

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยเรื่องการพัฒนาการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ผ่านการเรียนรู้ เรื่อง แบบรูป
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ตามลำดับ ดังนี้

1. การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

- 1.1 ความหมายของการให้เหตุผล
- 1.2 ความสำคัญของการให้เหตุผล
- 1.3 รูปแบบของการให้เหตุผล
- 1.4 แนวทางการจัดการเรียนการสอนเกี่ยวกับการให้เหตุผล
- 1.5 ลักษณะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

2. แบบรูป

- 2.1 ความหมายของแบบรูป
- 2.2 ความสำคัญของการเรียนแบบรูป
- 2.3 ประเภทของแบบรูป
- 2.4 แบบรูปกับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

3. แนวทางการจัดการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาการให้เหตุผลเกี่ยวกับแบบรูป

4. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

โดยรายละเอียดในแต่ละประเด็นเป็นดังนี้

การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

นักการศึกษาหลายท่านกล่าวถึงความหมาย ความสำคัญ รูปแบบ แนวทางการจัดการเรียน
การสอนและลักษณะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

ความหมายของการให้เหตุผล

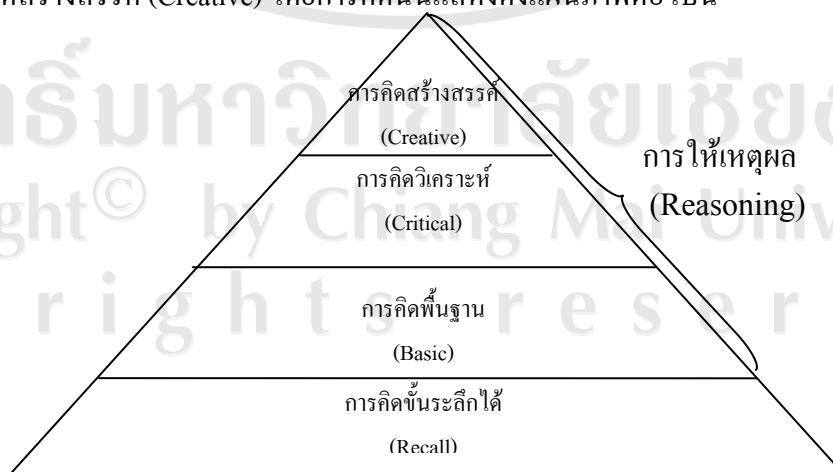
จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยทำให้ทราบว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์มีความ
เกี่ยวข้องกับการคิด อาจกล่าวได้ว่า การให้เหตุผลเป็นส่วนหนึ่งของการคิด (O' Daffer, 1990: 378)
ซึ่งมีผู้ให้ความหมายของการคิดไว้ ดังนี้

Piaget และ Inhelder (1969: 58) กล่าวว่า การคิดหมายถึง การกระทำสิ่งต่างๆ ด้วยปัญญา การคิดของบุคคลเป็นกระบวนการใน 2 ลักษณะ คือ เป็นกระบวนการปรับเข้าโครงสร้าง (Assimilation) โดยการจัดสิ่งเร้าหรือข้อความจริงที่ได้รับให้เข้ากับประสบการณ์ที่มีอยู่ กับ กระบวนการปรับเปลี่ยนโครงสร้าง (Accommodation) โดยการปรับประสบการณ์เดิมให้เข้ากับ ความจริงที่ได้รับรู้ใหม่ บุคคลจะใช้การคิดทั้งสองลักษณะนี้ร่วมกันหรือสลับกันเพื่อปรับความคิด ของตนให้เข้ากับสิ่งเร้ามากที่สุด ผลของการปรับเปลี่ยนการคิดดังกล่าวจะช่วยพัฒนาวิธีการคิดของ บุคคลจากระดับหนึ่งไปสู่ระดับอีกระดับหนึ่งที่สูงกว่า

สำหรับ Hilgard (1962: 36) กล่าวว่า การคิดเป็นพฤติกรรมที่เกิดขึ้นในสมอง เนื่องจาก กระบวนการใช้สัญลักษณ์แทนสิ่งของหรือสถานการณ์ต่างๆ

ส่วน สุนทร สนิทพานนท์ และคณะ (2551: 18) กล่าวว่า การคิดเป็นพฤติกรรมที่เกิดขึ้นใน สมอง ที่มีการค้นหาหลักการหรือข้อความจริงแล้ววิเคราะห์เพื่อหาข้อสรุป ซึ่งการคิดนั้นอาจเกิด จากสิ่งเร้าหรือข้อความจริงที่ได้รับ รวมกับประสบการณ์เดิมที่มีอยู่ ผลของการปรับเปลี่ยนการคิด จะช่วยพัฒนาระดับความคิดให้สูงขึ้น สรุปได้ว่า การคิดเป็นพฤติกรรมที่เกิดขึ้นในสมอง เพื่อค้นหา หลักการหรือข้อความจริงที่ได้รับแล้วทำการวิเคราะห์เพื่อหาข้อสรุป รวมทั้งนำหลักการที่ได้ไปใช้ อ้างอิงในสถานการณ์ต่างๆ ที่ต่างไปจากเดิม จากความหมายของการคิดจะเห็นว่า กระบวนการคิด เกี่ยวข้องกับการค้นหา การวิเคราะห์ การหาข้อสรุปและการอ้างอิง ซึ่งถือว่าเป็นลักษณะหนึ่ง ของ การให้เหตุผล

ในการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างการคิดและการให้เหตุผลนั้น Krulik และ Rudnick (1993: 3) ได้วิเคราะห์การคิดและการให้เหตุผลที่สัมพันธ์กัน กล่าวคือ ได้แบ่งระดับของการคิด ออกเป็น 4 ขั้น คือ การคิดขั้นระลึกได้ (Recall) การคิดพื้นฐาน (Basic) การคิดวิเคราะห์ (Critical) และการคิดสร้างสรรค์ (Creative) โดยการคิดนั้นแสดงดังแผนภาพต่อไปนี้



