

บทที่ 2

การวิเคราะห์ระบบลูกตุ้มผกผัน

2.1 การวิเคราะห์หาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของลูกตุ้มผกผัน

ขั้นตอนแรกของการออกแบบระบบควบคุม คือ การวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) ของกระบวนการ ในการวิเคราะห์สามารถทำได้หลายวิธี แต่ในวิทยานิพนธ์นี้จะประยุกต์ใช้วิธีของลากราง (Lagrange's Method) [18] ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ในการวิเคราะห์หาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ของกระบวนการ ที่มีการเคลื่อนที่ ของเครื่องจักรกลที่ซับซ้อน เช่น การเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ เป็นต้น โดยแสดงในรูปของ สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equation) ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์ ที่ได้จากการใช้วิธีนี้เรียกว่า สมการของลากราง (Lagrange's equation) โดยอาศัย กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน (Newton's Laws of motion)

ฟังก์ชันของลากราง เรียกว่า ลากรางเจียน (Lagrangian) เขียนอยู่ในรูปของ

$$\Gamma = K - P \quad (2.1)$$

เมื่อ K คือ ผลรวมของพลังงานจลน์ (kinetic energy)

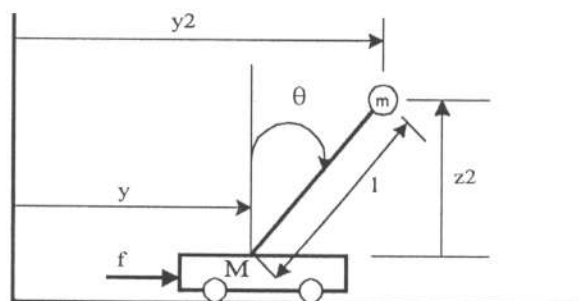
P คือ ผลรวมของพลังงานศักย์ (potential energy)

จากนั้นสามารถแสดง สมการของการเคลื่อนที่ โดยใช้ สมการของลากราง ได้คือ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i} = Q_i \quad (2.2)$$

เมื่อ q_i คือ ตัวแปรที่สนใจพิจารณา และ Q_i คือ แรงกระทำทั่วไป (Generalized forces)

สามารถหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของกระบวนการลูกตุ้มผกผัน ที่แสดงดังภาพที่ 2.1 ได้ดังต่อไปนี้



ภาพที่ 2.1 แสดงกระบวนการของลูกตุ้มผกผัน (Inverted Pendulum)

เมื่อ M คือ มวลของตัวรถ, น้ำหนักของสายพาน และ น้ำหนักของ มู่เล่ (pulley) มีหน่วยเป็นกิโลกรัม(kg), m คือ มวลของลูกตุ้ม มีหน่วยเป็นกิโลกรัม (kg) , l คือ ความยาวของแท่งลูกตุ้ม มีหน่วยเป็นเมตร (m) และ r คือ รัศมีของมู่เล่ มีหน่วยเป็นเมตร (m)

พิจารณาการเคลื่อนที่ของตัวรถในแนวราบ(horizontal) พลังงานจลน์ (kinetic energy) หาได้จาก

$$K_1 = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 \quad (2.3)$$

เมื่อ K_1 คือ พลังงานจลน์ของตัวรถ

y คือ ตำแหน่งของตัวรถ

แต่ลูกตุ้มสามารถเคลื่อนที่ได้ทั้งในแนวราบ และแนวตั้ง(vertical) พลังงานจลน์ หาได้จาก

$$K_2 = \frac{1}{2} m (\dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) \quad (2.4)$$

เมื่อ K_2 คือ พลังงานจลน์ของลูกตุ้ม

z_2 คือ ตำแหน่งของลูกตุ้ม

จากภาพที่ 2.1 จะได้

$$\begin{aligned} y_2 &= y + l \sin \theta & \dot{y}_2 &= \dot{y} + l \dot{\theta} \cos \theta \\ z_2 &= l \cos \theta & \dot{z}_2 &= -l \dot{\theta} \sin \theta \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลรวมของพลังงานจลน์ ของกระบวนการลูกตุ้มผกผัน จะได้

$$\begin{aligned} K &= K_1 + K_2 \\ K &= \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m \left[(\dot{y} + l \dot{\theta} \cos \theta)^2 + (-l \dot{\theta} \sin \theta)^2 \right] \\ K &= \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m \left[\dot{y}^2 + 2 \dot{y} l \dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

พิจารณาตัวรถ ขณะหยุดนิ่ง พลังงานศักย์ (potential energy) หาได้จาก

$$P_1 = 0$$

เมื่อ P_1 คือ พลังงานศักย์ของตัวรถ

พิจารณาลูกตุ้ม ขณะหยุดนิ่ง พลังงานศักย์ หาได้จาก

$$P_2 = mgz_2 = mgl \cos \theta \quad (2.6)$$

เมื่อ P_2 คือ พลังงานศักย์ของลูกตุ้ม

ดังนั้น ผลรวมของพลังงานศักย์ ของกระบวนการลูกตุ้มผกผัน จะได้

$$P = P_1 + P_2$$

$$P = mgl \cos \theta \quad (2.7)$$

ดังนั้น พลังงานของลากราง หรือ ลากรางเจียน จะได้

$$\Gamma = \frac{1}{2}(M+m)\dot{y}^2 + ml \cos \theta \dot{y} \dot{\theta} + \frac{1}{2}ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta \quad (2.8)$$

สมการของลากราง สำหรับระบบนี้ คือ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial y} &= f \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

ดังนั้น จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{y}} &= (M+m)\dot{y} + ml \cos \theta \dot{\theta} \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\theta}} &= ml \cos \theta \dot{y} + ml^2 \dot{\theta} \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} &= mgl \sin \theta - ml \sin \theta \dot{y} \dot{\theta} \end{aligned}$$

