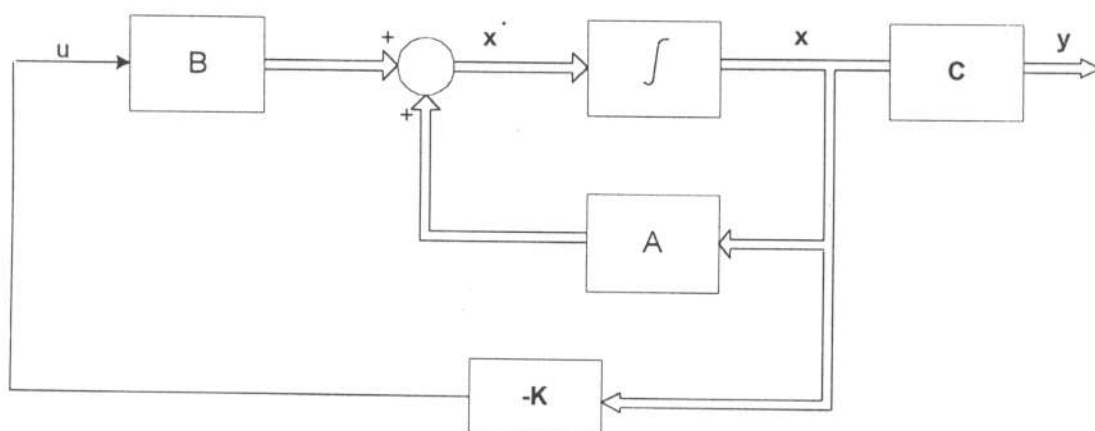
3.3.การออกแบบตัวควบคุม

เมื่อกระบวนการของลูกตุ้มผกผัน เป็น controllable ก็สามารถออกแบบตัวควบคุม เพื่อที่จะควบคุมให้ระบบมีเสถียรภาพ และมีผลตอบสนองทางเวลาที่ดีได้ ในการออกแบบตัวควบคุม ในวิทยานิพนธ์นี้ จะเป็น การควบคุมเหมาะสมที่สุด (Optimal control) โดยใช้วิธีของ Linear Quadratic Regulator หรือ LQR เหตุผลที่ใช้วิธีนี้ เพราะว่า เป็นวิธีการออกแบบระบบควบคุม ที่เหมาะสมสำหรับปัญหาที่มีการควบคุมหลายตัวแปร (Multivariable) นั่นคือระบบของลูกตุ้มผกผัน เป็นระบบที่มีอินพุตเดียวสองเอาต์พุต (Single Input Two Output) หรือ SITO และเป็นวิธีที่ให้ผลตอบสนองทางเวลาที่ดี

วิธีนี้จะอาศัยการป้อนกลับของสเตต โดยใช้อัตราขยายป้อนกลับทางลบ (negative feedback gain) จะเห็นได้ดังภาพที่ 3.1 ซึ่งภาพที่ 3.1 (a) จะแสดงระบบควบคุมแบบรูปเปิด (open loop) เพราะว่าไม่มีการป้อนกลับของสเตต ที่เป็นสัญญาณควบคุม u ส่วนภาพที่ 3.1 (b) แสดงระบบรูปปิด (close loop) ที่มีการป้อนกลับของสเตต เพราะว่ามีส่วน x ป้อนกลับมาเป็นสัญญาณควบคุม



(a) แสดงระบบรูปเปิด



(b) แสดงระบบรูปปิด

ภาพที่ 3.1 แสดงระบบรูปเปิด และระบบรูปปิด

ในวิทยานิพนธ์นี้ สัญญาณควบคุม เป็นแรงดันไฟฟ้าที่ได้จากตัวควบคุม แต่สัญญาณนี้ไม่สามารถจ่ายกระแสให้กับมอเตอร์ได้ จึงต้องต่อผ่านวงจรขับมอเตอร์เสียก่อน เพื่อที่จะขยายกระแส และ จ่ายให้กับมอเตอร์ เพื่อใช้ ในการขับเคลื่อนตัวรถให้เคลื่อนที่ เมื่อมีการป้อนกลับด้วยสเทท สัญญาณควบคุม จะกลายเป็น

$$u = -Kx \quad (3.12)$$

เมื่อ K คือ อัตราขยายป้อนกลับของสเทท (state feedback gain)

ดังนั้นในการออกแบบระบบควบคุมโดยวิธีนี้ ก็เป็นการหาอัตราขยายป้อนกลับของสเทท เพื่อที่จะนำมาป้อนกลับ ให้แก่ระบบ นั่นเอง

พิจารณาระบบเชิงเส้น (Linear System) ที่เขียนอยู่ในรูปของสมการสเทท

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ Y &= Cx \end{aligned} \quad (3.13)$$

และ Quadratic performance index J ที่แสดงอยู่ในรูปของ

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (x^* Q x + u^* R u) dt \quad (3.14)$$

วัตถุประสงค์ คือ ต้องการทำให้ J มีค่าน้อยที่สุด (minimized J) โดยหาเมตริกซ์ K ที่เหมาะสมที่สุด (optimized)

เมื่อ Q เป็น positive-definite (หรือ positive-semidefinite) Hermitian หรือ real symmetric matrix, R เป็น positive-definite Hermitian หรือ real symmetric matrix และ control vector; u

ต่อไปให้เราแก้ ปัญหาที่เหมาะสม (optimization problem) โดยการแทนสมการที่ (3.12) ลงในสมการที่ (3.13) จะได้

$$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x \quad (3.15)$$

เราสมมติให้ เมตริกซ์ $(A - BK)$ มีเสถียรภาพ นั่นคือ ราก (eigenvalue) ของ เมตริกซ์ $(A - BK)$ เป็น ค่าจริงลบ (negative real parts) และแทนสมการที่ (3.12) ลงในสมการที่ (3.14) จะได้

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty (x^* Q x + x^* K^* R K x) dt \\ &= \int_0^\infty x^* (Q + K^* R K) x dt \end{aligned}$$

เครื่องหมาย * หมายถึง Transpose

เรากำหนดให้

$$\dot{x}^*(Q + K^*RK)x = -\frac{d}{dt}(x^*Px)$$

เมื่อ P เป็น positive-definite Hermitian matrix หรือ real symmetric matrix ดังนั้นจะได้

$$\dot{x}^*(Q + K^*RK)x = -\dot{x}^*Px - x^*P\dot{x} = -x^*[(A - BK)^*P + P(A - BK)]x$$

เปรียบเทียบทั้งสองข้างของสมการข้างบน จะได้ว่า

$$(A - BK)^*P + P(A - BK) = -(Q + K^*RK) \quad (3.16)$$

ถ้า เมตริกซ์ $(A - BK)$ เป็นเมตริกซ์ที่มีเสถียรภาพ เมตริกซ์ P ที่เป็น positive definite ก็ยังทำให้สมการที่ (3.16) เป็นจริง

ขั้นตอนต่อไปคือ หาค่าของเมตริกซ์ P จากสมการที่ (3.16) สังเกตเห็นได้ว่า อาจจะมีเมตริกซ์ P จะมีมากกว่าหนึ่งเมตริกซ์ ที่ทำให้สมการเป็นจริง ถ้าระบบมีเสถียรภาพ ก็จะมีเมตริกซ์ P เพียงตัวเดียวที่ทำให้ สมการเป็นจริง นั่นก็หมายความว่า ถ้าเราหาคำตอบของสมการนี้ และหาเมตริกซ์ P ที่ เป็น positive definite เพียงตัวเดียวที่ทำให้ระบบมีเสถียรภาพ ส่วนเมตริกซ์ P ตัวอื่นที่ทำให้สมการเป็นจริง ที่ไม่เป็น positive definite ก็ให้ตัดทิ้งไป