ภาพ 1 ระดับขั้นของการคิด

โดยระดับขั้นของการคิดแต่ละขั้น มีรายละเอียด ดังนี้

1) การคิดขั้นระลึกได้ (Recall) เป็นการคิดที่เกิดขึ้นเองตามธรรมชาติ อาจกล่าวได้ว่าเป็นกระบวนการคิดที่สามารถเกิดขึ้นเองอย่างอัตโนมัติ ซึ่งส่วนใหญ่เป็นการคิดถึงข้อมูลที่เป็นข้อเท็จจริง

2) การคิดพื้นฐาน (Basic) เป็นกระบวนการคิดที่เกี่ยวข้องกับความคิดรวบยอดหรือความเข้าใจ ซึ่งมีประโยชน์สำหรับนำไปใช้ในชีวิตประจำวัน

3) การคิดวิเคราะห์ (Critical) เป็นกระบวนการคิดขั้นสูงที่ต้องอาศัยการจำการเชื่อมโยง และการรวบรวมข้อมูล เพื่อแก้ปัญหาหรือหาคำตอบที่มีเหตุผล

4) การคิดสร้างสรรค์ (Creative) เป็นกระบวนการคิดขั้นสูง และถือว่ามีความซับซ้อนที่สุด เนื่องจากการคิดขั้นนี้จะนำไปสู่การสร้างสรรค์สิ่งใหม่ๆ

ดังนั้น การให้เหตุผลจึงเป็นส่วนหนึ่งของการคิดที่ประกอบด้วย การคิดพื้นฐาน (Basic) การคิดวิเคราะห์ (Critical) และการคิดสร้างสรรค์ (Creative) ซึ่งไม่สามารถแยกออกจากกันได้ชัดเจน

สำหรับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2551: 46) ได้ให้ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่า หมายถึง กระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ที่ต้องอาศัยการคิดวิเคราะห์และ/หรือความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ในการรวบรวมข้อเท็จจริง ข้อความ แนวคิด สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ต่างๆ หรือการเชื่อมโยง เพื่อทำให้เกิดข้อเท็จจริงหรือสถานการณ์ใหม่

ส่วนสมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 2000: 57) กล่าวว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ถือเป็นส่วนหนึ่งของการคิดที่สามารถพัฒนาได้ และเป็นพื้นฐานของคณิตศาสตร์ที่ควรส่งเสริมให้นักเรียนเลือกและใช้ การให้เหตุผลอย่างหลากหลาย

นอกจากนี้ Long และ Detemple (2006: 51) ได้กล่าวถึงการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นการคิดวิเคราะห์ ซึ่งประกอบไปด้วยการให้เหตุผลแบบนิรนัย การให้เหตุผลเกี่ยวกับการนำเสนอเหตุการณ์ทางคณิตศาสตร์และการให้เหตุผลแบบอุปนัย

สำหรับ O' Daffer และ Thornquist (1993: 43) ได้ให้ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นการใช้ทักษะทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่หลากหลาย ในการค้นหาความสัมพันธ์ การทำความเข้าใจ การสร้างข้อสรุป และการตรวจสอบข้อสรุปของ สถานการณ์ปัญหาหนึ่งๆ

ส่วน Greenwood (1993: 144) กล่าวถึงการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่า เป็นการทำความเข้าใจเกี่ยวกับรูปแบบหรือสถานการณ์ปัญหา เพื่อระบุข้อผิดพลาดหรือสร้างวิธีการใหม่ ซึ่งเป็นการเน้นกระบวนการเรียนรู้มากกว่าการเน้นที่คำตอบ ซึ่งจะช่วยส่งเสริมความสามารถในการคิดและการให้เหตุผลของนักเรียน

ดังนั้นการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ที่ต้องอาศัยแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่หลากหลาย เพื่อใช้ในการวิเคราะห์และค้นหาความสัมพันธ์ การสร้างข้อสรุปและการยืนยันข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหาหนึ่งๆ

ความสำคัญของการให้เหตุผล

การให้เหตุผลเป็นทักษะและกระบวนการสำคัญที่ถูกกำหนดในสาระและมาตรฐานการเรียนรู้ของวิชาคณิตศาสตร์ในหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ซึ่งมีผู้ให้ความสำคัญของการให้เหตุผล ดังนี้

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2551: 45) กล่าวถึงความสำคัญของการให้เหตุผลว่า การให้เหตุผลเป็นเครื่องมือสำคัญที่นักเรียนสามารถนำไปใช้ในการพัฒนาตนเองในการเรียนรู้สิ่งใหม่ๆ ในการทำงานและการดำรงชีวิต ดังนั้นการคิดอย่างมีเหตุผลจึงเป็นหัวใจสำคัญของการสอนคณิตศาสตร์

สอดคล้องกับสมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (NCTM, 2000) ที่เห็นความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยได้กำหนดในหนังสือหลักการและมาตรฐานสำหรับวิชาคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียนให้การให้เหตุผลเป็นมาตรฐานหลักมาตรฐานหนึ่งในหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียนที่จำเป็นสำหรับนักเรียนทุกคน ส่งผลให้การให้เหตุผลเป็นจุดมุ่งหมายสำคัญและเป็นกิจกรรมหลักอย่างหนึ่งในการเรียนการสอน ซึ่งมาตรฐานทางด้านการให้เหตุผลและการพิสูจน์ที่ควรส่งเสริมให้นักเรียนที่เรียนในระดับโรงเรียนได้เรียนรู้ฝึกฝนและพัฒนาให้เกิดขึ้น ได้แก่

- 1) การเห็นคุณค่าของการให้เหตุผลและการพิสูจน์ในฐานะที่เป็นรากเหง้าของคณิตศาสตร์ (Recognize reasoning and proof as fundamental aspects of mathematics)
- 2) การสร้างและสืบสวนข้อความคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ (Make and investigate mathematical conjectures)
- 3) การพัฒนาและประเมินการอ้างเหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ (Develop and evaluate mathematical arguments and proofs)

4) การเลือกและใช้รูปแบบการให้เหตุผลและวิธีการพิสูจน์ได้อย่างหลากหลาย

(Select and use various types of reasoning and methods of proof)