แทนค่าต่างๆ ลงไปในสมการที่ (2.9) จะได้

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{y} + ml \cos \theta \ddot{\theta} - ml \dot{\theta}^2 \sin \theta &= f \\ ml \cos \theta \ddot{y} - ml \sin \theta \dot{y} \dot{\theta} + ml^2 \ddot{\theta} - mgl \sin \theta + ml \sin \theta \dot{y} \dot{\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

สมการที่ (2.10) เป็นสมการที่ถูกต้องของการเคลื่อนที่ของ ลูกตุ้มผกผัน ที่แสดงใน ภาพที่ 2.1 เป็นสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น(nonlinear equation)ซึ่งมีเทอมของตรีโกณมิติ (trigonometric) คือ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ และ เทอมกำลังสอง (quadratic term) คือ $\dot{\theta}^2$ และ $\dot{y} \dot{\theta}$ ถ้าลูกตุ้มอยู่ในสถานะที่เสถียรภาพ (stable) มุม θ จะมีขนาดเล็กมาก ดังนั้นสามารถประมาณได้ว่า $\cos \theta \approx 1$ และ $\sin \theta \approx \theta$ และจะทำให้ $\dot{\theta}$ และ $\dot{y}$ มีขนาดเล็กด้วย ดังนั้น เทอมกำลังสอง ก็จะไม่คิด ใช้วิธีการประมาณทำให้เป็นเชิงเส้น (linearized dynamic model) จะได้

$$\begin{aligned}(M+m)\ddot{y} + ml\ddot{\theta} &= f \\ m\ddot{y} + ml\ddot{\theta} - mg\theta &= 0\end{aligned}\quad (2.11)$$

เลือกตัวแปรสแตต (state variable) โดยเขียนเป็น สแตตเวกเตอร์ (state vector) ได้คือ

$$x = \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

เมื่อ y คือ ตำแหน่งของตัวรถ

θ คือ มุมของลูกตุ้ม

$\dot{y}$ คือ ความเร็วของตัวรถ

$\dot{\theta}$ คือ ความเร็วของลูกตุ้ม

เมื่อ $\frac{dy}{dt} = \dot{y}, \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$

หาค่าของ $\frac{d}{dt}(\dot{y}) = \ddot{y}$ และ $\frac{d}{dt}(\dot{\theta}) = \ddot{\theta}$ จะได้

$$\ddot{y} = \frac{f}{M} - \frac{mg}{M}\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{f}{Ml} + \left(\frac{M+m}{Ml}\right)g\theta \quad (2.12)$$

สามารถเขียนในรูปสมการสแตต ได้คือ

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$Y = Cx$$

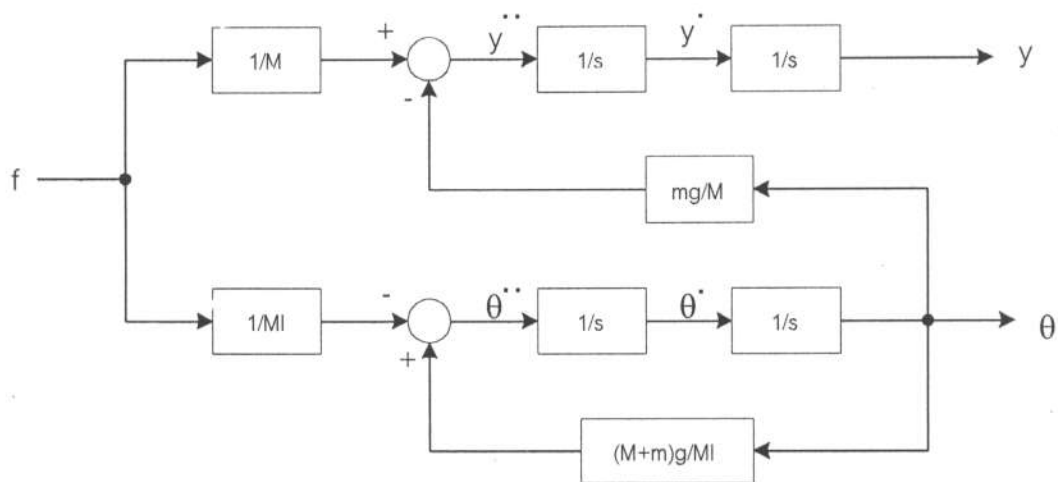
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{mg}{M} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} u \quad (2.13)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

เมื่อ $Y = \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix}$

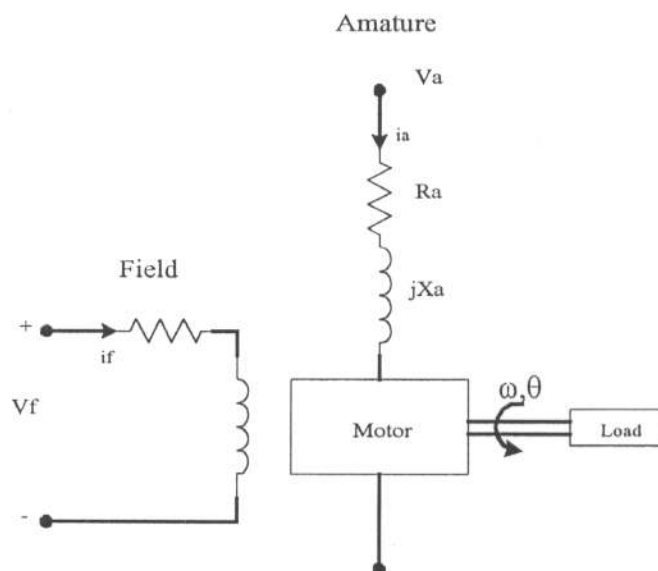
เมื่อ $u = f$ คือ แรงจากภายนอก

สามารถเขียนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลองลูกตุ้มผกผันแทนด้วยแผนภาพบล็อก (Block diagram) ได้ดังภาพที่ 2.2