Performance index J สามารถหาได้จาก

$$J = \int_0^{\infty} \dot{x}^*(Q + K^*RK)x dt = -x^*Px|_0^{\infty} = -x^*(\infty)Px(\infty) + x^*(0)Px(0)$$

เมื่อ eigenvalues ของ $(A - BK)$ ทุกตัว สมมุติให้มีค่าจำนวนจริงลบ เราจะได้ $x(\infty) \rightarrow 0$ ดังนั้น จะได้

$$J = x^*(0)Px(0) \quad (3.17)$$

วิธีการแก้ปัญหาของ quadratic optimal control เราจะดำเนินการดังต่อไปนี้ เมื่อ R สมมุติให้เป็น positive definite Hermitian matrix หรือ real symmetric matrix เราสามารถเขียนได้ว่า

$$R = T^*T$$

เมื่อ T เป็น nonsingular matrix ดังนั้นสมการที่ (3.16) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$(A - BK)^*P + P(A - BK) + (Q + K^*T^*TK) = 0$$

$$(A^* - K^*B^*)P + P(A - BK) + Q + K^*T^*TK = 0$$

ซึ่งสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$A^*P + PA + [TK - (T^*)^{-1}B^*P]^*[TK - (T^*)^{-1}B^*P] - PBR^{-1}B^*P + Q = 0$$

ในการ minimized ของ J ที่สัมพันธ์กับค่า K จะต้อง minimized ค่าของ

$x^*[TK - (T^*)^{-1}B^*P]^*[TK - (T^*)^{-1}B^*P]^*x$
 เทอมสุดท้ายในวงเล็บจะต้องไม่เป็นลบ ดังนั้นค่าน้อยที่สุดก็คือศูนย์ จะได้

$$TK = (T^*)^{-1}B^*P$$

ดังนั้น

$$K = R^{-1}B^*P \quad (3.18)$$

สมการที่ (3.18) จะให้ optimal feedback gain matrix K ดังนั้น optimal control law ที่ใช้กับ quadratic optimal control problem เมื่อ performance index ที่แสดงในสมการที่ (3.15) เป็นเชิงเส้น และแสดงโดย

$$u(t) = -Kx(t) = -R^{-1}B^*Px(t)$$

เมตริกซ์ P ในสมการที่ (3.18) จะต้องอยู่ภายใต้เงื่อนไขเดียวกับ สมการที่ (3.16) หรือลดรูปได้คือ

$$A^*P + PA - PBR^{-1}B^*P + Q = 0 \quad (3.19)$$

สมการที่ (3.19) เรียกว่า reduced matrix Riccati equation

ขั้นตอนการออกแบบ เป็นดังต่อไปนี้

1. แก่สมการที่ (3.19) คือ reduced matrix Riccati equation จะได้เมตริกซ์ P
2. แทนเมตริกซ์ P ลงในสมการที่ (3.18) แล้วจะได้เมตริกซ์ K ซึ่งเป็น optimal matrix

ในการหาอัตราขยายป้อนกลับของสเตท หาได้โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยในการหา ซึ่งโปรแกรมที่ใช้ คือ โปรแกรม MATLAB ซึ่งเป็นของบริษัท Math Works ,Inc.จาก สหรัฐอเมริกา เป็นโปรแกรมที่นิยมใช้ในสาขาวิศวกรรมไฟฟ้า โดยในโปรแกรม MATLAB นี้จะมี toolbox เกี่ยวกับการออกแบบควบคุม ใน toolbox นี้จะมีคำสั่ง lqr ซึ่งเป็นคำสั่งที่ใช้ในการหา อัตราขยายป้อนกลับของสเตท ได้

คำสั่ง lqr ในโปรแกรม MATLAB สามารถแก้ปัญหาที่เป็น continuous time , linear , quadratic regulator และ สมการ Riccati equation โดยคำสั่งนี้จะคำนวณหา optimal feedback gain matrix K

โดยทำการ minimizes ค่าของ performance index

$$J = \int_0^{\infty} (x^*Qx + u^*Ru)dt$$

รูปแบบของคำสั่ง คือ

$$[K, P, E] = lqr(A, B, Q, R)$$

ได้ optimal feedback gain matrix K

ได้ค่าของเมตริกซ์ P ที่เป็น positive-definite เพียงตัวเดียวที่เป็นผลลัพธ์ของสมการ Riccati

$$A^*P + PA - PBRB^*P + Q = 0$$

และ จะได้ close loop poles หรือ eigenvalues ของ เมตริกซ์ $(A - BK)$

ในการออกแบบตัวควบคุม ที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ จะให้

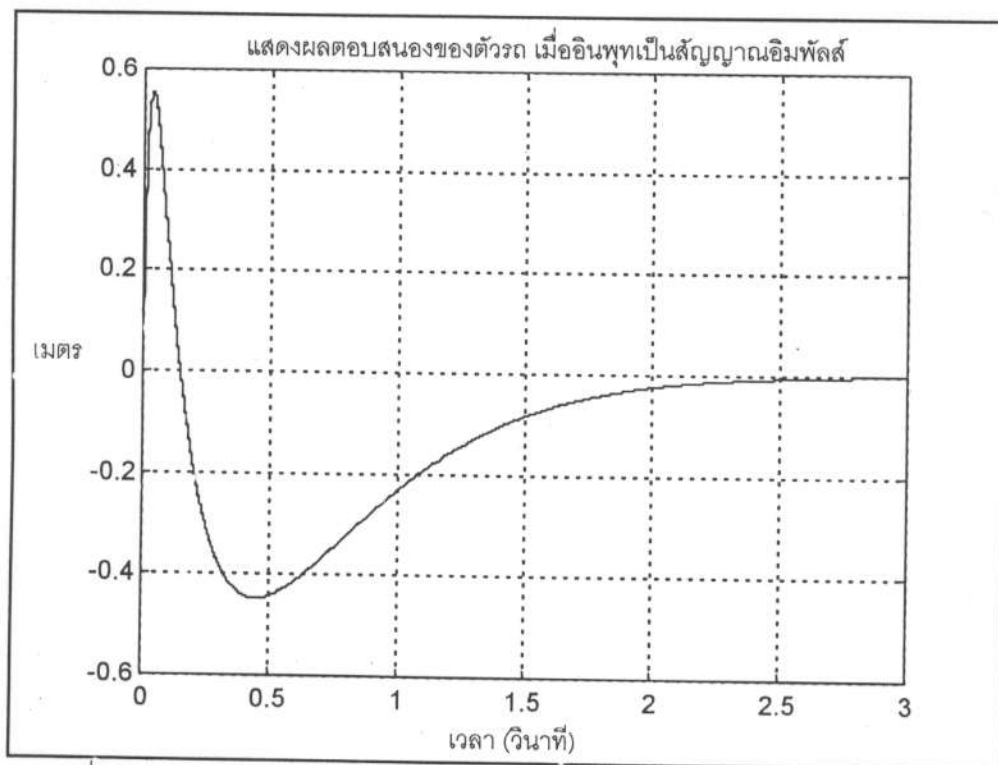
$$Q = \begin{bmatrix} 800 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 800 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