นอกจากนี้อัมพร ม้าคอนง (2549: 97) ได้กล่าวถึงความสำคัญของการให้เหตุผลของนักเรียนว่า ในมุมมองของข้อมูลจากการให้เหตุผลของนักเรียน ครูผู้สอนสามารถนำข้อมูลเหล่านี้มาใช้ประโยชน์ดังต่อไปนี้

- 1) อธิบายระดับพัฒนาการของนักเรียนในการเรียนคณิตศาสตร์เฉพาะใดๆ
- 2) ระบุความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนหรืออุปสรรคต่อการเรียนรู้ของนักเรียนพร้อมทั้งเหตุผล
- 2) วิเคราะห์แนวคิดใหม่ๆ (Emerging Ideas) ที่เกิดจากการให้เหตุผลของนักเรียนเพื่อที่จะขยายความและอภิปรายร่วมกับนักเรียนคนอื่นๆ
- 3) ระบุโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Structures) หรือประเภทของปัญหาที่จำเป็นสำหรับการสร้างแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่มีความหมายของนักเรียน
- 5) จัดหาสถานการณ์ที่เหมาะสมสำหรับการเรียนรู้ของนักเรียน
- 6) ตรวจสอบผลของสิ่งแวดล้อมและวัฒนธรรมในห้องเรียนที่มีต่อความคิดและความเข้าใจของนักเรียน

ดังนั้นการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จึงเป็นเครื่องมือที่สำคัญ เปรียบเสมือนเป็นหัวใจของการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่ช่วยให้นักเรียนสามารถคิดวิเคราะห์ และคิดอย่างมีเหตุผลบนพื้นฐานของข้อเท็จจริง นำไปสู่การเรียนรู้สิ่งใหม่ๆ ในการทำงานและการดำรงชีวิต อีกทั้งการให้เหตุผลของนักเรียนยังเป็นส่วนสำคัญที่ครูผู้สอนสามารถนำไปปรับปรุง พัฒนาการเรียนการสอนเพื่อให้นักเรียนมีมาตรฐานด้านการให้เหตุผลที่สูงขึ้น

รูปแบบของการให้เหตุผล

สำหรับรูปแบบการให้เหตุผล มีผู้แบ่งรูปแบบของการให้เหตุผลไว้หลายรูปแบบ ดังนี้ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2551: 46-63) ได้แบ่งการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 3 รูปแบบ ได้แก่

- 1) การให้เหตุผลแบบสหัชญาณ เป็นการให้เหตุผลที่มาจากการใช้ความรู้เดิมหรือสามัญสำนึก เช่น ถ้าวันพรุ่งนี้น้ำมันจะขึ้นราคา คนส่วนใหญ่ก็รีบเติมน้ำมันในวันนี้ เป็นต้น ซึ่งมนุษย์จะมีการให้เหตุผลแบบสหัชญาณมากหรือน้อยนั้น ขึ้นอยู่กับประสบการณ์ที่ตนมีอยู่
- 2) การให้เหตุผลแบบอุปนัย เป็นกระบวนการที่ใช้การสังเกตหรือการทดลองหลายๆครั้ง แล้วรวบรวมข้อมูลเพื่อหาแบบรูปที่จะนำไปสู่ข้อสรุปซึ่งเชื่อว่าน่าจะเป็นจริง มีความ

เป็นไปได้มากที่สุด แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ว่าเป็นจริงและยังไม่พบข้อขัดแย้ง เรียกข้อสรุปนี้ว่า ข้อความคาดการณ์ในทางคณิตศาสตร์ เรายืนยันว่า ข้อความคาดการณ์เป็นจริงโดยการแสดงหรือ พิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ถ้าแสดงหรือพิสูจน์ได้ว่า ข้อความคาดการณ์เป็นจริงในกรณีทั่วไป ข้อความ คำนี้นั้นจะเป็นทฤษฎีบท ในทางตรงกันข้าม ถ้าสามารถยกตัวอย่างค้านได้แม้เพียงกรณีเดียว ข้อความคาดการณ์นั้นเป็นเท็จทันที ตัวอย่างการให้เหตุผลแบบอุปนัย

เมื่อทราบว่า

$$5^3 \times 2^2 = 5^5$$

$$7^{(-1)} \times 7^8 = 7^7$$

และ

$$(-3)^4 \times (-3)^5 = (-3)^9$$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

3) การให้เหตุผลแบบนิรนัย เป็นกระบวนการที่ยกเอาสิ่งที่รู้ว่าเป็นจริงหรือยอมรับ ว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ แล้วใช้เหตุผลตามหลักตรรกศาสตร์ อ้างจากสิ่งที่รู้ว่าเป็นจริงนั้น เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปหรือผลสรุปเพิ่มเติมขึ้นมาใหม่ การให้เหตุผลแบบนิรนัยประกอบด้วย ส่วนสำคัญ 2 ส่วน คือ เหตุหรือสมมติฐาน ซึ่งหมายถึง สิ่งที่เป็นจริงหรือยอมรับว่าเป็นจริงโดย ไม่ต้องพิสูจน์ ได้แก่ บทนิยาม คำนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทที่พิสูจน์แล้ว กฎหรือสมบัติต่างๆ อีกส่วนหนึ่งคือ ผลหรือข้อสรุป ซึ่งหมายถึง ข้อสรุปที่ได้จากเหตุหรือสมมติฐาน โดยทั่วไป เหตุหรือสมมติฐานของการให้เหตุผลแบบนิรนัยมักประกอบด้วย เหตุกรณีทั่วไป และตามด้วย เหตุกรณีเฉพาะ ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างเหตุกรณีทั่วไปและเหตุกรณีเฉพาะก่อให้เกิด ผลหรือ ผลสรุป ถ้าเหตุทำให้เกิด ผลหรือผลสรุปเสมอเราเรียกว่าเป็น การให้เหตุผลที่สมเหตุสมผล ในทางตรงกันข้าม ถ้าเหตุไม่ทำให้เกิดผลหรือผลสรุปเสมอ เราเรียกว่าเป็น การให้เหตุผล ที่ไม่สมเหตุสมผล

