

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ผ่านการเรียนเรื่อง แบบรูป ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ซึ่งการวิเคราะห์การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จากการทำใบกิจกรรมและใบงานใน 3 หน่วยการเรียนรู้ ได้แก่ แบบรูปจากสื่อของจริง แบบรูปของรูปภาพและแบบรูปของจำนวน รวมถึงการทำแบบทดสอบการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 30 คน ปรากฏผลดังตาราง 7

ตาราง 7 ค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และการแปลผลการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

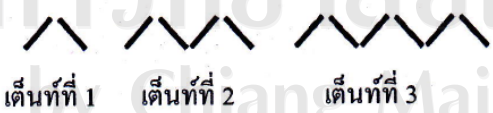
หน่วยการเรียนรู้ที่	เรื่อง	ค่าเฉลี่ย	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน	การแปลผล
1	แบบรูปจากสื่อของจริง	1.88	0.37	ดี
2	แบบรูปของรูปภาพ	2.45	0.49	ดี
3	แบบรูปของจำนวน	2.93	0.24	ดีมาก
การทดสอบการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์		2.27	0.44	ดี
รวม		2.38	0.37	ดี

จากตาราง 7 พบว่า นักเรียนมีการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในระดับดีและดีมากเท่านั้น โดยนักเรียนได้ค่าเฉลี่ยของคะแนนในหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 แบบรูปของจำนวนในระดับดีมาก มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 2.93 แสดงว่า การเรียนในหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ทำให้นักเรียนสามารถวิเคราะห์องค์ประกอบสำคัญที่นำไปสู่การหาคำตอบที่สมเหตุสมผลของสถานการณ์ปัญหาซึ่งเป็นการพิจารณาสถานการณ์ปัญหาในภาพรวม ไม่แยกเป็นส่วนๆ ได้ครบถ้วน สามารถระบุวิธีการหาคำตอบที่สมเหตุสมผล มีการนำเสนอหลักฐานและอธิบายสนับสนุนคำตอบได้อย่างชัดเจน เพียงพอและสมเหตุสมผล รวมทั้งสามารถประเมินหรือแสดงการตรวจสอบคำตอบที่ได้โดยใช้เกณฑ์ในการประเมินที่สมเหตุสมผล รองลงมาคือ ระดับดี ได้แก่ หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แบบรูปของรูปภาพ

มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 2.45 และหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 แบบรูปจากสื่อของจริง มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 1.88 นอกจากนี้ในการทดสอบการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ และในคะแนนรวมเฉลี่ยนักเรียนได้ค่าเฉลี่ยของคะแนนในระดับดีเช่นเดียวกัน โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 2.27 และ 2.38 ตามลำดับ แสดงว่าการเรียนในหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 และหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 รวมถึงการทดสอบการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ทำให้นักเรียนสามารถวิเคราะห์องค์ประกอบสำคัญที่นำไปสู่การหาคำตอบที่สมเหตุสมผลของสถานการณ์ปัญหาได้ แต่ยังเป็นการมองสถานการณ์ปัญหาเป็นส่วนๆ ไม่มองในภาพรวมทั้งหมด สามารถระบุวิธีการหาคำตอบที่สมเหตุสมผล มีการนำเสนอหลักฐานและอธิบายสนับสนุนคำตอบได้อย่างชัดเจน เพียงพอ และสมเหตุสมผล รวมทั้งสามารถประเมินหรือแสดงการตรวจสอบคำตอบที่ได้โดยใช้เกณฑ์ในการประเมินที่สมเหตุสมผล แต่เกณฑ์ที่สร้างขึ้นยังคงยึดติดอยู่กับการมองสถานการณ์ปัญหาเป็นส่วนๆ ไม่มองในภาพรวมทั้งหมด ซึ่งหากวิเคราะห์จากค่าเฉลี่ยของคะแนนที่เพิ่มขึ้นจากหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ถึงหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีการพัฒนาการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้นไปสู่ระดับสูงสุดของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ คือ ระดับดีมาก

นอกจากนี้ผู้วิจัยยังได้วิเคราะห์พัฒนาการการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนจากการเรียนในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ และจากการทดสอบการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เริ่มจากหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 แบบรูปจากสื่อของจริง พบว่า นักเรียนมีการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ใน 3 ระดับ ได้แก่ ระดับปรับปรุง ระดับพอใช้ และระดับดี ซึ่งลักษณะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในระดับปรับปรุงในหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 พิจารณาจากการทำใบงานที่ 1 ข้อ 1.1 ซึ่งเป็นการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของเส้นที่กับจำนวนก้อนไม้ขีดของเด็กชายสมศักดิ์ (นามสมมติ) ดังภาพ 3

1. กำหนดแบบรูปต่อไปนี้



เส้นที่ที่ 1 เส้นที่ที่ 2 เส้นที่ที่ 3 ...