และ control weighting ของ $r = 100$

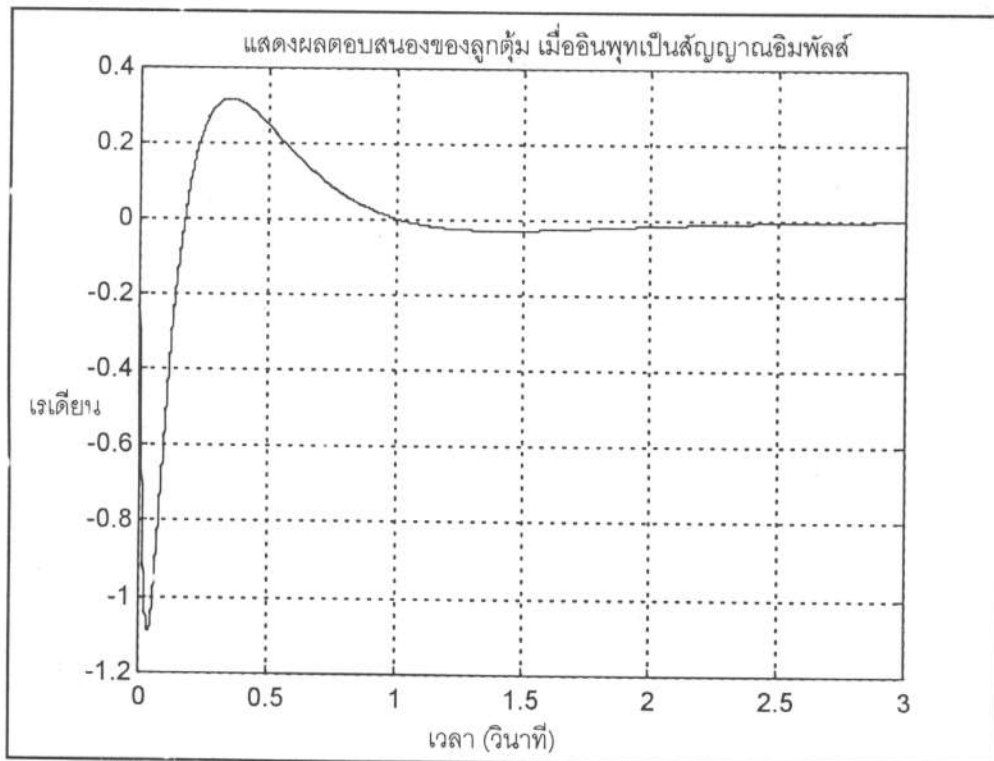
ดังนั้น จะได้ผลลัพธ์ของอัตราขยาย คือ

$$K = [-2.8284 \quad -9.3492 \quad -3.5814 \quad -1.9878]$$

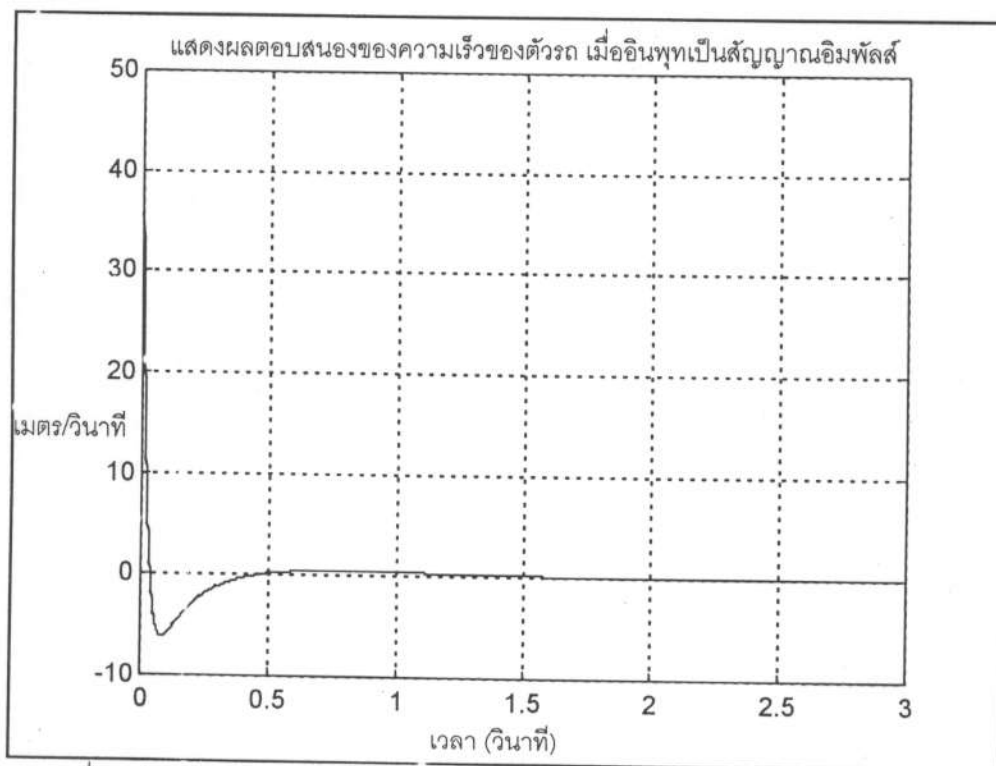
จากการหา eigenvalues ของเมตริกซ์ $(A - BK)$ โพลของระบบลูปปิด สำหรับ อัตราขยายนี้คือ -46.5126 , -7.7754 , $-2.3603 + 0.9106j$ และ $-2.3603 - 0.9106j$ สามารถดูผลตอบสนองทางเวลาของแต่ละสเตท เมื่ออินพุตเป็นสัญญาณอิมพัลส์ ได้ดังต่อไปนี้



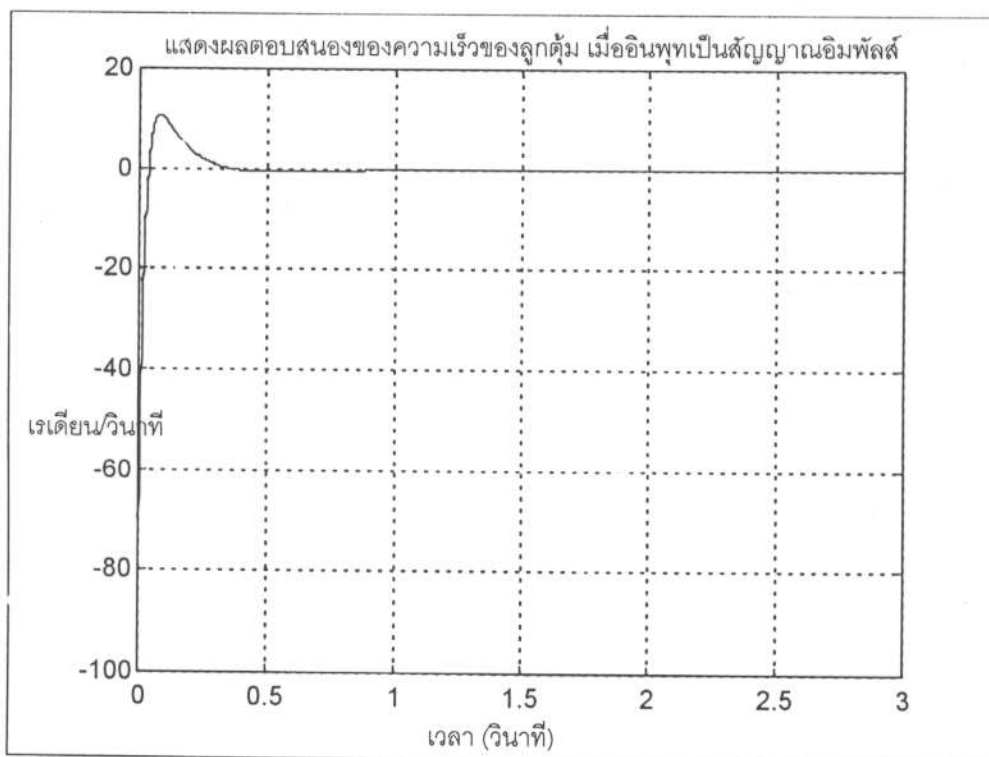
ภาพที่ 3.2 แสดงผลตอบสนองทางเวลาของตำแหน่งของตัวรถ เมื่ออินพุตเป็นสัญญาณอิมพัลส์