ตัวอย่างการให้เหตุผลแบบนิรนัย พิจารณาการให้เหตุผลต่อไปนี้

เหตุ : 1. จำนวนเฉพาะ คือ จำนวนที่มี 1 และตัวมันเองเป็นตัวประกอบ

2. 2 มีตัวประกอบคือ 1 และ 2

ผล : 2 เป็นจำนวนเฉพาะ

ในการให้เหตุผลแบบนิรนัยข้างต้น เรามีข้อความ “จำนวนเฉพาะ คือ จำนวนที่มี 1 และตัวมันเองเป็นตัวประกอบ” เป็นเหตุกรณีทั่วไป ข้อความ “2 มีตัวประกอบคือ 1 และ 2” เป็นเหตุกรณีเฉพาะ ข้อความ “2 เป็นจำนวนเฉพาะ” เป็นผลสรุปเฉพาะ เมื่อเรายอมรับ “เหตุ” ว่าเป็นจริง นั่นคือ ยอมรับว่า “จำนวนเฉพาะ คือ จำนวนที่มี 1 และตัวมันเองเป็นตัวประกอบ” และ “2 มีตัวประกอบคือ 1 และ 2” เป็นจริงแล้ว การสรุปว่า “2 เป็นจำนวนเฉพาะ” จึงเป็นการสรุปที่ถูกต้อง ดังนั้นการให้เหตุผลนี้ถือว่าเป็น การให้เหตุผลที่สมเหตุสมผล

จากรูปแบบการให้เหตุผลทั้ง 3 รูปแบบ นักวิชาการส่วนใหญ่จะให้ความสำคัญกับการให้เหตุผลในแบบที่ 2 และ 3 มากกว่าแบบที่ 1 สอดคล้องกับ Baroody (1993: 2-61) ที่มีความเห็นว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สามารถจำแนกออกได้เป็น 3 ประเภทคือ

3.1) การให้เหตุผลเชิงประจักษ์ (Intuitive Reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่เกิดจากการหยั่งรู้ หรือเกิดจากกลางสังหรณ์ ซึ่งไม่ได้ใช้ข้อมูลที่เป็นทั้งหมดในการตัดสินใจ แต่ตัดสินใจโดยใช้ความรู้สึกภายในหรือจากสิ่งที่เห็น ดังนั้นการให้เหตุผลประเภทนี้จึงเป็นเหตุผลที่อยู่บนฐานของสิ่งที่ปรากฏหรือเป็นเพียงสมมติฐาน ซึ่งอาจถูกหรือผิดก็ได้

3.2) การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Inductive Reasoning) เป็นการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นการใช้ข้อความหรือสิ่งที่จริงอยู่แล้ว เพื่อนำไปสู่ข้อสรุป

3.3) การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Deductive Reasoning) เป็นการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นการใช้ข้อมูลของสมาชิกบางสมาชิกในเซตหนึ่งๆ เพื่อนำไปสู่กรณีทั่วไป หรือนำไปสู่สมาชิกทุกตัวในเซตนั้น

นอกจากนี้ Stiggins (1997: 260-262) เสนอว่า ทักษะการให้เหตุผลประกอบด้วย

1) การให้เหตุผลแบบวิเคราะห์ (Analytical Reasoning) เป็นการให้เหตุผลโดยพิจารณาผ่านส่วนย่อยหรือส่วนประกอบ ซึ่งประกอบกันเป็นสิ่งนั้น ๆ และให้เหตุผลว่า ส่วนประกอบย่อยเหล่านั้นรวมกันอย่างไร

2) การให้เหตุผลแบบเปรียบเทียบ (Comparative Reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่มุ่งพิจารณาว่าสิ่งต่าง ๆ มีความเหมือนหรือแตกต่างกันอย่างไร

3) การให้เหตุผลแบบประเมิน (Evaluative Reasoning) ใช้เมื่อต้องการที่จะตัดสินใจหรือพิจารณาว่า สิ่งใดมีความเหมาะสมหรือไม่เหมาะสมโดยใช้เกณฑ์ที่สมเหตุสมผลในการพิจารณา

4) การให้เหตุผลแบบสังเคราะห์ (Synthesizing Reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่ใช้วิธีการรวบรวมข้อมูลต่าง ๆ มาหลอมรวมกันเพื่อสร้างเป็นข้อสรุป

5) การให้เหตุผลแบบจำแนก (Classifying Reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่ใช้ในกรณีที่ต้องการแยกประเภทของสิ่งต่างๆ ว่า สิ่งใดควรจะจัดอยู่ในกลุ่มไหน เพราะเหตุใด

6) การให้เหตุผลแบบสรุปอ้างอิง (Inferential Reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่ประกอบด้วย 2 ลักษณะ ได้แก่

6.1) การให้เหตุผลที่ใช้การรวบรวมข้อมูลหรือหลักฐานจากกรณีเฉพาะหลาย ๆ กรณี เพื่อสรุปเป็นหลักการหรือกฎทั่วไป

6.2) การให้เหตุผลที่ใช้การอ้างอิงกฎหรือหลักการทั่วไปที่มีอยู่แล้ว เพื่อช่วยในการหาคำตอบของปัญหาในกรณีเฉพาะ

ดังนั้นการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สามารถจำแนกได้หลายรูปแบบ สังเกตได้ว่าการแบ่งรูปแบบของการให้เหตุผลตามแนว สสวท. และ Baroody มีความสอดคล้องกัน ทั้งนี้รูปแบบการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่มีการใช้มากได้แก่ การให้เหตุผลแบบอุปนัยและการให้เหตุผลแบบนิรนัย

ลักษณะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

นักการศึกษาหลายท่านกล่าวถึงลักษณะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

Bloom (1956) กล่าวถึงลักษณะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่า ควรประกอบด้วย การวิเคราะห์ การสังเคราะห์และการประเมิน โดยการวิเคราะห์หมายถึง การเข้าใจในส่วนประกอบแต่ละส่วน และสามารถแยกแต่ละส่วนออกจากกันได้อย่างมีเหตุผล รวมถึงรู้ว่าส่วนประกอบทั้งหมดรวมกันอย่างไร การสังเคราะห์หมายถึง ความสามารถในการรวบรวมความรู้ แนวคิด ความเข้าใจเรื่องต่างๆ เป็นหนึ่งเดียวแล้วสร้างเป็นความรู้ใหม่ และการประเมินหมายถึง ความสามารถในการตัดสินค่าของสิ่งต่างๆ เช่น แนวคิด วิธีการ คำตอบ โดยใช้เกณฑ์ที่สมเหตุสมผล