1.1 นักเรียนคิดว่าแบบรูปนี้มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

เมื่อ เส้น 1 ชิ้น ที่เส้นเป็นขีด ๗ ก็ = เส้นที่ ๑ = 1

ภาพ 3 การอธิบายความสัมพันธ์ของแบบรูปในใบงานที่ 1 ในระดับปรับปรุงของเด็กชายสมศักดิ์

จากภาพ 3 เด็กชายสมศักดิ์อธิบายความสัมพันธ์ของแบบรูปว่า เมื่อเดินที่ 1 อัน จำนวน ก้านไม้ขีดก็จะเพิ่มทีละ 1 ซึ่งไม่ใช่การวิเคราะห์ที่ถูกต้อง แสดงให้เห็นว่า เด็กชายสมศักดิ์ไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของแบบรูปได้ ส่งผลให้เด็กชายสมศักดิ์ไม่สามารถอธิบายวิธีการหา พจน์ใดๆ ของแบบรูปได้ สำหรับลักษณะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในระดับพอใช้ ในหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 พิจารณาจากการทำใบงานที่ 1 ข้อ 1.1 ซึ่งเป็นการอธิบายความสัมพันธ์ ระหว่างตำแหน่งของเดินที่กับจำนวนก้านไม้ขีดที่เพิ่มขึ้นของเด็กหญิงพิมพ์พา (นามสมมติ) ดังภาพ 4

1. กำหนดแบบรูปต่อไปนี้



1.1 นักเรียนคิดว่าแบบรูปนี้มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

เพิ่มจำนวนของไม้ขีดไปเพิ่มขึ้นทีละ 2 ก้าน
โดยนับจำนวนของไม้ขีดไปว่าเพิ่มขึ้นทีละเท่าไร
เลขนับเพิ่มขึ้นจากเดินที่ที่ 1 ไปเดินที่ที่ 2 และไปเดินที่ที่ 3
ไปเรื่อยจนจบตัวเลข

ภาพ 4 การอธิบายความสัมพันธ์ของแบบรูปในใบงานที่ 1 ในระดับพอใช้ของเด็กหญิงพิมพ์พา

จากภาพ 4 เด็กหญิงสามารถอธิบายความสัมพันธ์ของแบบรูปได้ว่า เพิ่มจำนวนก้านไม้ขีด ทีละ 2 ก้าน โดยการนับเพิ่มจากเดินที่ที่ 1 ไปเดินที่ที่ 2 ไปเรื่อยๆ จนครบตำแหน่ง แสดงให้เห็นว่า เด็กหญิงพิมพ์พาใช้การนับเพิ่มในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของแบบรูป ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ในมิติ เดียว คือสามารถอธิบายได้ว่าจำนวนก้านไม้ขีดจะเพิ่มขึ้นทีละ 2 ก้าน แต่ยังไม่สามารถอธิบาย ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของเดินที่กับจำนวนก้านไม้ขีดซึ่งเป็นความสัมพันธ์ใน 2 มิติได้ ทำให้เด็กหญิงพิมพ์พาสามารถหาอธิบายวิธีการหาจำนวนก้านไม้ขีดในพจน์ที่อยู่ใกล้ได้โดยใช้การ นับเพิ่ม แต่ไม่สามารถอธิบายวิธีการหาจำนวนก้านไม้ขีดของพจน์ที่อยู่ไกลและพจน์ทั่วไปของ แบบรูปได้ สำหรับลักษณะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในระดับดี ในหน่วยการ เรียนรู้ที่ 1 พิจารณาจากการทำใบงานที่ 1 ข้อ 1.1 ซึ่งเป็นการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่าง ตำแหน่งของเดินที่กับจำนวนก้านไม้ขีด และข้อ 1.3 ซึ่งเป็นการหาจำนวนก้านไม้ขีดของเดินที่ ถัดไป ของเด็กหญิงเพชร (นามสมมติ) ดังภาพ 5

1. กำหนดแบบรูปต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นตอนที่ 2 ขั้นตอนที่ 3 ...

1.1 นักเรียนคิดว่าแบบรูปนี้มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

เมื่อพิจารณาจากตำแหน่งที่เพิ่มขึ้นทีละ 1 ขั้น ตำแหน่งที่ไม่ใช่ไฟฉาย
 เพิ่มขึ้นทีละ 2 ขั้น เช่น จากตำแหน่งที่ 1 ไปตำแหน่งที่ 2 จำนวน
 ไฟฉายเพิ่มขึ้นทีละ 2 ขั้น

1.3 ถ้าต้องการเรียงต่อกันไม้ขีดของขั้นที่ถัดไป จะต้องใช้จำนวนไม้ขีด..... gอัน

เหตุผลที่ทำให้ได้คำตอบ

ตำแหน่ง	1	2	3	4
จำนวนไม้ขีด	2	4	6	8
	2	$2+2$	$2+2+2$	$2+2+2+2$
	2	$2+2(1)$	$2+2(2)$	$2+2(3)$
	2	$2+2(2-1)$	$2+2(3-1)$	$2+2(4-1)$

ภาพ 5 การอธิบายความสัมพันธ์ของแบบรูปและการหาพจน์ถัดไปในใบงานที่ 1
 ในระดับดีของเด็กหญิงเพชร

จากภาพ 5 แสดงให้เห็นว่า เด็กหญิงเพชรสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของขั้นที่กับจำนวนไม้ขีดซึ่งเป็นความสัมพันธ์ใน 2 มิติได้ว่า เมื่อตำแหน่งของขั้นที่เพิ่มขึ้นทีละ 1 ขั้น จำนวนไม้ขีดไฟจะเพิ่มขึ้นทีละ 2 ขั้น เช่น จากขั้นที่ 1 ไปขั้นที่ 2 จำนวนไม้ขีดเพิ่มขึ้นทีละ 2 ขั้น แต่การมองความสัมพันธ์ยังเป็นการมองความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของขั้นที่กับจำนวนไม้ขีดเฉพาะตำแหน่งที่ 1 กับตำแหน่งที่ 2 เท่านั้น ไม่ใช่การมองสถานการณ์ปัญหาในภาพรวมทั้งหมด ส่วนการหาจำนวนไม้ขีดของขั้นที่ถัดไป เด็กหญิงเพชรมีการนำเสนอหลักฐานและอธิบายวิธีการหาคำตอบโดยใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัย ซึ่งเป็นการพิจารณาใน 4 พจน์แรก และยังไม่สามารถอธิบายวิธีการหาพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้