ภาพที่ 2.2 แสดงแผนภาพบล็อกของลูกตุ้มผกผัน

แรงที่ใช้ในการขับเคลื่อนตัวรถของลูกตุ้มผกผัน เป็นแรงที่ได้จากดีซีมอเตอร์ ดังนั้นในการออกแบบระบบควบคุม จึงต้องรวมแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของดีซีมอเตอร์ เข้าไปด้วย ซึ่งแนวความคิดนี้เสนอโดย K. Furuta, M. Ymakita, S. Kobayashi และ M. Mishimura. [21] โดยแบบจำลองของดีซีมอเตอร์ แสดงได้ดังภาพที่ 2.3



ภาพที่ 2.3 แสดงแบบจำลองของดีซีมอเตอร์ ขณะมีโหลด

ดีซีมอเตอร์ที่ใช้ จะใช้แบบแม่เหล็กถาวร หรือใช้แบบการควบคุมขดลวดอาร์เมเจอร์ (amature controlled) ดังนั้นแรงบิดของมอเตอร์ (T_m) หาได้จาก

$$T_m = (K_1 K_f I_f) i_a = K_m i_a \quad (2.14)$$

ความสัมพันธ์ระหว่าง กระแสอาร์เมเจอร์ กับ แรงดันที่จ่ายให้กับมอเตอร์ คือ

$$V_a = (R_a + sL_a) i_a + V_b \quad (2.15)$$

โดยที่

$$V_b = K_b \omega \quad (2.16)$$

- เมื่อ K_m คือ ค่าคงที่ระหว่างแรงบิดกับกระแสของมอเตอร์ หน่วยเป็น $N.m/amp$
 K_b คือ ค่าคงที่ระหว่างแรงดันกับความเร็วของมอเตอร์ หน่วยเป็น $volt.sec/rad$
 T_m คือ แรงบิดของดีซีมอเตอร์ หน่วยเป็น N
 V_b คือ แรงดันย้อนกลับ (Back emf voltage) ในอาร์เมเจอร์ หน่วยเป็น $volt$
 V_a คือ แรงดันที่จ่ายให้กับมอเตอร์ หน่วยเป็น $volt$
 i_a คือ กระแสอาร์เมเจอร์ หน่วยเป็น amp
 ω คือ ความเร็วเชิงมุม หน่วยเป็น rad/sec
 R_a คือ ความต้านทานของอาร์เมเจอร์ หน่วยเป็น Ω
 L_a คือ ค่ารีแอ็กแตนซ์ของขดลวดอาร์เมเจอร์ หน่วยเป็น $henry$

ดังนั้นกระแสอาร์เมเจอร์ จะได้

$$i_a = \frac{V_a - K_b \omega}{R_a + sL_a}$$

$$R_a i_a = \frac{V_a - K_b \omega}{1 + \frac{sL_a}{R_a}}$$

เมื่อ $\tau_a = \frac{L_a}{R_a}$ คือค่าคงที่ทางเวลา (time constant) ของอาร์เมเจอร์ ในที่นี้จะให้มิต้าน้อยมาก

ดังนั้นกระแสอาร์เมเจอร์ จะกลายเป็นดังสมการ

$$i_a = \frac{V_a - K_b \omega}{R_a} \quad (2.17)$$

พิจารณาแรงบิดที่โหลดของมอเตอร์ (T_L)

$$T_L = T_m - T_d$$

เมื่อ T_d คือแรงที่เกิดจากน้ำหนักของเพลลา และโหลด ซึ่งสมมุติให้มีค่าน้อยมาก จะได้

$$T_L = T_m = T$$

ความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดของมอเตอร์ และแรงที่ใช้ขับเคลื่อน คือ

$$T = r * f$$

เมื่อ r คือ รัศมีของล้อหมุนสำหรับมู่เล่ (pulley)

$$f = \frac{T}{r}$$

เมื่อ $T = K_m i_a$

$$T = \frac{K_m V_a - K_m K_b \omega}{R_a}$$

จะได้

$$f = \frac{K_m V_a - K_m K_b \omega}{R_a r} \quad (2.18)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วเชิงมุมของมอเตอร์ กับ ระยะทางที่ตัวรถเคลื่อนที่ได้ในแนวราบ หาได้จาก

$$\omega = \frac{\dot{y}}{r}$$

แทนค่า ω ลงในสมการที่ (2.17) จะได้

$$f = \frac{K_m V_a}{R_a r} - \frac{K_m K_b \dot{y}}{R_a r^2}$$

แทนค่าของ f ลงในสมการที่ (2.11) จะได้

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{K_m V_a}{MR_a r} - \frac{K_m K_b \dot{y}}{MR_a r^2} - \frac{mg\theta}{M} \\ \ddot{\theta} &= \frac{(M+m)g\theta}{MI} + \frac{K_m K_b \dot{y}}{MIR_a r^2} - \frac{K_m V_a}{MIR_a r} \end{aligned} \quad (2.19)$$

แบบจำลองที่สมบูรณ์ ของลูกตุ้มผกผันซึ่งขับเคลื่อนโดยมอเตอร์ สามารถเขียนในรูปของสมการสถานะ (State equation)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ Y &= Cx \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{mg}{M} & -\frac{K_m K_b}{MR_a r^2} & 0 \\ 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & \frac{K_m K_b}{MR_a r^2} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_m}{MR_a r} \\ -\frac{K_m}{MR_a r} \end{bmatrix} V_a \quad (2.21)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