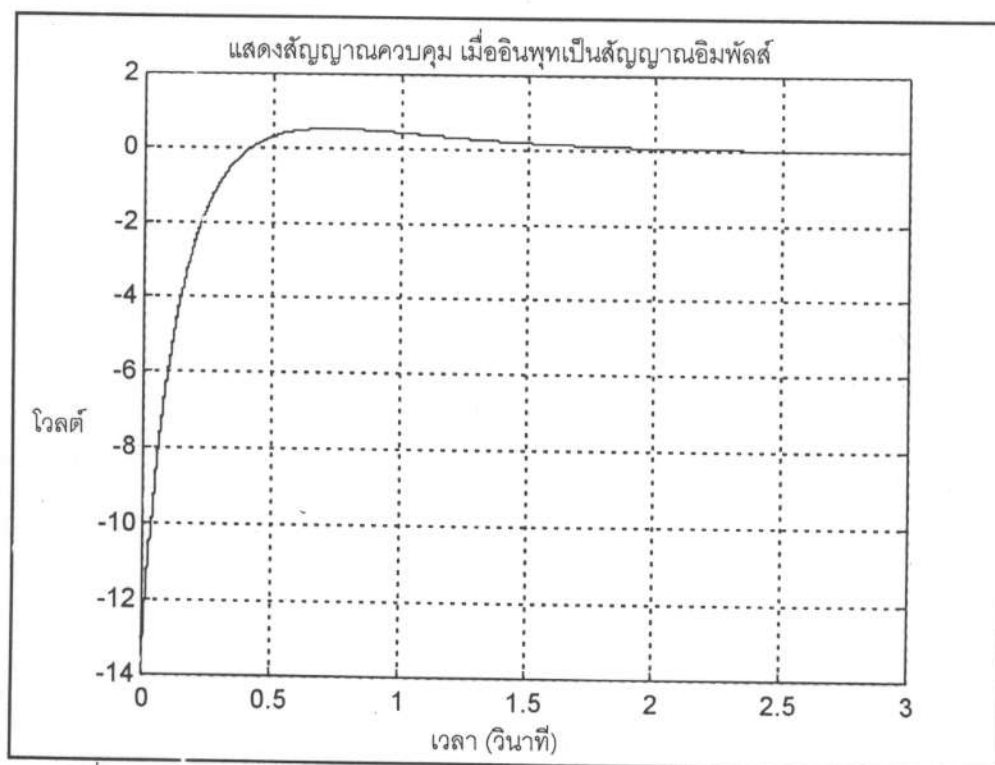
ภาพที่ 3.3 แสดงผลตอบสนองทางเวลาของมุมของลูกตุ้ม เมื่ออินพุตเป็นสัญญาณอิมพัลส์



ภาพที่ 3.4 แสดงผลตอบสนองทางเวลาของความเร็วของตัวรถ เมื่ออินพุตเป็นสัญญาณอิมพัลส์



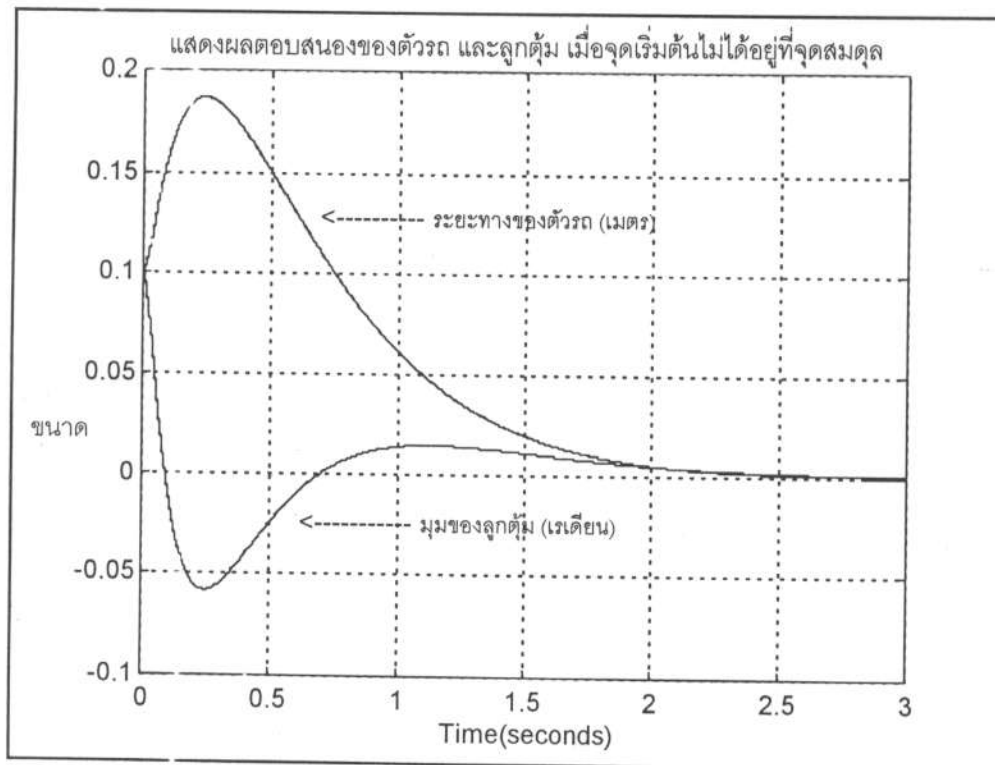
ภาพที่ 3.5 แสดงผลตอบสนองทางเวลาของความเร็วของลูกตุ้ม เมื่ออินพุตเป็นสัญญาณอิมพัลส์



ภาพที่ 3.6 แสดงผลตอบสนองทางเวลาของสัญญาณควบคุม เมื่ออินพุตเป็นสัญญาณอิมพัลส์

ผลตอบสนองทางเวลาของระบบ ที่แสดงใน ภาพที่ 3.2 ถึงภาพที่ 3.6 จะเห็นได้ว่า เมื่อมีสัญญาณอินพุตที่เป็นสัญญาณอิมพัลส์ เข้ามารบกวนระบบ ระบบก็จะพยายามปรับตัวเองให้มีเสถียรภาพ โดยจะใช้เวลาประมาณ 2 วินาที โดยใช้สัญญาณควบคุมสูงสุดประมาณ ± 13.5 โวลต์

ถ้าพิจารณาระบบในกรณีที่มีตำแหน่งเริ่มต้น ไม่ได้อยู่ที่ตำแหน่งศูนย์ โดยการกำหนดให้ตำแหน่งของตัวรถ และมุมของลูกตุ้มอยู่ที่ตำแหน่งต่าง ๆ ซึ่งสามารถดูผลตอบสนองทางเวลาของระบบควบคุม ได้ดังภาพที่ 3.7