เมื่อพิจารณาการทำใบกิจกรรมซึ่งเป็นการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นการเรียนรู้อย่างอิสระในหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มีการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในระดับพอใช้ ซึ่งพิจารณาได้จากการทำใบกิจกรรมที่ 3 ของนักเรียน ดังภาพ 6

1. ให้นักเรียนวาดภาพแบบรูปจากแผ่นกระเบื้องที่นักเรียนสร้างขึ้น

พจน์ที่ 1 พจน์ที่ 2 พจน์ที่ 3 พจน์ที่ 4

2. นักเรียนคิดว่าแบบรูปที่นักเรียนสร้างขึ้นมีความสัมพันธ์กันอย่างไร

เพิ่มจันท์ละ 4 พจน์ที่ 1 มีกระเบื้อง 1 พจน์ที่ 2 มีจันท์ละ 4 พจน์ที่ 3 มีจันท์ละ 4 พจน์ที่ 4 มีจันท์ละ 4

4.1 วิธีการหาพจน์ถัดไป

พจน์ที่ 5

$13 + 4 = 17$

ภาพ 6 การทำใบกิจกรรมที่ 3 ในหน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ในระดับพอใช้ของนักเรียน

จากภาพ 6 แสดงให้เห็นว่า นักเรียนสามารถสร้างแบบรูปโดยใช้แผ่นกระเบื้องได้อย่างอิสระ รวมถึงสามารถอธิบายความสัมพันธ์ของแบบรูปได้ว่า จำนวนแผ่นกระเบื้องจะเพิ่มขึ้นทีละ 4 ซึ่งการมองความสัมพันธ์ยังเป็นการมองความสัมพันธ์ในมิติเดียว ส่งผลให้นักเรียนสามารถอธิบายวิธีการหาพจน์ถัดไปของแบบรูปโดยใช้การบวกเพิ่มได้ถูกต้องว่า พจน์ถัดไปคือพจน์ที่ 5 ใช้แผ่นกระเบื้องจำนวน $13 + 4 = 17$ แต่ยังไม่สามารถอธิบายวิธีการหาพจน์ที่อยู่ไกลและพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้

สำหรับการเรียนในหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แบบรูปของรูปภาพ พบว่า นักเรียนมีการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ใน 2 ระดับ ได้แก่ ระดับพอใช้ และระดับดี โดยไม่พบลักษณะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในระดับปรับปรุง แต่จะพบนักเรียนที่มีระดับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในระดับดีเป็นส่วนใหญ่ ซึ่งลักษณะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในระดับดี พิจารณาจากการทำใบงานที่ 5 ข้อ 1.1 ซึ่งเป็นการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของกล่องกับจำนวนกระป๋อง และข้อ 1.3 ซึ่งเป็นการหาจำนวนกระป๋องที่บรรจุในกล่องถัดไปของเด็กหญิงวิภา (นามสมมติ) ดังภาพ 7

1. กำหนดแบบรูปต่อไปนี้

กล่อง 1 กล่อง 2 กล่อง 3 ...

1.1 นักเรียนคิดว่าแบบรูปนี้มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

เมื่อตำแหน่งของกล่องเพิ่มขึ้น 1 จำนวนกระป๋องก็เพิ่มขึ้น 10 กระป๋อง เช่น จากกล่องที่ 1 ไปกล่องที่ 2 จำนวนกระป๋องก็เพิ่มขึ้น 10 กระป๋อง

1.3 ถ้าต้องการวาดภาพกล่องถัดไป จะต้องประกอบด้วยกระป๋อง..... 40กระป๋อง

เหตุผลที่ทำให้ได้คำตอบ

กล่องที่	1	2	3	4
จำนวนกระป๋อง	10	20	30	40
	10	10+10	10+10+10	10+10+10+10
	10 (1)	10 (2)	10 (3)	10 (4)

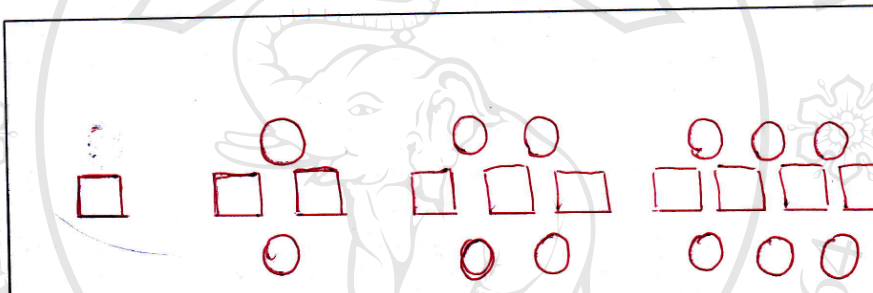
ภาพ 7 การอธิบายความสัมพันธ์ของแบบรูปและการหาพจน์ถัดไปในใบงานที่ 5