เมื่อ $x = \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$ และ $Y = \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix}$

เรียกเวกเตอร์ x ว่า สเตตเวกเตอร์ (State vector) และเรียกเวกเตอร์ Y ว่า เอาท์พุทเวกเตอร์ (Output vector) โดยที่สมการที่ (2.21) เป็นสมการสเตต ที่มี อินพุตเดียวสองเอาท์พุต (Single Input Two Output) หรือ SITO ซึ่งในการออกแบบระบบควบคุมจะใช้ สมการสเตต นี้เป็นตัวช่วยในการออกแบบ ตัวควบคุม และ ออกแบบตัวประมาณค่า

2.2 การหาค่าพารามิเตอร์

โดยปรกติค่าพารามิเตอร์ของมอเตอร์ต่าง ๆ สามารถทราบได้จากคู่มือของมอเตอร์ ที่มาจากบริษัท แต่โดยส่วนมากแล้วเราจะไม่ทราบค่า นอกจากซื้อมอเตอร์จากบริษัทโดยตรง ดังนั้นเราสามารถหาค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่จำเป็น เช่น K_m , K_b และ R_a ได้จากการทดสอบ โดยแนวความคิดในการค่า K_m , K_b และ R_a แสดงไว้ใน [10] และ [3]

ค่าคงที่ K_m สามารถหาได้จากการที่นำแท่งเหล็กที่รู้มวลและความยาว มาต่อที่เพลลาของมอเตอร์ จากนั้นจ่ายแรงดันให้กับมอเตอร์เพิ่มขึ้นทีละน้อย จนกระทั่ง แท่งเหล็กเคลื่อนตัวมาอยู่ในแนวราบ ที่จุดนี้ มอเตอร์จะมีแรงบิดเท่ากับน้ำหนักของแท่งเหล็ก นั่นคือ $\frac{1}{2}mgl$ พร้อมทั้งวัดค่ากระแสที่จ่ายให้กับมอเตอร์ ก็สามารถคำนวณค่าของ K_m ได้จาก สมการ

$$K_m = \frac{T}{i_a} = \frac{mgl}{2i_a} \quad (2.22)$$

ในลูกตุ้มผกผัน จะต่อดีซีมอเตอร์ เข้ากับเฟืองเกียร์ ดังนั้นจึงต้องรวม อัตราส่วนการทดรอบของเฟืองเกียร์ (Gear train ratio) เข้าไปด้วย ซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้ ใช้อัตราส่วนการทดรอบของเฟืองเกียร์ มีค่าเป็น 6 ซึ่งจะคูณค่านี้นับกับค่าของ K_m ด้วย

ค่าคงที่ K_b หาได้จากการวัดความเร็วเชิงมุมของมอเตอร์ เนื่องจากเครื่องมือในการวัดไม่พร้อมเพรียง จึงวัดค่าความเร็วเชิงเส้นแทน โดยคำนวณได้จาก

$$v = \frac{S}{t}$$

เมื่อ v คือ ความเร็วเชิงเส้น หน่วยเป็น meter/sec

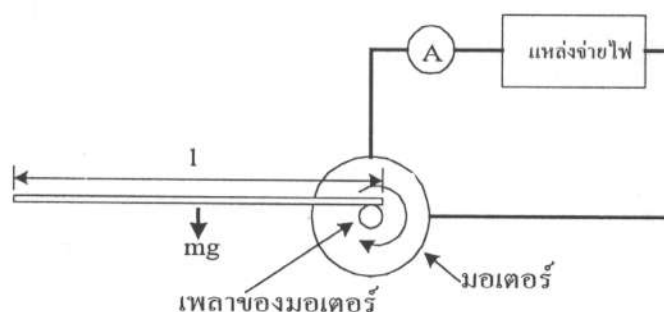
S คือ ระยะทาง หน่วยเป็น meter

และ $\omega = \frac{v}{r}$ จะได้

$$K_b = \frac{(V - I_a R_a)}{\omega} \quad (2.23)$$

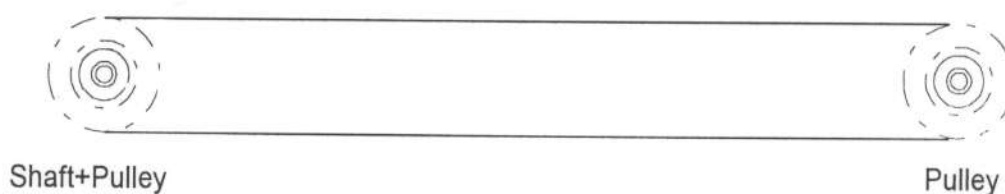
ส่วนค่าความต้านทานของอาร์เมเจอร์ (R_a) สามารถหาได้จากการวัดความต้านทานคร่อมมอเตอร์

ซึ่งการทดสอบหาค่าคงที่ K_m , K_b และ R_a หาได้จากการทดสอบ ดังแสดงในภาพที่ 2.4



(ก) แสดงการทดสอบหาค่า K_m

belts



(ข) แสดงการทดสอบหาค่า K_b

ภาพที่ 2.4 แสดงการทดสอบหาค่า K_m และ K_b

2.3 การทดสอบหาค่าของ ค่าคงที่ระหว่างแรงบิดกับกระแสของมอเตอร์

การทดสอบนี้ต้องการหาความสัมพันธ์ ระหว่างแรงบิดของมอเตอร์ กับ กระแสที่จ่ายให้กับมอเตอร์ ขณะมีโหลด โดยโหลดที่ใช้ เป็นแท่งเหล็ก ที่ทราบความยาว และ น้ำหนัก จะผูกติดปลายข้างหนึ่งของแท่งเหล็ก ให้ติดอยู่กับเพลาของมอเตอร์ เพื่อที่จะหาค่าคงที่ระหว่างแรงบิดกับกระแสของมอเตอร์ (K_m)