ภาพที่ 3.7 แสดงผลตอบสนองทางเวลา ของลูกตุ้มผกผัน เมื่อตำแหน่งเริ่มต้นไม่เป็นศูนย์

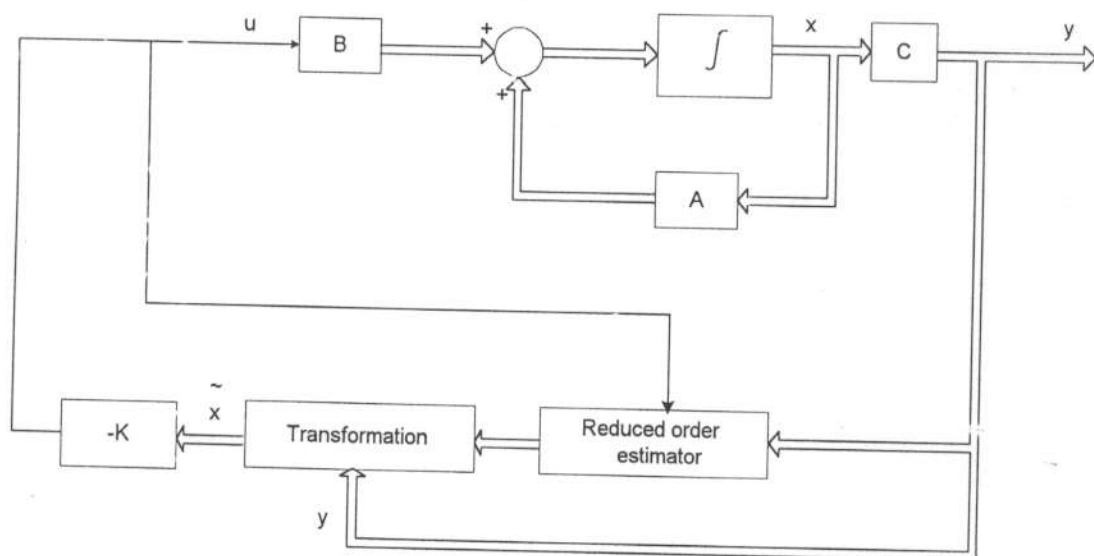
จากผลตอบสนองทางเวลา ที่แสดงในภาพที่ 3.7 จะเห็นได้ว่า เมื่อตำแหน่งเริ่มต้นของตัวรถ และตำแหน่งของมุมของลูกตุ้ม ไม่ได้อยู่ที่ตำแหน่งสมดุล ระบบก็จะพยายามปรับตัวให้เข้าสู่ตำแหน่งสมดุล ดังนั้นก็แสดงให้เห็นว่าตัวควบคุมที่ออกแบบนั้น สามารถควบคุมให้ระบบมีเสถียรภาพได้

3.4 การออกแบบตัวประมาณค่า

ในการออกแบบตัวควบคุม ที่ออกแบบไว้แล้วในหัวข้อ 3.3 เป็นการออกแบบระบบควบคุม โดยสมมุติให้ ทุกสเตท สามารถหาค่าได้เพื่อที่จะนำมาป้อนกลับ แต่ในทางปฏิบัติ ไม่สามารถวัดค่าได้ทุกสเตท ดังนั้น เราต้องทำการประมาณค่า สเตทที่ไม่ได้วัดค่า ซึ่งในการประมาณค่าของ สเตทที่ไม่ได้วัดค่า เรียกว่า observation โดยอุปกรณ์ที่ได้จากการประมาณค่า สเตทที่ไม่ได้วัดค่า เรียกว่า ตัวประมาณค่า (estimator) หรือที่นิยมเรียกว่า ตัวประมาณการวัด (observer) ถ้า ประมาณค่าทุกสเตทของระบบ เรียกว่า Full-order state estimator แต่ควรระวังในการใช้งาน เพราะถ้าสามารถวัดสเตท ได้โดยตรงจากการวัด ควรจะใช้สเตทที่ได้จากการวัดโดยตรงจะดีกว่า ควรประมาณค่าสเตท ที่ไม่ได้วัดค่าโดยตรงเท่านั้น เมื่อระบบมีตัวแปรสเตท n สเตท แต่สามารถวัดสเตทได้โดยตรง เพียง m สเตท โดยที่ $m < n$ เราเรียกการประมาณค่าแบบนี้ว่า reduced-order estimator ผู้เสนอแนวความคิดนี้คือ D.Luenberger [13]

ตัวประมาณค่า ทำการประมาณค่าของสเตท โดยยึดถือเอาการวัดของเอาท์พุท และตัวแปรควบคุม โดยแนวความคิดของ observability ที่พิจารณาในหัวข้อ 3.2 มีส่วนสำคัญมาก โดยจะสามารถออกแบบตัวประมาณค่า ได้ก็ต่อเมื่อ ระบบ observable เท่านั้น

ระบบลูกตุ้มผกผันที่พิจารณาในวิทยานิพนธ์นี้ มีสเตทอยู่ 4 สเตท แต่วัดสเตทจากเอาท์พุท ได้เพียง 2 สเตท ดังนั้น เราต้องทำการประมาณค่า สเตทที่ไม่ได้วัดค่า โดยใช้วิธี Reduced order estimator โดย สเตทที่สามารถวัดได้โดยตรง โดยใช้ โพเทนชิออมิเตอร์ วัดคือ ตำแหน่งของตัวรถ กับ มุมของแท่งลูกตุ้ม ดังนั้นก็ประมาณค่าสเตทเพียง 2 สเตท เท่านั้น คือ ความเร็วของตัวรถ และ ความเร็วของลูกตุ้ม



ภาพที่ 3.8 แสดงลักษณะของ Reduced order estimator

วิธีการของ reduced order estimator เริ่มโดยการหา linear transformation ของสแตตคือ

$$z = Tx, \quad \text{เมื่อ } \dim(T) = (n-m) \times n \quad \text{และ } \dim(z) = (n-m) \times 1$$

เมื่อ $n=4, m=2$ และ T เป็นเมตริกซ์ใด ๆ ที่ทำให้ $E = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}$ เป็น nonsingular และ กำหนด

ให้ $E^{-1} = \begin{bmatrix} P & M \end{bmatrix}$, ถ้า $\text{rank}(C) = m$ การรวมกันของ Y และ z จะได้

$$\begin{bmatrix} Y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} x \quad \text{จะได้} \quad x = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ z \end{bmatrix} = PY + Mz$$

ต่อไปนีสมมติว่า เราสร้าง full order estimator ของ z (มิติของ estimator = มิติของ $z = n-m$) ดังนั้นเราสามารถสร้างการประมาณค่าของ x จาก

$$\hat{x} = PY + M\hat{z} \quad (3.20)$$

เมื่อ $\hat{x}$ เป็นการประมาณค่าของ x

$\hat{z}$ เป็นการประมาณค่าของ z

ดังนั้น การประมาณค่าของ x ทำได้โดยการ เอาเมตริกซ์ E คูณเข้าข้างหน้ากับสมการสแตต จะได้

$$Ex^* = EAx + EBu$$

แทนค่าของ x และ E จะได้

$$Ex^* = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} x^* = \begin{bmatrix} Y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} Ax + \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} Bu = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} P & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} Bu$$

ดังนั้น จะได้

$$\begin{bmatrix} Y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CAP & CAM \\ TAP & TAM \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} CB \\ TB \end{bmatrix} u \equiv \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

สมการเชิงอนุพันธ์ ของ z จะได้

$$\dot{z}^* = A_{22}z + (A_{21}Y + B_2u)$$

เราสามารถแทนค่าของ z ด้วย $\hat{z}$ และรวมเทอมของความผิดพลาดเข้าไปด้วย

$$\dot{\hat{z}}^* = A_{22}\hat{z} + (A_{21}Y + B_2u) + L(Y - C\hat{x}) \quad (3.21)$$

เทอมที่อยู่ภายในวงเล็บแรกสุด ซึ่งเป็นอินพุตของตัวประมาณค่า ส่วนเทอมที่อยู่ภายในวงเล็บที่สองเป็นเทอมแก้ไขความผิดพลาด (correction term) ที่ทำให้ความผิดพลาดของตัวประมาณค่ามีค่าเข้าสู่ศูนย์

จะเห็นได้ว่าถ้า $[P \ M]$ เป็นตัวผกผัน (Inverse) ของ E จะได้ $CP = I$ และ $CM = 0$ ดังนั้น

$$Y - C\hat{x} = Y - C(PY + M\hat{z}) = Y - CPY - CM\hat{z} = Y - Y - 0 = 0$$

อันที่จริงแล้วการทำแบบนี้ ค่าของเทอมแก้ไขความผิดพลาดเป็นศูนย์ตลอดเวลา คือ ไม่ได้ถูกทำการแก้ไขเลย ถ้าย้อนกลับไปดูการควบคุมแบบ Classical control จะเห็นได้ว่าบางครั้งเมื่อทำการป้อนกลับด้วยเอาต์พุต เพียงอย่างเดียวทำไม่ได้ แต่ถ้าทำการป้อนกลับด้วยเอาต์พุต ร่วมกับ อนุพันธ์ของเอาต์พุต อาจจะช่วยแก้ปัญหาแก้ไขความผิดพลาดได้