ในระดับดีของเด็กหญิงวิภา

จากภาพ 7 แสดงให้เห็นว่า เด็กหญิงวิภาสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของกล่องกับจำนวนกระป๋องได้ว่า เมื่อตำแหน่งของกล่องเพิ่มขึ้นทีละ 1 จำนวนกระป๋องก็เพิ่มขึ้นทีละ 10 กระป๋อง เช่น จากกล่องที่ 1 ไปกล่องที่ 2 จำนวนกระป๋องก็เพิ่มขึ้นทีละ 10 กระป๋อง แต่การมอง

ความสัมพันธ์ยังเป็นการมองความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของกล่องกับจำนวนกระป๋องเฉพาะตำแหน่งที่ 1 กับตำแหน่งที่ 2 เท่านั้น ไม่ใช่การวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาในภาพรวมทั้งหมด ส่วนการหาจำนวนกระป๋องของกล่องถัดไป เด็กหญิงเพชรามีการนำเสนอหลักฐานและอธิบายสนับสนุนคำตอบโดยใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัย ซึ่งเป็นการพิจารณาใน 4 พจน์แรก และยังไม่สามารถอธิบายวิธีการหาพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้ และเมื่อพิจารณาการทำใบกิจกรรมซึ่งเป็นการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นการเรียนรู้อย่างอิสระในหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มีการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในระดับดี ซึ่งพิจารณาได้จากการทำใบกิจกรรมที่ 4 ของนักเรียน ดังภาพ 8

1. ให้นักเรียนวาดภาพแบบรูปที่นักเรียนสร้างขึ้น



2. นักเรียนคิดว่าแบบรูปที่นักเรียนสร้างขึ้นมีความสัมพันธ์กันอย่างไร

ถ้ามีตำแหน่งเพิ่มขึ้น 1 ตำแหน่ง
สี่เหลี่ยมก็จะเพิ่มขึ้น 1 อัน วงกลมก็จะเพิ่ม 2 วง
รวมกันเพิ่มขึ้นทีละสาม

4.1 วิธีการหาพจน์ถัดไป

สี่เหลี่ยม	1	2	3	4	5
วงกลม	0	2	4	6	8
	0	$0+2$	$0+2$	$0+2$	$0+2$
	0	$0+2(1)$	$0+2(2)$	$0+2(3)$	$0+2(4)$
	0	$0+2(2-1)$	$0+2(3-1)$	$0+2(4-1)$	$0+2(5-1)$

ภาพ 8 การทำใบกิจกรรมที่ 4 ในหน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ในระดับดีของนักเรียน

จากภาพ 8 แสดงให้เห็นว่า นักเรียนสามารถสร้างแบบรูปโดยการวาดภาพที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างรูปวงกลมกับรูปสี่เหลี่ยมได้ รวมถึงสามารถอธิบายความสัมพันธ์ของแบบรูปได้ว่า เมื่อตำแหน่งเพิ่มขึ้นทีละ 1 ตำแหน่ง จำนวนรูปสี่เหลี่ยมจะเพิ่มขึ้นทีละ 1 รูปและจำนวนรูปวงกลมจะเพิ่มขึ้นทีละ 2 ซึ่งเป็นการมองความสัมพันธ์ในสองมิติ ส่วนการหาพจน์ถัดไป นักเรียนมีการนำเสนอหลักฐานและอธิบายสนับสนุนคำตอบโดยใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัย ซึ่งเป็นการพิจารณาใน 5 พจน์แรก แต่ยังไม่สามารถอธิบายวิธีการหาพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้

ส่วนในหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 แบบรูปของจำนวน พบว่า นักเรียนมีการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ใน 2 ระดับ ได้แก่ ระดับดี และระดับดีมาก โดยไม่พบลักษณะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในระดับปรับปรุงและระดับพอใช้ แต่จะพบนักเรียนที่มีระดับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในระดับดีมากเป็นส่วนใหญ่ ซึ่งลักษณะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในระดับดีมาก พิจารณาจากการทำใบงานที่ 7 ข้อ 6.1 ซึ่งเป็นการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของจำนวนกับค่าของจำนวน และข้อ 6.2 ซึ่งเป็นการหาจำนวนถัดไป ของเด็กหญิงรุ่งอรุณ (นามสมมติ) ดังภาพ 9 และภาพ 10

6. กำหนดแบบรูปของจำนวนต่อไปนี้

3, 6, 9, 12, 15, ...

6.1 นักเรียนคิดว่าแบบรูปของจำนวนนี้มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

เมื่อตำแหน่งของจำนวน เพิ่มขึ้นทีละ 1 ค่าของจำนวนเพิ่มขึ้นทีละ 3 เช่น จากตำแหน่งที่ 1 ไปที่ 2 ค่าของจำนวนเพิ่มขึ้นทีละ 3 จากตำแหน่งที่ 2 ไปที่ 3 ค่าของจำนวนเพิ่มขึ้นทีละ 3 จากตำแหน่งที่ 3 ไปที่ 4 ค่าของจำนวนเพิ่มขึ้นทีละ 3 จากตำแหน่งที่ 4 ไปที่ 5 ค่าของจำนวนเพิ่มขึ้นทีละ 3