นอกจากนี้ Stiggins (1997: 260-262) กล่าวถึงลักษณะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่า ประกอบด้วย การวิเคราะห์ การสรุปอ้างอิง การสังเคราะห์และการประเมิน โดยการวิเคราะห์หมายถึงการให้เหตุผลโดยพิจารณาผ่านส่วนย่อยซึ่งประกอบกันเป็นสิ่งนั้นๆ และให้เหตุผลได้ว่าส่วนประกอบย่อยเหล่านั้นรวมกันอยู่ได้อย่างไร การสรุปอ้างอิงหมายถึงการให้เหตุผลที่ใช้การรวบรวมข้อมูลหรือหลักฐานจากกรณีเฉพาะหลาย ๆ กรณีเพื่อสรุปเป็นหลักการหรือกฎทั่วไป และการให้เหตุผลที่ใช้การอ้างอิงกฎหรือหลักการทั่วไปที่มีอยู่แล้วเพื่อช่วยในการหาคำตอบของปัญหาในกรณีเฉพาะ การสังเคราะห์หมายถึงการให้เหตุผลที่ใช้วิธีการรวบรวมข้อมูลต่างๆ มาหลอมรวมกันเพื่อสร้างเป็นข้อสรุป และการประเมินหมายถึงการให้เหตุผลเพื่อตัดสินหรือพิจารณาว่าสิ่งใดมีความเหมาะสมหรือไม่เหมาะสมโดยใช้เกณฑ์ที่สมเหตุสมผลในการพิจารณา

สำหรับ Quellmalz (1987) กล่าวว่า ลักษณะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย การวิเคราะห์ การเปรียบเทียบ การสรุปอ้างอิงและการประเมิน โดยการวิเคราะห์หมายถึงการให้เหตุผลเกี่ยวกับแต่ละส่วนประกอบ การเปรียบเทียบหมายถึงการให้เหตุผลในลักษณะของความเหมือนและความต่าง การสรุปอ้างอิงหมายถึงการให้เหตุผลแบบอุปนัยหรือนิรนัย และการประเมิน หมายถึงการแสดงและชี้แจงความคิดเห็นหรือมุมมอง

ส่วน วิษณุ ภาพันธ์ (2551: 20-22) กล่าวว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วย การวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา การสร้างข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา และการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุป โดยการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาหมายถึงการค้นหาความจริงที่แฝงอยู่ในสถานการณ์ปัญหา ซึ่งมี 3 ส่วนคือ การวิเคราะห์องค์ประกอบ การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบ และการวิเคราะห์หลักการหรือกฎเกณฑ์ที่ทำให้องค์ประกอบเหล่านั้นอยู่อย่างเป็นระบบ การสร้างข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหาหมายถึงความสามารถในการระบุข้อสรุปที่สมเหตุสมผล ความสามารถในการนำเสนอหลักฐานเพื่อสนับสนุนข้อสรุป และความสามารถในการอธิบายได้ว่าหลักฐานที่ยกมาสามารถสนับสนุนข้อสรุปได้อย่างไร และการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปหมายถึงความสามารถในการตัดสินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปที่ได้ โดยต้องมีเกณฑ์หรือมาตรฐานสำหรับยึดเป็นข้ออ้างอิงในการตัดสินหรือเป็นบรรทัดฐานสำหรับวินิจฉัยความสมเหตุสมผลของข้อสรุป

สำหรับงานวิจัยนี้พิจารณาลักษณะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่าประกอบด้วย การวิเคราะห์และค้นหาความสัมพันธ์ การสร้างข้อสรุปและการยืนยันข้อสรุป โดยการวิเคราะห์และค้นหาความสัมพันธ์หมายถึงการวิเคราะห์องค์ประกอบของสถานการณ์ปัญหา หรือการอธิบายว่าองค์ประกอบต่างๆ ของสถานการณ์ปัญหารวมกันอยู่ได้โดยอาศัยเหตุผลหรือกฎเกณฑ์ใด การสร้างข้อสรุปหมายถึงการอธิบายวิธีการหาคำตอบที่สมเหตุสมผลโดยใช้วิธีการให้เหตุผลที่มีระบบแบบแผน มีการนำเสนอหลักฐานสนับสนุนคำตอบที่มีความชัดเจน เพียงพอ และสมเหตุสมผลและสามารถอธิบายได้อย่างชัดเจนว่าหลักฐานที่ยกมาใช้สนับสนุนคำตอบได้อย่างไร และการยืนยันข้อสรุปหมายถึงการประเมินหรือแสดงการตรวจสอบคำตอบที่ได้โดยใช้เกณฑ์ในการประเมินที่สมเหตุสมผลและเป็นเกณฑ์ที่เกิดจากการมองสถานการณ์ปัญหาในภาพรวมทั้งหมด

แบบรูป

แบบรูปเป็นเนื้อหาหนึ่งในวิชาคณิตศาสตร์ที่ถูกกำหนดในหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พ.ศ. 2551 ทั้งในระดับชั้นประถมศึกษาและระดับมัธยมศึกษา จากการศึกษาเอกสารเกี่ยวกับแบบรูป ทำให้ทราบความหมาย ความสำคัญ ประเภท ความสัมพันธ์ระหว่างแบบรูปกับการให้เหตุผล และแนวทางการจัดการเรียนการสอนเกี่ยวกับแบบรูป ดังนี้

ความหมายของแบบรูป

นักการศึกษาหลายท่านได้ให้ความหมายของแบบรูป ดังนี้

สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา (2551: 60-61) ได้ให้ความหมายของแบบรูปว่า แบบรูปเป็นความสัมพันธ์ที่แสดงลักษณะสำคัญของชุดของจำนวน รูปเรขาคณิต หรืออื่นๆ

สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (NCTM, 1998: 38) กล่าวถึงแบบรูปว่าเป็นการเรียนรู้เกี่ยวกับการแยกแยะและจัดเรียงวัตถุที่เกิดขึ้นในธรรมชาติหรือสร้างขึ้นตามความสนใจของผู้เรียน ซึ่งแบบรูปจะช่วยฝึกนักเรียนในเรื่องการสังเกต การคาดเดาและการอธิบาย

Charlesworth (2000: 136-140) กล่าวว่า แบบรูปเป็นการทำซ้ำๆ ของการค้นพบหรือการได้สัมผัส ได้ยิน ได้เห็นบ่อยๆ สม่าเสมอ อย่างเป็นระบบ เป็นลำดับทีละลำดับและมีแบบแผน

สมวงษ์ แปลงประสพโชค (2543: 19) กล่าวว่า แบบรูปเป็นความสัมพันธ์ที่มีลักษณะร่วมและลักษณะต่าง ซึ่งสามารถสรุปเป็นกฎเกณฑ์ได้

จากความหมายของแบบรูปข้างต้น สรุปว่า แบบรูปเป็นการแสดงความสัมพันธ์ของสิ่งต่างๆ เช่น รูปเรขาคณิต จำนวน หรือรูปอื่นๆ ด้วยการนำสิ่งเหล่านั้นมาเรียงลำดับตามเกณฑ์ที่กำหนด

ความสำคัญของการเรียนแบบรูป

นักการศึกษาหลายท่านกล่าวถึงความสำคัญของการเรียนแบบรูปว่า แบบรูปถือเป็นเนื้อหาหนึ่งที่ถูกกำหนดในโครงสร้างของวิชาคณิตศาสตร์ ดังจะเห็นได้ว่า ปัจจุบันหลายประเทศได้บรรจุเนื้อหาแบบรูปในหลักสูตรตั้งแต่ชั้นประถมศึกษา เนื่องจากการเริ่มต้นเรียนแบบรูปตั้งแต่ระดับประถมศึกษาเป็นสิ่งจำเป็นสำหรับนักเรียน อีกทั้งแบบรูปถือเป็นพื้นฐานสำคัญสำหรับการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ซึ่งมีความเป็นนามธรรมสูง ทั้งนี้สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกาได้แนะนำให้นักเรียนฝึกการทำกิจกรรมเกี่ยวกับแบบรูปตั้งแต่เด็ก และมีความคาดหวังว่า การทำกิจกรรมดังกล่าวทำให้นักเรียนสามารถอธิบายความสัมพันธ์ของแบบรูปสามารถหาพจน์ถัดไปและพจน์ทั่วไปของแบบรูป รวมถึงสามารถนำเสนอความสัมพันธ์โดยใช้

การวาดภาพ การสร้างตาราง กราฟ หรือการใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ทั้งแบบรูปที่เป็น
รูปเรขาคณิตและแบบรูปของจำนวน (Moss Beatty Barkin and Shillolo, 2008: 156)

สอดคล้องกับ Orton และ Orton (2005: 104) ได้อธิบายถึงพื้นฐานทางพีชคณิต 4 ข้อ
โดยหนึ่งในพื้นฐานทางพีชคณิตคือการทำให้อยู่ในรูปทั่วไป ซึ่งหลายปีที่ผ่านมาเนื้อหาเกี่ยวกับ
แบบรูปของจำนวนถูกนำมาใช้ในการอธิบายความสัมพันธ์และการทำให้อยู่ในรูปทั่วไปใน
หลักสูตรของหลายโรงเรียน ทั้งนี้เมื่อกำหนดแบบรูปของจำนวนแก่นักเรียน นักเรียนสามารถสร้าง
ข้อคาดการณ์ หาพจน์ที่อยู่ใกล้ พจน์ที่อยู่ไกลและพจน์ทั่วไปของแบบรูป พร้อมทั้งอธิบายเหตุผล
ของการได้มาซึ่งคำตอบ ซึ่งถือเป็นหนทางที่นำไปสู่ความเข้าใจในเรื่องพีชคณิตได้ดี

นอกจากนี้ Kennedy และ Tipps (1994: 12) กล่าวว่า นักเรียนสามารถเรียนรู้แบบรูปที่อยู่ใน
ในธรรมชาติได้ ซึ่งแบบรูปในธรรมชาติมีส่วนช่วยให้นักเรียนเกิดการเชื่อมโยง การมองเห็น
ความสัมพันธ์ การสรุปอ้างอิงและการพยากรณ์ ตลอดจนการสอนแบบรูปในวิชาคณิตศาสตร์ยังเพิ่ม
ความสามารถทางการคิดด้วย นอกจากนี้ยังมีงานวิจัยที่ศึกษาการให้เหตุผลทางพีชคณิตของนักเรียน
โดยใช้เนื้อหาเรื่องแบบรูป เนื่องจากกระบวนการคิดของนักเรียนในเรื่องแบบรูปมีความน่าสนใจ
ประกอบกับเนื้อหาเรื่องแบบรูปสามารถนำไปสู่ความเข้าใจเรื่องฟังก์ชัน ได้ (Eisenmann and
Phillips, 2008: 296)

สำหรับ สมวงษ์ แปลงประสพโชค (2543: 19) กล่าวว่า เนื้อหาเรื่องแบบรูปช่วยฝึกฝน
ให้นักเรียนเป็นคนช่างสังเกต เนื่องจากนักเรียนได้ฝึกค้นหาความสัมพันธ์ของแบบรูป โดยใช้
วิธีการที่หลากหลาย ขึ้นอยู่กับประสบการณ์และพื้นฐานการคิดของแต่ละคน

ดังนั้นการเรียนแบบรูปจึงมีความสำคัญในการช่วยส่งเสริมความสามารถในการคิด การ
ให้เหตุผล การเชื่อมโยง การมองเห็นความสัมพันธ์ การสรุปอ้างอิงและการพยากรณ์ รวมถึงเป็น
พื้นฐานในการเรียนพีชคณิตซึ่งมีความเป็นนามธรรมสูง

ประเภทของแบบรูป

จากการศึกษาทำให้ทราบวิธีการแบ่งประเภทของแบบรูปออกเป็นหลายประเภทซึ่งวิธีการ
แบ่งแบบรูปแต่ละประเภทมีความเกี่ยวเนื่องและสัมพันธ์กัน ดังนี้

สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา (2551: 60-61) แบ่งแบบรูปเป็น 2 ประเภท ได้แก่

1) แบบรูปชุดของรูปเรขาคณิต เช่น $\square \triangle \square \triangle \dots$ และถ้าความสัมพันธ์เป็นเช่นนี้
เรื่อยไป นักเรียนน่าจะคาดการณ์ได้ว่า รูปต่อไปในแบบรูปนี้ควรเป็นรูปสี่เหลี่ยม ด้วยเหตุผลที่ว่า
มีการเขียนรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมสลับกันครั้งละหนึ่งรูป

2) แบบรูปชุดของจำนวน เช่น 101 1001 10001 100001 ... และถ้าความสัมพันธ์เป็นเช่นนี้เรื่อยไป นักเรียนน่าจะคาดการณ์ได้ว่า จำนวนถัดไปควรเป็น 1000001 ด้วยเหตุผลที่ว่าตัวเลขที่แสดงจำนวนถัดไปได้มาจากการเติมศูนย์เพิ่มขึ้นมาหนึ่งตัวในระหว่างเลขโดดหนึ่งที่อยู่หัวท้าย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี [2544: ระบบออนไลน์] แบ่งแบบรูปออกเป็น 4 ประเภท ได้แก่ แบบรูปของจำนวน (Number Patterns) แบบรูปของรูปภาพ (Picture Patterns) แบบรูปของรูปร่างเรขาคณิต (Patterns in geometric Shapes) และแบบรูปของสามเหลี่ยมปาสคาล (Patterns in Pascal's Triangle)

Bishop (2000: 110) แบ่งแบบรูปออกเป็น 2 ประเภท คือ

- 1) แบบรูปของจำนวน (A number pattern) เป็นลำดับของจำนวนซึ่งมีกฎของการเรียงต่อกัน อาจใช้การคำนวณจากจำนวนในตำแหน่งก่อนหน้า หรือการคำนวณโดยใช้ตำแหน่งในลำดับ
- 2) แบบรูปของจำนวนที่เป็นรูปเรขาคณิต (A geometric number pattern) เป็นลำดับความสัมพันธ์ของจำนวนซึ่งเป็นรูปเรขาคณิต โดยแต่ละรูปได้มาจากกระบวนการหรือความสัมพันธ์ของลำดับก่อนหน้า

Warren และ Cooper (2008: 113-114) แบ่งแบบรูปออกเป็น 3 ประเภท ได้แก่

- 1) แบบรูปซ้ำ (A repeat pattern) เป็นแบบรูปที่มีโครงสร้างซ้ำ ซึ่งสามารถหาพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้จากความสัมพันธ์สั้นๆ ตัวอย่างแบบรูปซ้ำ เช่น A B B A B B A B B A... หรือ แดง เขียว แดง เขียว แดง เขียว... เป็นต้น

- 2) แบบรูปเพิ่ม (Growing patterns) เป็นความสัมพันธ์ของลำดับซึ่งเรียกแต่ละลำดับว่า พจน์ โดยแต่ละพจน์ในแบบรูปขึ้นอยู่กับพจน์ก่อนหน้าหรือตำแหน่งของพจน์ในแบบรูป แบบรูปเพิ่มส่วนใหญ่จะเกี่ยวข้องกับแบบรูปที่เป็นรูปเรขาคณิตซึ่งมีความเป็นรูปธรรมสูง ตัวอย่างแบบรูปเพิ่ม เช่น 3, 6, 9, 12, 15, 18,... หรือ $\square \triangle \square \triangle \triangle \square \triangle \triangle \triangle \dots$ เป็นต้น

- 3) แบบรูปของจำนวน (Number patterns) เป็นแบบรูปที่ถูกสร้างขึ้นจากตัวเลข ซึ่งแบบรูปของจำนวนสามารถเป็นได้ทั้งแบบรูปซ้ำและแบบรูปเพิ่ม ตัวอย่างแบบรูปของจำนวนที่เป็นแบบรูปซ้ำ เช่น 122122122122... และตัวอย่างแบบรูปของจำนวนที่เป็นแบบรูปเพิ่ม เช่น 3, 7, 11, 15, 19,... เป็นต้น

สำหรับงานวิจัยนี้จะแบ่งแบบรูปออกเป็น 2 ประเภทคือ แบบรูปของจำนวนและแบบรูปที่เป็นรูปเรขาคณิต ซึ่งทั้งสองประเภทสามารถเป็นได้ทั้งแบบรูปซ้ำและแบบรูปเพิ่ม

แบบรูปกับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

นักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างแบบรูปกับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2544: 220) กล่าวว่า แบบรูปเป็นความสัมพันธ์ที่แสดงลักษณะสำคัญของชุดของจำนวน รูปเรขาคณิต หรืออื่นๆ การให้นักเรียนได้ฝึกสังเกตและวิเคราะห์แบบรูปจะช่วยให้เกิดกระบวนการสร้างองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ คือ การสังเกต สำรวจ คาดการณ์ และให้เหตุผลสนับสนุนหรือคัดค้านข้อคาดการณ์

สมวงษ์ แปลงประสพโชค (2543: 3) กล่าวว่า การค้นหาแบบรูปเป็นสิ่งสำคัญทางคณิตศาสตร์ ที่ช่วยฝึกให้นักเรียนเป็นคนช่างสังเกต ได้ฝึกค้นหาลักษณะร่วมและลักษณะต่างเพื่อสรุปเป็นกฎเกณฑ์ ซึ่งความรู้ทางคณิตศาสตร์หลายอย่างได้มาจากการสังเกต การค้นหาความสัมพันธ์ของแบบรูปเพื่อสร้างข้อคาดการณ์ และนำข้อคาดการณ์นั้นไปตรวจสอบ หาเหตุผลเพื่อนำไปสู่กฎและทฤษฎีบทต่อไป