2.3.1 อุปกรณ์การทดสอบ

2.3.1.1 ดีซีมอเตอร์ มอเตอร์ที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ เป็นมอเตอร์ ใช้ไฟกระแสตรง 0-24 โวลต์ สามารถกลับทางหมุนได้ โดยการสลับขั้ว หรือสลับแรงดัน

2.3.1.2 วงจรขับมอเตอร์ ใช้วงจรที่เรียกว่า วงจรบริดจ์แบบเฮซ (H-bridge) ซึ่งทำจากอุปกรณ์ไบโพลาร์ (bipolar devices)

2.3.1.3 แอมมิเตอร์ โดยแอมมิเตอร์ที่ใช้ เป็นแบบ ตัวเลข (digital) สามารถวัดได้ตั้งแต่ 0-10 แอมแปร์

2.3.1.4 แท่งเหล็ก ในการทดสอบจะใช้แท่งเหล็ก 2 แท่ง มีขนาด ความยาว 15 เซนติเมตร น้ำหนัก 0.1 กิโลกรัม และ แท่งเหล็ก ความยาว 20 เซนติเมตร น้ำหนัก 0.12 กิโลกรัม

2.3.2 วิธีการทดสอบ

2.3.2.1 นำแท่งเหล็ก ความยาว 15 เซนติเมตร น้ำหนัก 0.1 กิโลกรัม มายึดติดกับเพลาของดีซีมอเตอร์

2.3.2.2 ค่อย ๆ ปรับแรงดัน ที่จ่ายให้กับมอเตอร์ โดยผ่านวงจรขับมอเตอร์ จนกระทั่งแท่งเหล็ก เคลื่อนตัวมาอยู่ในแนวราบ

2.3.2.3 อ่านกระแสจากแอมมิเตอร์ ขณะที่แท่งเหล็กอยู่ในแนวราบ และบันทึกผล

2.3.2.4 นำค่าที่วัดได้มาคำนวณหา ค่าคงที่ระหว่างแรงบิดกับกระแสของมอเตอร์ (K_m) ได้จากสมการ

$$K_m = \frac{T}{i_a} = \frac{mgl}{2i_a} \quad N.m/A$$

2.3.2.5 เปลี่ยนขนาดแท่งเหล็ก เป็นความยาว 20 เซนติเมตร น้ำหนัก 0.12 กิโลกรัม แล้วทำการทดสอบซ้ำแบบเดิม และบันทึกผล

2.3.3 ผลการทดสอบ

2.3.3.1 เมื่อทดสอบโดยใช้ แท่งเหล็ก ความยาว 15 เซนติเมตร หนัก 0.1 กิโลกรัม วัดกระแสได้ 1.87 แอมแปร์ คำนวณค่า ค่าคงที่ระหว่างแรงบิดกับกระแสของมอเตอร์ (K_m) ได้

$$K_m = 0.0393 \text{ N.m/A}$$

2.3.3.2 เมื่อทดสอบโดยใช้ แท่งเหล็ก ความยาว 20 เซนติเมตร หนัก 0.12 กิโลกรัม วัดกระแสได้ 3.04 แอมแปร์ คำนวณค่า ค่าคงที่ระหว่างแรงบิดกับกระแสของมอเตอร์ ได้

$$K_m = 0.0387 \text{ N.m/A}$$

2.3.3.3 จากการทดสอบทั้งสองครั้ง เพื่อให้ความถูกต้องมากขึ้น จึงหาค่าเฉลี่ยของค่าคงที่ระหว่างแรงบิดกับกระแสของมอเตอร์ ได้

$$K_m = 0.0390 \text{ N.m/A} \quad (2.24)$$

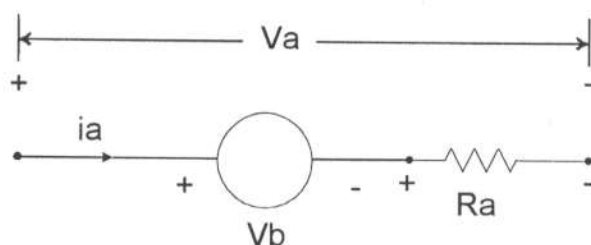
2.4 การทดสอบหาค่าของค่าคงที่ระหว่างแรงดันกับความเร็วของมอเตอร์

จากสมการของมอเตอร์ ที่ว่า

$$V_b = K_b \omega$$

ในการหาค่าของ V_b ไม่สามารถโดยตรงได้ ถ้าพิจารณาในภาพที่ 2.5 ซึ่งเป็นวงจรสมมูล (equivalent circuit) ของมอเตอร์ สามารถหา V_b ได้จากสมการ

$$V_b = V_a - R_a i_a$$



ภาพที่ 2.5 วงจรสมมูลของมอเตอร์

ดังนั้นการได้ค่าของ V_b ทำได้โดยการวัดค่าของ แรงดันที่จ่ายให้กับมอเตอร์ , กระแสอาร์เมเจอร์ และ ความต้านทานของอาร์เมเจอร์

ส่วนในการวัดความเร็วเชิงมุมของมอเตอร์นั้น เนื่องจากเครื่องมือในการวัดไม่พร้อมเพรียง ไม่สามารถวัดความเร็วเชิงมุมโดยตรงได้ จึงประยุกต์มาวัดค่า ความเร็วเชิงเส้น แทน พิจารณาภาพที่ 2.4 (ข) เป็นการแสดงการต่อชุดทดสอบหา ความเร็วเชิงเส้น ซึ่งทำได้โดยการขับ มอเตอร์