ภาพ 9 การอธิบายความสัมพันธ์ของแบบรูปในใบงานที่ 7 ในระดับดีมากของเด็กหญิงรุ่งอรุณ

จากภาพ 9 พบว่า เด็กหญิงรุ่งอรุณสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของจำนวนกับค่าของจำนวนได้ว่า เมื่อตำแหน่งของจำนวนเพิ่มขึ้นทีละ 1 ค่าของจำนวนเพิ่มขึ้นทีละ 3 เช่น จากตำแหน่งที่ 1 ไปที่ 2 ค่าของจำนวนเพิ่มขึ้นทีละ 3 จากตำแหน่งที่ 2 ไปที่ 3 ค่าของจำนวนเพิ่มขึ้นทีละ 3 จากตำแหน่งที่ 3 ไปที่ 4 ค่าของจำนวนเพิ่มขึ้นทีละ 3 จากตำแหน่งที่ 4 ไปที่ 5 ค่าของจำนวนเพิ่มขึ้นทีละ 3 ซึ่งเป็นการมองสถานการณ์ปัญหาในภาพรวม ไม่แยกเป็นส่วนๆ ได้ครบถ้วน

6.2 นักเรียนคิดว่าจำนวนถัดไป คือ..... 18						
เหตุผลที่ทำให้ได้คำตอบ						
ตำแหน่งที่	1	2	3	4	5	6
ค่าของจำนวน	3	6	9	12	15	18
	3	3+3	3+3+3	3+3+3+3		
	3(1)	3(2)	3(3)	3(4)		
ค่าของจำนวนคือ $3 \times T$ โดย T คือ ตำแหน่งจำนวน						

ภาพ 10 การอธิบายวิธีการหาจำนวนถัดไปของแบบรูปในใบงานที่ 7 ในระดับดีมากของเด็กหญิงรุ่งอรุณ

จากภาพ 10 ซึ่งเป็นการหาจำนวนถัดไป เด็กหญิงรุ่งอรุณมีการนำเสนอหลักฐานและอธิบายสนับสนุนคำตอบโดยใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัย ซึ่งเป็นการพิจารณาใน 4 พจน์แรกและสามารถสร้างพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้ว่า ค่าของจำนวนหาได้จากสูตร $3 \times T$ รวมถึงระบุได้ว่า พจน์ทั่วไปที่สร้างขึ้นใช้หาค่าของจำนวน และตัวแปร T แทนตำแหน่งของจำนวน และเมื่อพิจารณาการทำใบกิจกรรมซึ่งเป็นการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นการเรียนรู้อย่างอิสระในหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 พบว่านักเรียนส่วนใหญ่มีการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในระดับดีมาก ซึ่งพิจารณาได้จากการทำใบกิจกรรมที่ 7 ของนักเรียน ดังภาพ 11 และ ภาพ 12

1. ให้นักเรียนเขียนแบบรูปของจำนวนที่นักเรียนสร้างขึ้น 4 , 13 , 22 , 31 2. นักเรียนคิดว่าแบบรูปที่นักเรียนสร้างขึ้นมีความสัมพันธ์กันอย่างไร เมื่อตำแหน่งของจำนวนเพิ่มขึ้นค่าจะ 1 ค่าของจำนวนจะเพิ่มขึ้นค่าจะ 9 เช่น จาก ตำแหน่งที่ 1 ไปตำแหน่งที่ 2 ค่าของจำนวนจะ เพิ่มขึ้นค่าจะ 9 จาก ตำแหน่งที่ 2 ไปตำแหน่งที่ 3 ค่าของจำนวนจะ เพิ่มขึ้นค่าจะ 9 จาก ตำแหน่งที่ 3 ไปตำแหน่งที่ 4 ค่าของจำนวนจะ เพิ่มขึ้นค่าจะ 9

ภาพ 11 การทำใบกิจกรรมที่ 7 ข้อ 1 และข้อ 2 ในหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ในระดับดีมากของนักเรียน

จากภาพ 11 พบว่า นักเรียนสามารถสร้างแบบรูปของจำนวนได้อย่างอิสระ รวมถึงสามารถอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของจำนวนกับค่าของจำนวนซึ่งเป็นความสัมพันธ์ใน 2 มิติได้ว่า เมื่อตำแหน่งของจำนวนเพิ่มขึ้นทีละ 1 ค่าของจำนวนจะเพิ่มขึ้นทีละ 9 เช่น จากตำแหน่งที่ 1 ไปตำแหน่งที่ 2 ค่าของจำนวนจะเพิ่มขึ้นทีละ 9 จากตำแหน่งที่ 2 ไปตำแหน่งที่ 3 ค่าของจำนวนจะเพิ่มขึ้นทีละ 9 และจากตำแหน่งที่ 3 ไปตำแหน่งที่ 4 ค่าของจำนวนจะเพิ่มขึ้นทีละ 9 ซึ่งเป็นการมองสถานการณ์ปัญหาในภาพรวมทั้งหมด

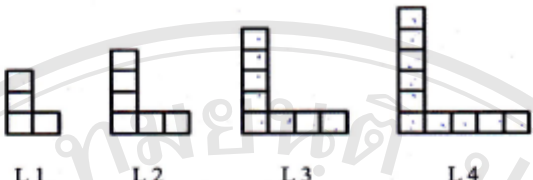
3.4 วิธีการหาพจน์ทั่วไป (พจน์ที่ n)
ค่าของจำนวน $1+9(T-1)$ โดย 1 คือ ตำแหน่ง ของจำนวน

ภาพ 12 การทำใบกิจกรรมที่ 7 ข้อ 3.4 ในหน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ในระดับคิมากของนักเรียน