ดังนั้นจะแทนเทอมแก้ไขความผิดพลาดด้วยอนุพันธ์ของค่าที่ทำการวัด โดยจะได้สมการเชิงอนุพันธ์ของ Y จากสมการของการแปลงของระบบ (transformed system equation)

$$Y^* = A_{11}Y + A_{12}z + B_1u \quad (3.22)$$

การแก้ไข ทำได้โดยการย้ายปริมาณที่รู้ค่าทั้งหมดของสมการที่ (3.22) มาอยู่ด้านเดียวกัน พร้อมทั้งแทนค่าของ z ด้วย $\hat{z}$ ซึ่งการใช้เทอมนี้เป็นเอาต์พุตของตัวประมาณค่า สำหรับแทนลงในเทอมแก้ไขความผิดพลาด ก็จะได้ ตัวประมาณค่า ที่มีมิติ $n - m$ คือ

$$\hat{z}^* = A_{22}\hat{z} + (A_{21}Y + B_2u) + L(Y^* - A_{11}Y - B_1u - A_{12}\hat{z}) \quad (3.23)$$

ต้องแสดงให้เห็นว่า ตัวประมาณค่าทำการแก้ไขความผิดพลาดได้อย่างไร โดยต้องพิสูจน์ให้เห็นว่า ค่าของความผิดพลาดจะเข้าใกล้ศูนย์ เมื่อเทียบกับเวลา ซึ่งเป็นการตรวจสอบว่าความผิดพลาดของระบบจะมีค่าเข้าสู่ศูนย์ โดยการลบ (Subtracting) สมการอนุพันธ์ ของ z ออกจากสมการอนุพันธ์ ของ $\hat{z}$ จะได้ความผิดพลาดของระบบ (error system dynamics) เป็น

$$\begin{aligned} \hat{z}^* - z^* &= A_{22}\hat{z} + (A_{21}Y + B_2u) + L(\dot{Y} - A_{11}Y - B_1u - A_{12}\hat{z}) - A_{22}z - (A_{21}Y + B_2u) \\ \hat{z}^* - z^* &= A_{22}(\hat{z} - z) - LA_{12}(\hat{z} - z) \\ \varepsilon^* &= (A_{22} - LA_{12})\varepsilon \end{aligned} \quad (3.24)$$

เมื่อ ε แทนค่าความผิดพลาดของระบบ

จากสมการที่ (3.24) จะเห็นได้ว่าค่าความผิดพลาดของระบบ จะขึ้นอยู่กับเมตริกซ์ L ซึ่งไม่ได้มีการกำหนดค่าที่แน่นอน ปัญหาก็คือ การเลือกค่าของเมตริกซ์ L โดยการวางตำแหน่งราก (eigenvalues) ของตัวประมาณค่า ไว้ที่ดี ที่จะทำให้ค่าความผิดพลาดน้อยที่สุด

โดยที่ D.Luenberger [13] แสดงให้เห็นว่า observability ของ (A_{12}, A_{22}) มีลักษณะคล้ายกับ observability ของ (C, A) ดังนั้นสามารถเลือกค่าของเมตริกซ์ L โดยการวางตำแหน่งราก (eigenvalues) ของตัวประมาณค่า ไว้ที่ใดก็ได้ใน Complex plane

เมื่อระบบมีเสถียรภาพ ค่าของ Y และ u จะมีค่าเป็นศูนย์

จะเห็นได้ว่า เทอมของ $\dot{Y}$ ที่อยู่ในสมการที่ (3.23) ซึ่งเป็นสมการของตัวประมาณค่า สามารถกำจัดให้หายไป โดยการเปลี่ยนตัวแปร โดยกำหนดให้

$$\begin{aligned} w &= \hat{z} - LY \\ \dot{w} &= \dot{\hat{z}} - L\dot{Y} \end{aligned} \quad (3.24)$$

แทนค่าของสมการที่ (3.24) ลงในสมการที่ (3.23) จะได้

$$\begin{aligned} \dot{w} + L\dot{Y} &= A_{22}(w + LY) + (A_{21}Y + B_2u) + L(\dot{Y} - A_{11}Y - B_1u - A_{12}(w + LY)) \\ \dot{w} &= (A_{22} - LA_{12})w + ((A_{22} - LA_{12})L + (A_{21} - LA_{11}))Y + (B_2 - LB_1)u \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\dot{w} = Fw + DY + Gu \quad (3.26)$$

เมื่อ $F = A_{22} - LA_{12}$, $D = FL + A_{21} - LA_{11}$, และ $G = B_2 - LB_1$

เรียกสมการที่ (3.25) และ (3.26) ว่าเป็นสมการของ Reduced order estimator

เมื่อแทนค่าของสมการที่ (3.24) ลงในสมการที่ (3.20) จะได้

$$\begin{aligned} \hat{x} &= PY + M\hat{z} = PY + M(w + LY) \\ \hat{x} &= (P + ML)Y + Mw \end{aligned}$$

หรือ

$$\hat{x} = NY + Mw \quad (3.27)$$

เมื่อ $N = P + ML$

เรียกสมการที่ (3.27) ว่าเป็นสมการของ Transformation

ตำแหน่งของโพล ของ reduced order estimator หาได้จาก eigenvalue ของเมตริกซ์ $(A_{22} - LA_{12})$ หรือ เมตริกซ์ F ดังนั้นในการออกแบบตัวประมาณค่า ควรจะให้ตำแหน่งของโพล ของตัวประมาณค่า อยู่ใน Left half plane (LHP) และอยู่ทางซ้ายมือของโพลของระบบลูปปิด เพื่อที่จะทำให้ตัวประมาณค่ามีผลตอบสนองเร็วกว่าระบบลูปปิด

สังเกตเห็นได้ว่า ในกรณีที่เมตริกซ์ C อยู่ในรูปแบบดังต่อไปนี้ ก็สามารถเลือกเมตริกซ์ T ดังนี้คือ

$$C = [I_m \quad 0_{m,n-m}] \rightarrow T = [0_{n-m,m} \quad I_{n-m}] \rightarrow E = I_n$$

ในกรณีนี้ไม่ต้องใช้ Transformation เพราะว่า เมตริกซ์ A_{11} , A_{12} หรือเมตริกซ์อื่น ๆ ที่ต้องการ สามารถหาได้โดยตรงจากส่วนย่อยของ A และ B

เมื่อ $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ และ $Y = \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix}$
โดยที่

$$F = A_{22} - LA_{12}$$

$$F = \begin{bmatrix} -45.5537 & 0 \\ 89.3210 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4.9686 & 4.7582 \\ 4.7582 & 42.7478 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50.5223 & -4.7582 \\ 84.5628 & -42.7478 \end{bmatrix}$$

$$D = FL + A_{21} - LA_{11}$$

$$D = \begin{bmatrix} -50.5223 & -4.7582 \\ 84.5628 & -42.7478 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.9686 & 4.7582 \\ 4.7582 & 42.7478 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -8.1750 \\ 0 & 35.2647 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4.9686 & 4.7582 \\ 4.7582 & 42.7478 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -273.66 & -451.97 \\ 216.75 & -1389.74 \end{bmatrix}$$

$$G = B_2 - LB_1$$

$$G = \begin{bmatrix} 42.5455 \\ -83.4225 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4.9686 & 4.7582 \\ 4.7582 & 42.7478 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42.5455 \\ -83.4225 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นรูปแบบของสมการของ reduced order estimator ที่ใช้ ในการควบคุมลูกตุ้มผกผัน คือ

$$w^* = \begin{bmatrix} -50.5223 & -4.7582 \\ 84.5628 & -42.7478 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} -273.66 & -451.97 \\ 216.75 & -1389.74 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 42.5455 \\ -83.4225 \end{bmatrix} u \quad (3.28)$$