ให้มีความเร็วคงที่ ซึ่งสังเกตได้จากค่าแรงดันที่จ่ายให้กับมอเตอร์ มีค่าคงที่ โดยกำหนด จำนวนรอบของการเคลื่อนที่ และทำการจับเวลา จากนั้นนำค่าที่ได้ไปคำนวณหาความเร็วเชิงเส้น และคำนวณหาค่าความเร็วเชิงมุม ต่อไป

2.4.1 อุปกรณ์การทดสอบ

2.4.1.1 **ดีซีมอเตอร์** มอเตอร์ที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ เป็นมอเตอร์ ใช้ไฟกระแสตรง 0-24 โวลต์ สามารถกลับทางหมุนได้ โดยการสลับขั้ว หรือสลับแรงดัน

2.4.1.2 **วงจรขับมอเตอร์** ใช้วงจรที่เรียกว่า วงจรบริดจ์แบบเฮช (H-bridge) ซึ่งทำจากอุปกรณ์ไบโพลาร์ (bipolar devices)

2.4.1.3 **แอมมิเตอร์** โดยแอมมิเตอร์ที่ใช้ เป็นแบบ ตัวเลข (digital) สามารถวัดกระแสได้ตั้งแต่ 0-10 แอมแปร์

2.4.1.4 **โวลต์มิเตอร์** ใช้โวลต์มิเตอร์ ที่เป็นแบบตัวเลข (digital) สามารถวัดแรงดันได้ 0-750 โวลต์

2.4.1.5 **ชุดทดสอบหาความเร็วเชิงเส้น** โดยประกอบไปด้วย สายพาน ,มู่เล่ ,เฟืองเกียร์ และมอเตอร์

2.4.1.6 นาฬิกาจับเวลา

2.4.3 วิธีการทดสอบ

2.4.3.1 ติดตั้งสายพาน มู่เล่ เฟืองเกียร์ และมอเตอร์ ให้เป็นดังรูป 2.4 (ข) พร้อมทั้งวัด ความยาวของสายพาน รัศมีของมู่เล่ และกำหนดรอบของการเคลื่อนที่ พร้อมทั้งทำเครื่องหมายที่สายพาน

2.4.3.2 ต่อวงจรขับมอเตอร์ เข้ากับมอเตอร์ และปรับแรงดันที่จ่ายให้กับมอเตอร์ ที่ค่าแรงดันที่กำหนด วัดค่าแรงดันที่จ่ายให้กับมอเตอร์ และกระแสอาร์มเจอร์

2.4.3.3 นับจำนวนรอบของการเคลื่อนที่ และจับเวลา

2.4.3.4 เปลี่ยนค่าแรงดันที่จ่ายให้กับมอเตอร์ และบันทึกผลการทดสอบ

2.4.4 ผลการทดสอบ

ความยาวของสายพาน มีค่าเท่ากับ 1.046 เมตร, รัศมีของมู่เล่ มีค่าเท่ากับ 0.01065 เมตร ซึ่งกำหนดระยะทางในการเคลื่อนที่ 10 รอบ ดังนั้นสามารถคำนวณระยะทางในการเคลื่อนที่ครบ 10 รอบ ได้เท่ากับ $1.046 * 10 = 10.46$ เมตร

สามารถคำนวณความเร็วเชิงเส้นได้จากสมการ

$$v = \frac{S}{t}$$

$$v = \frac{10.46}{t} \quad m/s$$

และความเร็วเชิงมุมคำนวณได้จาก

$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$\omega = \frac{10.46}{t} * \frac{1}{r} = \frac{10.46}{t} * \frac{1}{0.0106} = \frac{982.15}{t} \quad rad/s$$

สุดท้ายสามารถคำนวณหา ค่าคงที่ระหว่างแรงดันกับความเร็วของมอเตอร์ ได้จาก

$$K_b = \frac{(V_a - R_a i_a)}{\omega} = \frac{(V_a - 3i_a)t}{982.15}$$

เมื่อ ค่าความต้านทานอาร์เมเจอร์ มีค่าเท่ากับ 3 โอห์ม

สามารถเขียนผลการทดสอบ ได้ดัง ตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 ตารางแสดงผลการทดสอบ และการคำนวณ หาค่าคงที่ระหว่างแรงดันกับความเร็วของมอเตอร์

แรงดัน(โวลต์)	กระแส(แอมแปร์)	เวลา(วินาที)	$K_b(V/rad/sec)$
1	0.22	40.07	0.0139
2	0.17	14.10	0.0214
3	0.16	8.72	0.0224
4	0.17	6.55	0.0233
5	0.18	4.97	0.0226
6	0.20	4.24	0.0233

จากตารางที่ 2.1 สามารถหาค่าเฉลี่ยของ ค่าคงที่ระหว่างแรงดันกับความเร็วของมอเตอร์ มีค่าเท่ากับ $0.0212 \text{ volt} \cdot \text{sec} / \text{rad}$

2.5 การหาพหุคูณเฟสฟังก์ชันของเครื่องมือวัด

เครื่องมือที่ใช้ในการวัดมุมของลูกตุ้มและตำแหน่งของตัวรถ จะใช้ โพลเทนชิออร์มิเตอร์ (Potentiometer) ถ้าใช้วัดมุมของลูกตุ้มก็จะเปลี่ยนค่าของมุมไปเป็นแรงดัน ซึ่งจะใช้การแบ่งแรงดันจาก แหล่งจ่ายไฟ $+V$ และ $-V$ คือเมื่อค่ามุม θ มีค่าน้อยกว่า 90° ค่าแรงดันจะมีค่าบวก และถ้าค่ามุม θ มีค่ามากกว่า 90° ค่าแรงดันจะมีค่าลบ และถ้าแกนของลูกตุ้มอยู่ในแนวตั้งพอดี จะเห็นว่าแรงดันที่ได้ของ โพลเทนชิออร์มิเตอร์ จะมีค่าอยู่ตรงกลางระหว่าง $+V$ และ $-V$ คือ ศูนย์