ส่วนในภาพ 12 พบว่า นักเรียนสามารถสร้างพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่สร้างขึ้นได้ว่า ค่าของจำนวนหาได้จากสูตร $4+9(T-1)$ รวมถึงสามารถอธิบายได้อย่างชัดเจนว่าพจน์ทั่วไปที่สร้างขึ้นใช้หาค่าของจำนวน และตัวแปร T แทนตำแหน่งของจำนวน

นอกจากนี้เมื่อพิจารณาข้อมูลที่ได้จากการทำแบบทดสอบการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป พบว่า นักเรียนมีการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ใน 3 ระดับ ได้แก่ ระดับพอใช้ ระดับดี และระดับดีมาก โดยไม่พบลักษณะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในระดับปรับปรุง ซึ่งการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จากการทำแบบทดสอบการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป ของนักเรียนในระดับพอใช้ พิจารณาจากการทำแบบทดสอบหลังเรียน ข้อ 2.1 ซึ่งเป็นการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของรูปกับพื้นที่ และข้อ 2.2 ซึ่งเป็นการหาพื้นที่ของรูปที่ 5 ของเด็กชายวิทยา (นามสมมติ) ดังภาพ 13

2. กำหนดให้ $\square$ มีพื้นที่ 1 ตารางหน่วย จากการเรียงต่อกันของรูปสี่เหลี่ยมเป็นรูปตัว L ดังภาพ จะสังเกตได้ว่า



L 1 L 2 L 3 L 4 ...

L 1 มีพื้นที่ 4 ตารางหน่วย
L 2 มีพื้นที่ 6 ตารางหน่วย
L 3 มีพื้นที่ 8 ตารางหน่วย
L 4 มีพื้นที่ 10 ตารางหน่วย
...

จากข้อมูลข้างต้น จงตอบคำถามต่อไปนี้

2.1 นักเรียนคิดว่าแบบรูปนี้มีความสัมพันธ์กันอย่างไร จงอธิบาย

รูปตัว L จะมีพื้นที่เพิ่มขึ้นเรื่อยๆ อย่างเช่น L1 มีพื้นที่ 4 ตารางหน่วย
L 2 มีพื้นที่ 6 ตารางหน่วย รูปจะเพิ่มขึ้นทีละ 2

2.2 นักเรียนคิดว่า L 5 จะมีพื้นที่.....12.....ตารางหน่วย

เหตุผลที่ทำให้ได้คำตอบ

$\frac{6}{2} \times 12$ รูป L จะ มี 12 ตารางหน่วย
12

ภาพ 13 การทำแบบทดสอบข้อที่ 2.1 และข้อ 2.2 ในระดับพอใช้ของเด็กชายวิทย์ใหม่

จากภาพ 13 เห็นได้ว่า เด็กชายวิทย์สามารถอธิบายได้ว่า รูปตัว L จะมีพื้นที่เพิ่มขึ้นทีละ 2 ซึ่งเป็นการมองความสัมพันธ์ในมิติเดียวได้ แต่ยังไม่สามารถอธิบายได้ว่า ตำแหน่งของรูปกับพื้นที่ มีความสัมพันธ์กันอย่างไร ส่งผลให้เด็กชายวิทย์สามารถหาพื้นที่ของรูปถัดไป คือรูป L5 ได้อย่างถูกต้องโดยใช้การนับเพิ่ม แต่ไม่สามารถอธิบายได้ว่า พื้นที่ 12 ตารางหน่วยมีที่มาอย่างไร จึงใช้การอธิบายว่า 12 มาจาก 6×12 ซึ่งไม่ได้นำเหตุผลหรือกฎเกณฑ์จากความสัมพันธ์ของแบบรูปมาใช้ รวมถึงไม่สามารถอธิบายวิธีการหาพื้นที่ของพจน์ที่อยู่ไกลและพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้

สำหรับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จากการทำแบบทดสอบการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป ของนักเรียนในระดับดี พิจารณาจากการทำแบบทดสอบหลังเรียน ข้อ 1.1 ซึ่งเป็นการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของรูปกับจำนวนแท่งไม้ และข้อ 1.5 ซึ่งเป็นการหาจำนวนแท่งไม้ของรูปที่ n ของเด็กหญิงเพชร (นามสมมติ) ดังภาพ 14

1. จากการเรียงต่อกันของแท่งไม้ ดังภาพ จะสังเกตได้ว่า



รูปที่ 1 รูปที่ 2 รูปที่ 3 ...

รูปที่ 1 ใช้แท่งไม้จำนวน 4 อัน
รูปที่ 2 ใช้แท่งไม้จำนวน 8 อัน
รูปที่ 3 ใช้แท่งไม้จำนวน 12 อัน

จากข้อมูลข้างต้น จงตอบคำถามต่อไปนี้

1.1 นักเรียนคิดว่าแบบรูปนี้มีความสัมพันธ์กันอย่างไร จงอธิบาย

เมื่อทำภาพหรือของรูปที่เพิ่มขึ้นทีละ 1 จำนวนของ แท่งไม้
จะเพิ่มขึ้น 4 แท่ง เช่น จากรูปที่ 1 ไปรูปที่ 2
ใช้ไม้เพิ่มเพิ่มขึ้นทีละ 4