จากสมการที่ (3.28) จะได้

$$\dot{w}_1 = -50.5223w_1 - 4.7582w_2 - 273.66y - 451.97\theta + 42.5455u \quad (3.29)$$

$$\dot{w}_2 = 84.5628w_1 - 42.7478w_2 + 216.75y - 1389.74\theta - 83.4225u \quad (3.30)$$

เมื่อโพลของตัวประมาณค่า อยู่ที่ $-46.6350 \pm 19.6788j$ แสดงให้เห็นว่า โพลของตัวประมาณค่า เร็วกว่าโพลของระบบ ดังนั้นจะทำให้ตัวประมาณค่า มีการตอบสนอง เร็วกว่าระบบ
ดูปิด

สมการของ transformation ที่ว่า

$$\hat{x} = NY + Mw$$

เมื่อ $N = P + ML$ จะได้

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.9686 & 4.7582 \\ 4.7582 & 42.7478 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4.9686 & 4.7582 \\ 4.7582 & 42.7478 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นสมการของ transformation ที่ใช้ควบคุมลูกตุ้มผกผัน จะได้

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4.9686 & 4.7582 \\ 4.7582 & 42.7478 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w \quad (3.31)$$

จากสมการที่ (3.31) จะได้ว่า

$$\hat{x}_1 = y$$

$$\hat{x}_2 = \theta$$

$$\hat{x}_3 = 4.9686y + 4.7582\theta + w_1$$

$$\hat{x}_4 = 4.7582y + 42.7478\theta + w_2$$

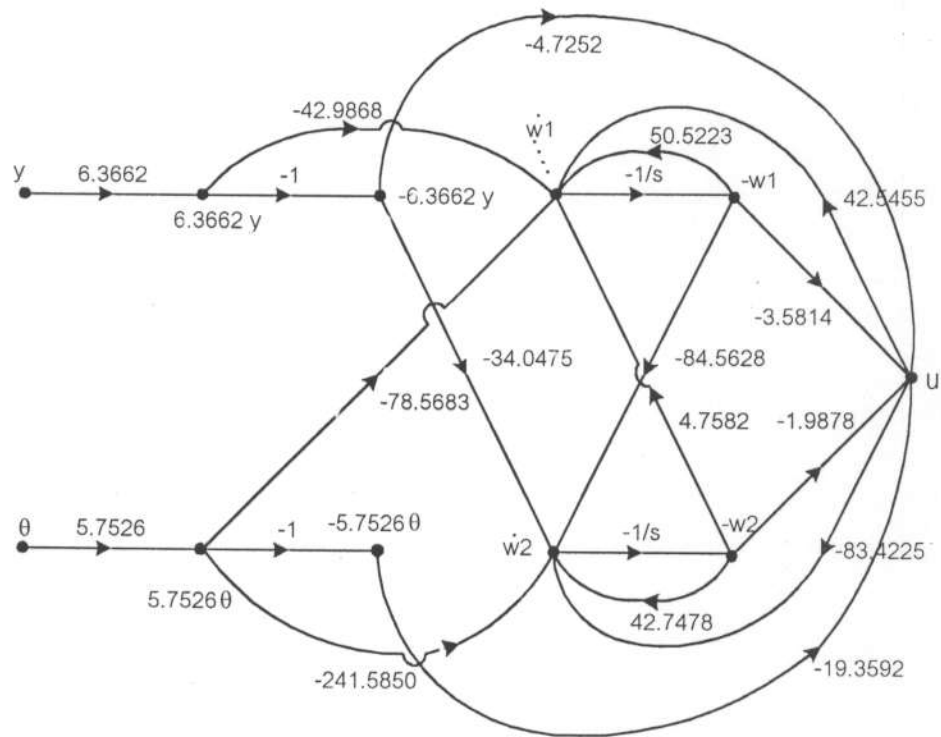
สมการของสัญญาณควบคุม คือ

$$u = -K \hat{x} = -KNY - KMw$$

$$u = - \begin{bmatrix} -2.8284 & -9.3492 & -3.5814 & -1.9878 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ 4.9686y + 4.7582\theta + w_1 \\ 4.7582y + 42.7478\theta + w_2 \end{bmatrix}$$

$$u = 30.0815y + 111.3655\theta + 3.5814w_1 + 1.9878w_2 \quad (3.32)$$

จากสมการที่ (3.29) , (3.30) และ (3.32) สามารถเขียน Signal flow graph ของตัวควบคุม โดยรวมเอาค่าของ sensor gain K_y และ K_θ เข้าไปด้วย ดังแสดงในภาพที่ 3.10



ภาพที่ 3.10 Signal flow graph ของตัวควบคุม ที่ใช้ควบคุมลูกตุ้มผกผัน

3.5 การต่ออัตราขยายป้อนกลับของสเตทเข้ากับตัวประมาณค่า

พิจารณาสมการสเตท มิติ n ที่เขียนอยู่ในรูปของ

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.33)$$

$$Y = Cx$$

ถ้าสเตทไม่ได้มีการวัดทุกสเตท ก็ต้องทำการออกแบบ ตัวประมาณค่า ดังนั้นสมการของสัญญาณควบคุม จะเขียนในรูป

$$u = v - K \hat{x} \quad (3.34)$$

เมื่อ v คือ สัญญาณอ้างอิง (external reference input)

และสมการของ transformation ที่ว่า

$$\hat{x} = NY + M \dot{w} \quad (3.35)$$

แทนค่าสมการที่ (3.34) และสมการที่ (3.35) ลงในสมการที่ (3.33) จะได้

$$\dot{x} = Ax + B(v - K \hat{x}) = Ax + Bv - BK \hat{x}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= Ax + Bv - BK(NY + Mw) \\
 \dot{x} &= Ax + Bv - BKNCx + BKMw \\
 \dot{x} &= (A - BKNC)x - BKMw + Bv
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