โพลเทนชิออร์มิเตอร์ ที่ใช้เป็นแบบแกนหมุนมีขนาดประมาณ 350° เมื่อหมุน โพลเทนชิออร์มิเตอร์ มาด้านขวาจนสุด จะมีแรงดันประมาณ 15 โวลต์ คิดเป็นมุมประมาณ 150° เทียบกับแนวตั้ง ซึ่งหาอัตราการขยายของเครื่องมือวัด (Sensor gain) ได้ดังนี้

$$K_\theta = \frac{V_{\max}}{150^\circ} = \frac{V_{\max}}{0.83 * \pi} \quad (2.25)$$

$$K_\theta = \frac{15}{0.83 * 3.1416} = 5.7526 \quad \text{volt/rad}$$

ส่วนเครื่องมือที่ใช้วัดตำแหน่งของตัวรถก็จะใช้โพลเทนชิออร์มิเตอร์ ขนาด 10 รอบ ซึ่งจะวัดออกมาในรูปของความยาวเชิงมุมก่อน แล้วค่อยแปลงเป็นความยาวเชิงเส้น ซึ่งจะขึ้นอยู่กับเส้นผ่าศูนย์กลางของล้อหมุนสำหรับมู่เล่ (pulley) หาความยาวเชิงเส้นได้จาก

$$y = \pi * D$$

เมื่อ D คือ เส้นผ่าศูนย์กลางของล้อหมุนสำหรับมู่เล่ มีค่าเป็น 0.075 m ซึ่งหาอัตราการขยายของเครื่องมือวัด ได้ดังนี้

$$K_y = \frac{V_{\max}}{10 * \pi D} \quad (2.26)$$

$$K_y = \frac{15}{10 * 3.1416 * 0.075} = 6.3662 \quad \text{volt/m}$$

ค่าพารามิเตอร์ ที่ใช้ในบทความนี้เป็นไปตามตารางที่ 2.2

ตารางที่ 2.2 ค่าพารามิเตอร์ของลูกตุ้มผกผัน

พารามิเตอร์	คำอธิบาย	ปริมาณ
r	รัศมีของมู่เฒ่	0.011 เมตร
M	มวลของตัวรถ	0.3 กิโลกรัม
m	มวลของแท่งลูกตุ้ม	0.25 กิโลกรัม
l	ความยาวของแท่งลูกตุ้ม	0.51 เมตร
K_m	ค่าคงที่ระหว่างแรงบิดกับกระแส	0.0390 N.m/A
K_b	ค่าคงที่ระหว่างแรงดันกับความเร็ว	$0.0212 \text{ volt.sec/rad}$
R_a	ความต้านทานอาร์เมเจอร์	3 โอห์ม
K_θ	อัตราขยายของเซ็นเซอร์ของมุม	5.7526 volt/rad
K_y	อัตราขยายของเซ็นเซอร์ระยะทาง	6.3662 volt/m

แทนค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ลงในสมการที่ (2.21) โดยรวมอัตราส่วนการทดรอบเกียร์ และอัตราขยายของวงจรมอเตอร์ เข้าไปด้วย จะได้

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8.1750 & -45.5537 & 0 \\ 0 & 35.2647 & 89.3210 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 42.5455 \\ -83.4225 \end{bmatrix} u \quad (2.27)$$

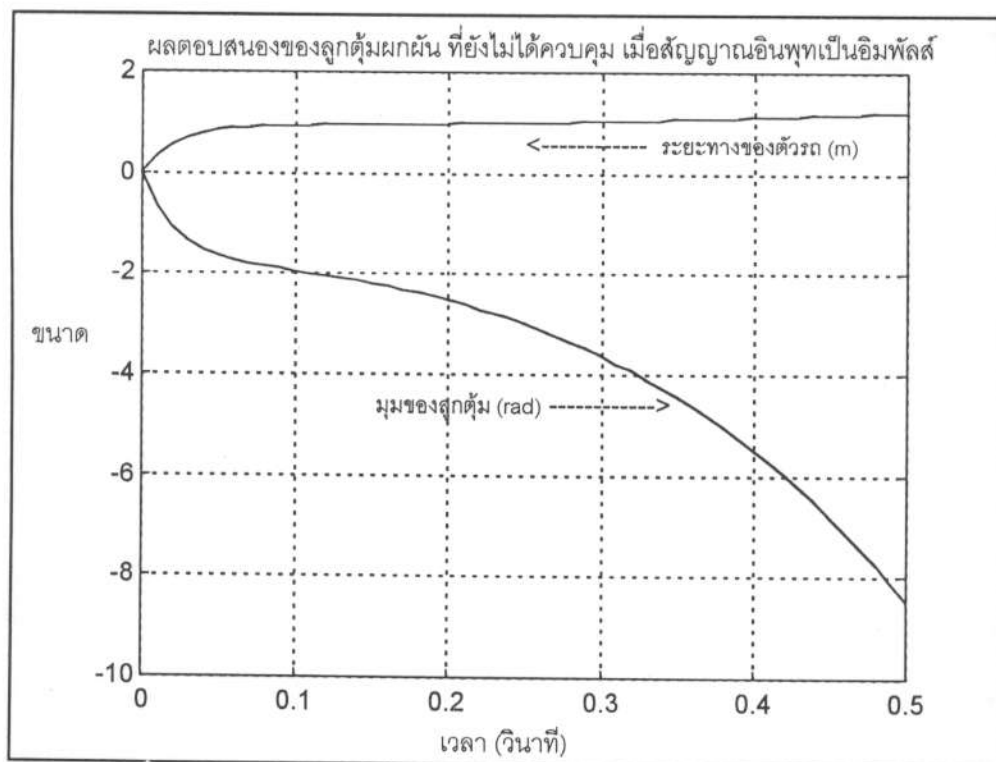
$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\text{เมื่อ } \dot{x} = \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix}$$