1.5 ถ้าต้องการเรียงต่อแท่งไม้ของรูปที่ n จะต้องใช้แท่งไม้ $4 + 4(n-1)$ อัน

เหตุผลที่ทำให้ได้คำตอบ

$4 + 4(n-1)$ โดยที่ n คือ จำนวน

ภาพ 14 การทำแบบทดสอบข้อที่ 1.1 และข้อ 1.5 ในระดับดีของเด็กหญิงเพชร

จากภาพ 14 เห็นได้ว่า เด็กหญิงเพชรสามารถอธิบายได้ว่า เมื่อตำแหน่งเพิ่มขึ้นทีละ 1 ตำแหน่ง จำนวนแท่งไม้จะเพิ่มขึ้นทีละ 4 แท่ง เช่น จากรูปที่ 1 ไปรูปที่ 2 แท่งไม้เพิ่มขึ้นทีละ 4 ซึ่งเป็นการมองความสัมพันธ์ในสองมิติ แต่การมองความสัมพันธ์ยังเป็นการมองความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของรูปกับจำนวนแท่งไม้เฉพาะตำแหน่งที่ 1 กับตำแหน่งที่ 2 เท่านั้น ไม่ใช้การวิเคราะห์

สถานการณ์ปัญหาในภาพรวมทั้งหมด นอกจากนี้เด็กหญิงเพชรายังสามารถสร้างพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้ว่า รูปที่ n ต้องใช้แท่งไม้จำนวน $4+4(n-1)$ แต่การอธิบายเหตุผลของวิธีการสร้างพจน์ทั่วไปยังไม่มีความสมเหตุสมผล เนื่องจากเด็กหญิงเพชรไม่สามารถระบุได้อย่างชัดเจนว่าตัวแปร n แทนอะไร ดังพิจารณาได้จากบทสัมภาษณ์ดังต่อไปนี้

- ครู โจทย์ข้อ 1 เป็นรูปอะไรเนี่ย
 เพชร่า เป็นรูปแท่งไม้ค่ะ
 ครู แล้วมันมีลักษณะเป็นยังไง
 เพชร่า รูปแรกมันเป็นกล่องค่ะ รูปที่ 2 เป็นขั้นบันได รูปที่ 3 ก็เป็นขั้นบันไดค่ะ
 ครู แล้วแต่ละรูปมันสัมพันธ์กันยังไง
 เพชร่า มันจะเพิ่มขึ้นทีละ 4 ค่ะ ถ้ารูปเพิ่มขึ้นทีละ 1 แท่งไม้จะเพิ่มขึ้นทีละ 4
 ครู อืม แล้วข้อ 1.2 พจน์ถัดไป หนูตอบ
 เพชร่า 16 ค่ะ
 ครู 16 แท่งนี้ได้มาจากไหน
 เพชร่า นับต่อจากอันนี้ค่ะ (นักเรียนชี้ที่รูปที่ 3)
 ครู นับต่อจากไหน
 เพชร่า จากรูปที่ 3 ค่ะ (นักเรียนชี้ที่รูปที่ 3)
 ครู แล้วยังไงต่อ
 เพชร่า แล้วก็บวกอีก 4
 ครู ทำไมต้องบวก 4 ด้วยละ
 เพชร่า มันเพิ่มขึ้นทีละ 4 ก็เลยบวกไปอีก 4 ค่ะ
 ครู แล้วข้อ 1.3 ถ้าเรียงต่อแท่งไม้รูปที่ 24 หนูตอบ
 เพชร่า 96 ค่ะ
 ครู 96 นี้มาจากไหนละ
 เพชร่า บวกกันแบบนี้แหละค่ะครู
 ครู บวกกันตามสูตรนี้ [สูตร $4 + 4(n-1)$]
 เพชร่า ค่ะ
 ครู 4 ตัวแรกนี่คืออะไร
 เพชร่า แท่งไม้รูปแรกค่ะ
 ครู แล้ว 4 ตัวที่ 2 ละ

เพชรรา ตัวเลขที่เพิ่มขึ้น
 ครู แล้ว n นี่ละ n แทนอะไร
 เพชรรา แทนพจน์ล่ะ
 ครู แล้วสูตรที่หนูเขียนขึ้นมาทั้งหมดนี้ใช้หาอะไร
 เพชรรา รูปต่อไปนั้นแหละครูละ หารูปถัดไป
 ครู สรุปแล้วสูตรที่หนูสร้างขึ้นใช้หาอะไร
 เพชรรา นิ่งคิด... จำนวนของแท่งไม้
 ครู แล้ว n คืออะไร
 เพชรรา แท่งไม้ล่ะ

สำหรับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จากการทำแบบทดสอบการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง แบบรูป ของนักเรียนในระดับดีมาก พิจารณาจากการทำแบบทดสอบหลังเรียน ข้อ 1.1 ซึ่งเป็นการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของรูปกับจำนวนแท่งไม้ และข้อ 1.5 ซึ่งเป็นการหาจำนวนแท่งไม้ของรูปที่ n ของเด็กหญิงรุ่งอรุณ (นามสมมติ) ดังภาพ 15 และภาพ 16

1. จากการเรียงต่อกันของแท่งไม้ ดังภาพ จะสังเกตได้ว่า



รูปที่ 1 รูปที่ 2 รูปที่ 3 ...