จากสมการของ reduced order estimator ที่ว่า

$$\dot{w} = Fw + DY + Gu \tag{3.37}$$

แทนค่าสมการที่ (3.34) และสมการที่ (3.35) ลงในสมการที่ (3.37) จะได้

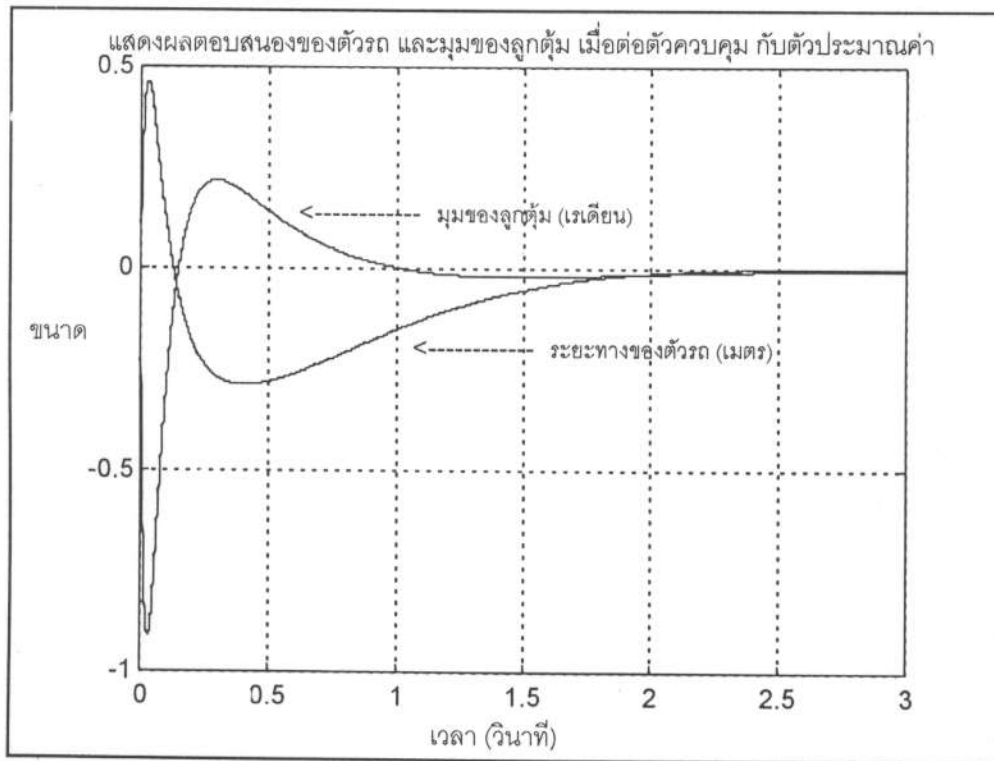
$$\begin{aligned}
 \dot{w} &= Fw + DCx + G(v - K^{\wedge}x) \\
 \dot{w} &= Fw + DCx + Gv - GK(NCx + Mw) \\
 \dot{w} &= (DC - GKNC)x + (F - GKM)w + Gv
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

สามารถเขียนการต่ออัตราขยายของสเตทเข้ากับตัวประมาณค่า ในรูปของสมการสเตทได้ โดยใช้สมการที่ (3.36) และสมการที่ (3.38) ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BKNC & -BKM \\ DC - GKNC & F - GKM \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ G \end{bmatrix} v \tag{3.39}$$

จากสมการที่ (3.39) เป็นสมการสเตทของระบบรวม เมื่อมีการต่อ อัตราขยายป้อนกลับของสเตทเข้ากับตัวประมาณค่า จะเห็นได้ว่า รากของระบบรวมจะประกอบไปด้วย รากของระบบที่มีการป้อนกลับด้วยสเตท และรากของตัวประมาณค่า ดังนั้นการต่ออัตราขยายป้อนกลับของสเตทเข้ากับตัวประมาณค่า ทำให้การเปลี่ยนแปลงของระบบที่ออกแบบไว้มีการเปลี่ยนแปลงน้อยมาก เพราะว่าโพลของตัวประมาณค่ามีผลตอบสนองเร็วกว่า โพลของระบบที่ออกแบบไว้มาก ซึ่งในการออกแบบ สามารถแยกกันออกแบบได้ โดยเรียกคุณสมบัตินี้ว่า Separation property

สามารถดูผลตอบสนองทางเวลา ของระบบรวม เมื่อต่ออัตราขยายป้อนกลับของสเตทเข้ากับตัวประมาณค่า ได้ดังภาพที่ 3.11



ภาพที่ 3.11 แสดงผลตอบสนองทางเวลาของระบบรวม เมื่อต่ออัตราขยายป้อนกลับ เข้ากับ ตัวประมาณค่า

ส่วนการตรวจสอบค่าความผิดพลาดของระบบ ที่เกิดจากการใช้ตัวประมาณค่า สามารถทำได้โดยการใช้คุณสมบัติแยกกันออกแบบ (Separation property) โดยรวมระบบลูปปิด และ ค่าความผิดพลาดของระบบ เข้าด้วยกัน โดยที่

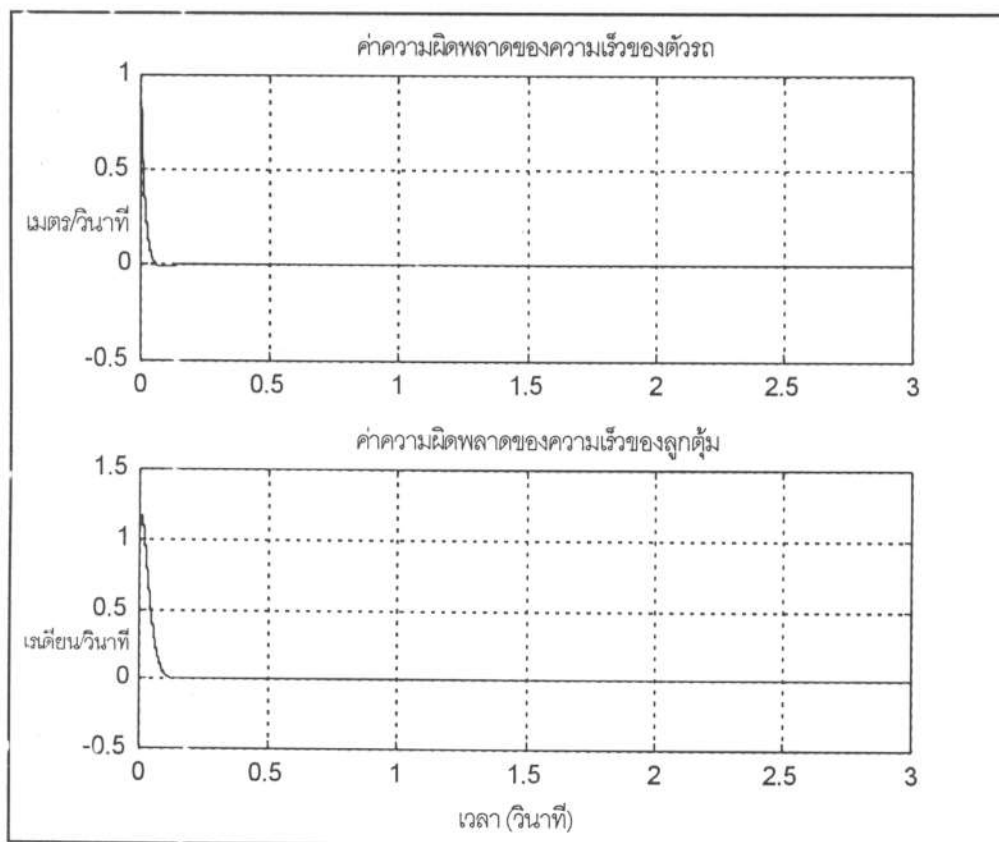
$$\begin{aligned} u &= v - K \hat{x} \\ \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} - BK\hat{x} + Bv \\ \hat{x} &= x + M\varepsilon \end{aligned}$$

สามารถเขียนสมการของระบบลูปปิด และ สมการความผิดพลาดของระบบ ในรูปของสมการสเตท ได้คือ

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BKM \\ 0 & A_{22} - LA_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v$$

และสามารถดูผลตอบสนองทางเวลาของค่าความผิดพลาดของระบบ ที่เกิดจากการใช้ตัวประมาณค่า ได้ดังภาพที่ 3.12 ซึ่งจะเห็นได้ว่า เมื่อให้ค่าความผิดพลาดเริ่มต้นไม่เท่ากับศูนย์ ตัว

ประมาณค่าจะทำให้ ค่าความผิดพลาดของระบบที่เกิดจากการใช้ตัวประมาณค่ามีค่าเป็นศูนย์เมื่อเทียบกับเวลา โดยให้เวลาเร็วกว่าเวลาสุ่มดูลของระบบ นั้นแสดงได้ว่า การใช้ตัวประมาณค่าไม่มีผลต่อความผิดพลาดของสัญญาณที่ทำการประมาณค่า



ภาพที่ 3.12 แสดงค่าความผิดพลาดที่เกิดจากการใช้ตัวประมาณค่า