และ $V_a = K_a * u$ โดยที่ K_a อัตราการขยายของวงจรมอเตอร์ เท่ากับ 1.8

จากการหา eigenvalues ของ เมตริกซ์ A จะเห็นได้ว่า โพล (Poles) ของลูกตุ้มผกผัน อยู่ที่ 0, 4.5487, -4.1963 และ -45.9061 โดยที่ โพลที่ 4.5487 ทำให้ระบบไม่มีเสถียรภาพ

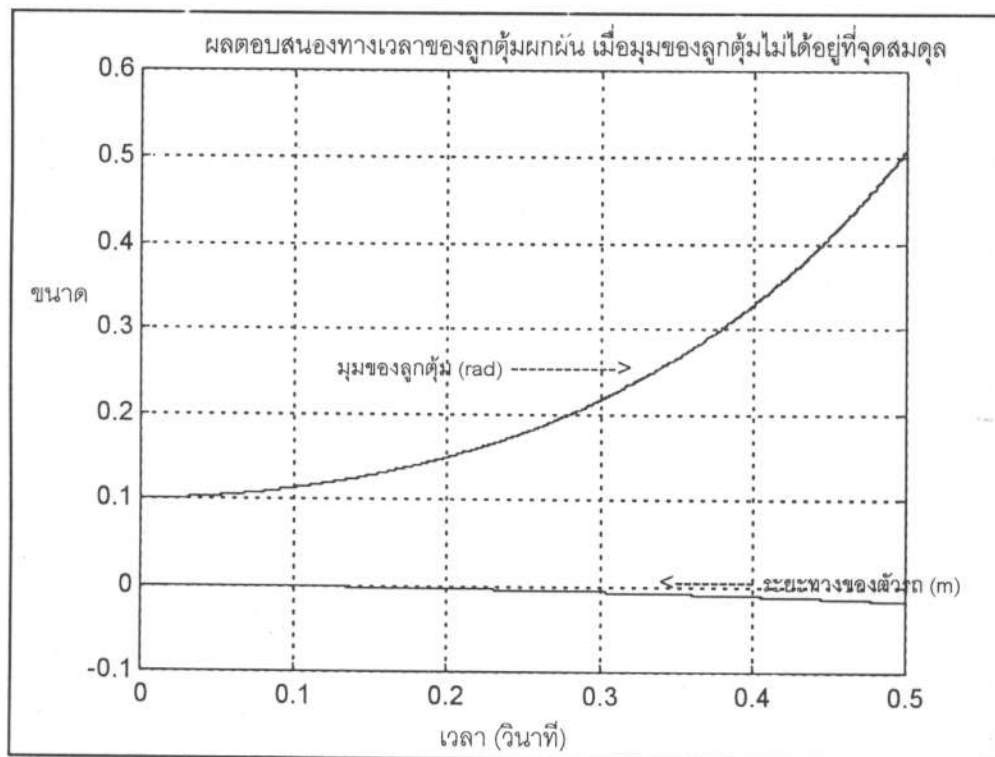
สามารถดูผลตอบสนองทางเวลา (Time response) ของลูกตุ้มผกผัน ขณะยังไม่ได้ทำการควบคุม ได้ดังภาพที่ 2.6 เมื่ออินพุต เป็น สัญญาณอิมพัลส์ (Impulse response)



ภาพที่ 2.6 แสดงผลตอบสนองทางเวลาของลูกตุ้มผกผัน เมื่อมีการรบกวนต่อระบบ

จากภาพที่ 2.6 จะเห็นได้ว่า กระบวนการของลูกตุ้มผกผัน เป็นกระบวนการที่ไม่มีเสถียรภาพ โดยเมื่อมีแรงมากกระทำ หรือมีการรบกวนต่อกระบวนการ ก็จะทำให้กระบวนการไม่มีเสถียรภาพ คือมุมของลูกตุ้มจะเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ นั่นคือ ลูกตุ้มล้มนั่นเอง

ในกรณีที่ลูกตุ้มมีจุดเริ่มต้น (initial) ไม่ได้อยู่ที่ตำแหน่งศูนย์ แต่อยู่ที่จุดอื่น ดังนั้นสามารถดูผลตอบสนองทางเวลาได้ ดังภาพที่ 2.7



ภาพที่ 2.7 แสดงผลตอบสนองทางเวลาของลูกตุ้มผกผัน เมื่อจุดเริ่มต้นที่ไม่ได้อยู่ที่จุดสมดุล

จากภาพที่ 2.7 จะเห็นได้ว่า ถ้าตำแหน่งเริ่มต้นของลูกตุ้ม อยู่ที่อื่นที่ไม่ใช่ศูนย์ ก็จะทำให้ระบบไม่มีเสถียรภาพ นั่นก็แสดงให้เห็นว่าลูกตุ้มผกผันมีจุดที่เสถียรภาพ คือมุมของลูกตุ้มอยู่ที่ศูนย์ เท่านั้น

ดังนั้นถ้าต้องการไม่ให้ ลูกตุ้มล้ม ก็ทำการหาตัวควบคุม มาควบคุมไม่ให้ลูกตุ้มล้ม โดยอาศัยทฤษฎีการควบคุม ซึ่งจะได้ทำการศึกษา และออกแบบ ตัวควบคุม ในบทต่อไป