รูปที่ 1 ใช้แท่งไม้จำนวน 4 อัน
 รูปที่ 2 ใช้แท่งไม้จำนวน 8 อัน
 รูปที่ 3 ใช้แท่งไม้จำนวน 12 อัน

จากข้อมูลข้างต้น จงตอบคำถามต่อไปนี้

1.1 นักเรียนคิดว่าแบบรูปนี้มีความสัมพันธ์กันอย่างไร จงอธิบาย

เมื่อตำแหน่งของรูปเพิ่มขึ้นทีละ 1 จำนวนแท่งไม้เพิ่มขึ้นทีละ 4 เช่น จากรูปที่ 1 ไปรูปที่ 2 จำนวนแท่งไม้เพิ่มขึ้นทีละ 4 อัน จากรูปที่ 2 ไปรูปที่ 3 จำนวนแท่งไม้เพิ่มขึ้นทีละ 4 อัน

ภาพ 15 การทำแบบทดสอบข้อ 1.1 ในระดับดีมากของเด็กหญิงรุ่งอรุณ

จากภาพ 15 เห็นได้ว่า เด็กหญิงรุ่งอรุณสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของรูปกับจำนวนแท่งไม้ได้ว่า เมื่อตำแหน่งของรูปเพิ่มขึ้นทีละ 1 จำนวนแท่งไม้จะเพิ่มขึ้นทีละ 4 เช่น จากรูปที่ 1 ไปรูปที่ 2 จำนวนแท่งไม้จะเพิ่มทีละ 4 อัน และจากรูปที่ 2 ไปรูปที่ 3 จำนวนแท่งไม้จะเพิ่มทีละ 4 อัน ซึ่งเป็นการมองสถานการณ์ปัญหาในภาพรวมทั้งหมด

1.5 ถ้าต้องการเรียงต่อแท่งไม้ของรูปที่ n จะต้องใช้แท่งไม้.....$4 \times n$.....อัน เหตุผลที่ทำให้ได้คำตอบ จำนวนแท่งไม้ = $1 \times n$ โดย n คือ ตำแหน่งจากรูป $4 \times n = 4 \times 1000$ $= 4000$
--

ภาพ 16 การทำแบบทดสอบข้อ 1.5 ในระดับคิมกของ เด็กหญิงรุ่งอรุณ

ส่วนในภาพ 16 พบว่า เด็กหญิงเพชรสามารถสร้างพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้ว่า รูปที่ n ต้องใช้แท่งไม้จำนวน $4+4(n-1)$ รวมถึงสามารถอธิบายได้อย่างชัดเจนว่าพจน์ทั่วไปที่สร้างขึ้นใช้หาจำนวนแท่งไม้ และตัวแปร n แทนตำแหน่งของรูป ดังพิจารณาได้จากบทสัมภาษณ์ดังต่อไปนี้

- | | |
|----------|---|
| ครู | ข้อ 1 รูปนี้มันสัมพันธ์กันยังไงคะ |
| รุ่งอรุณ | เมื่อตำแหน่งของรูปเพิ่มขึ้นทีละ 1 จำนวนไม้ก็จะเพิ่มขึ้นทีละ 4 ค่ะ |
| ครู | หนูรู้ได้ยังไงว่ามันเพิ่มขึ้นทีละ 4 |
| รุ่งอรุณ | (หัวเราะ) ก็มันเพิ่มขึ้นทีละ 4 ค่ะ น้าบเอา |
| ครู | น้าบยังงัย |
| รุ่งอรุณ | น้าบจากรูปค่ะ คือว่ามันเพิ่มขึ้นทีละ 4 รูปที่ 4 ก็ต้องเป็น 16 |
| ครู | แล้วเพิ่มขึ้นทีละ 4 จากอะไร |
| รุ่งอรุณ | จาก 12 ค่ะ |
| ครู | แล้ว 12 คืออะไร |
| รุ่งอรุณ | 12 คือรูปที่ 3 ค่ะ จะใช้แท่งไม้ 12 อัน |
| ครู | แล้วสูตรที่หนูเขียน 4 ตัวนี้คืออะไร $[4 \times n]$ |
| รุ่งอรุณ | 4 นี่คือเพิ่มขึ้น |

ครู อะไรเพิ่มขึ้น

รุ่งอรุณ จำนวนแท่งไม้

ครู n แท่งอะไร

รุ่งอรุณ ตำแหน่งของรูป

ครู เราจะไม่ใช่ตัว n ได้ไหม เราจะใช้ตัวอื่นได้มัย

รุ่งอรุณ ได้ค่ะ

ครู ถ้าหนูเขียนสูตรใหม่ หนูจะใช้ตัวอะไร ลองเขียนซิ

รุ่งอรุณ นักเรียนเขียนสูตรเป็น $4 \times A$

ครู แล้ว A ตัวนี้คืออะไร ลองเขียนซิ

รุ่งอรุณ นักเรียนเขียนสูตรเป็นโดย A คือตำแหน่งของรูป

ครู แล้วเวลาหาพจน์ใกล้ๆ นี่หนูหาโดยใช้สูตรเลขใช้ไหม

 หรือมีวิธีการอื่นในการหาด้วย

รุ่งอรุณ ถ้าพจน์ใกล้ๆ นี่หนูก็ใช้สูตรหาเลย

ครู ถ้าไม่ใช่สูตรได้มัย

รุ่งอรุณ ก็ได้ค่ะ แต่จี้เกียจนับ

ครู เพราะฉะนั้น ถ้าครูให้หาพจน์ใดๆ เธอหาได้หมดใช่ไหม

รุ่งอรุณ ค่ะ

ครู โดยใช้สูตรนี้ใช้ไหม

รุ่งอรุณ ค่ะ

ครู ถ้าครูให้หาพจน์ที่ 1000 เธอหาได้มัย ลองเขียนให้ครูดูซิ

รุ่งอรุณ นักเรียนเขียนตัวเลข $4 \times n$ = 4×1000

$$= 4000$$