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537: 52-53) กล่าวว่า การค้นหาแบบรูปเป็นกลวิธีในการแก้ปัญหาแบบหนึ่งที่มีความสำคัญ เนื่องจากการค้นหาแบบรูปตั้งอยู่บนพื้นฐานของการให้เหตุผลแบบอุปนัย ซึ่งเป็นวิธีการเดียวกันกับที่นักวิทยาศาสตร์ใช้ในการสรุปผลการทดลอง ที่ได้จากการสังเกตหลายๆ ครั้งแล้วให้ผลในทางเดียวกัน จึงสรุปผลที่ได้จากการสังเกตนั้น ซึ่งกลวิธีนี้จะมีประโยชน์มากในการแก้สถานการณ์ปัญหา เนื่องจากจะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนมองเห็นรูปแบบของคำตอบ รวมถึงสามารถคาดการณ์คำตอบ เป็นต้น

สอดคล้องกับมหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมราช (2537: 52) ที่กล่าวถึง กลวิธีการแก้ปัญหาโดยการค้นหาแบบรูปเป็นวิธีการหนึ่งที่มีประสิทธิภาพ ซึ่งตั้งอยู่บนพื้นฐานของการให้เหตุผลแบบอุปนัย ซึ่งเป็นรูปแบบการให้เหตุผลที่นักคณิตศาสตร์และนักวิทยาศาสตร์ใช้ในการสร้างองค์ความรู้ใหม่

ดังนั้นแบบรูปกับการให้เหตุผลจึงมีความเกี่ยวข้องและสัมพันธ์กัน ในแง่ของการค้นหาความสัมพันธ์ของแบบรูป โดยอาศัยการสังเกตและสร้างข้อสรุปบนพื้นฐานของการให้เหตุผลแบบอุปนัย และยังเกี่ยวข้องกับกลวิธีในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์อีกด้วย

แนวทางการจัดการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาการให้เหตุผลเกี่ยวกับแบบรูป

นักการศึกษาหลายท่านได้เสนอแนวทางการจัดการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมให้ผู้เรียนได้ฝึกการให้เหตุผลและฝึกกระบวนการคิด ดังนี้

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ (2545: 197-198) ได้นำเสนอแนวทางการจัดการเรียนการสอนเกี่ยวกับการให้เหตุผล โดยมีขั้นตอน ดังนี้

- 1) สังเกต โดยให้นักเรียนสังเกต รับรู้และพิจารณาคำ ข้อความหรือภาพเหตุการณ์ เพื่อเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของสิ่งต่างๆ แล้วสรุปเป็นใจความสำคัญ ตรงตามหลักฐานข้อมูล
- 2) อธิบาย โดยให้นักเรียนอธิบายหรือตอบคำถาม แสดงความคิดเห็น ที่เน้นการใช้เหตุผลด้วยหลักการ กฎเกณฑ์ มีการอ้างหลักฐานข้อมูลประกอบให้น่าเชื่อถือ
- 3) รับฟัง โดยให้นักเรียนฟังความคิดเห็นที่แตกต่างจากความคิดเห็นของตน และตอบคำถามตามความคิดเห็นที่แตกต่างกัน เน้นการปรับเปลี่ยนความคิดอย่างมีเหตุผล
- 4) เชื่อมโยงความสัมพันธ์ โดยให้นักเรียนได้เปรียบเทียบความแตกต่างและความคล้ายคลึงของสิ่งต่างๆ หาเหตุผลหรือกฎเกณฑ์มาเชื่อมโยงในลักษณะอุปมาอุปไมย
- 5) วิจารณ์ โดยให้นักเรียนวิเคราะห์เหตุการณ์หรือแนวคิดที่กำหนด แล้วให้จำแนกหาส่วนดี ส่วนด้อยด้วยการยกเหตุผลและหลักฐานประกอบ
- 6) สรุป โดยให้นักเรียนพิจารณาข้อมูลต่างๆ ที่เชื่อมโยงเกี่ยวข้องกัน แล้วสรุปผลตามหลักฐานข้อมูล

สุรางค์ ไคว์ตระกูล (2544: 317-318) ได้นำเสนอรูปแบบการสอนทักษะการให้เหตุผล โดยใช้กระบวนการพื้นฐานของการคิด ซึ่งประกอบด้วย

- 1) การสังเกต (Observing) อาศัยการรับรู้และการเลือกรับรู้ ซึ่งอาศัยการระลึกลักษณะที่เคยเรียนรู้หรือทราบมาก่อนและเก็บไว้ในความทรงจำระยะยาว หรือสามารถจำได้หรือรู้จักสิ่งที่เคยรู้มาก่อน
- 2) การหารูปแบบทั่วไป (Finding Pattern and Generalizing) เป็นความสามารถจัดกลุ่มสิ่งเร้าที่ได้จากการรับรู้หรือการมีความคิดรวบยอด กระบวนการนี้ประกอบด้วยวิธีการเปรียบเทียบว่า ของหรือข้อมูล 2 อย่างมีส่วนเหมือนหรือแตกต่างกันอย่างไร หรือการจัดกลุ่มโดยใช้เกณฑ์ต่างๆ รวมทั้งการหาความสัมพันธ์ของความคิดรวบยอดและข้อมูล
- 3) การสรุปโดยใช้แบบฉบับ (Forming conclusion based on pattern) อาจทำได้โดยใช้การอนุมาน การสร้างสมมติฐาน การทำนายหรือการลองนำไปใช้
- 4) การประเมินสิ่งที่สรุป (Assessing Conclusion) อาจทำได้โดยการดูว่ามีความคงเส้นคงวาหรือไม่ รวมถึงการยืนยันด้วยข้อเท็จจริงหรือความจริง

ทศนา แคมมณี (2551: 250-252) ได้นำเสนอรูปแบบการเรียนการสอนกระบวนการให้เหตุผลแบบอุปนัย ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 การสร้างมโนทัศน์ โดยให้นักเรียนสังเกตสิ่งที่จะศึกษา และเขียนรายการสิ่งที่สังเกตเห็น หรืออาจใช้วิธีอื่น เช่น ตั้งคำถามให้นักเรียนตอบ ในขั้นนี้นักเรียนจะต้องได้รายการของสิ่งต่างๆ ที่ใช่หรือไม่ใช่ตัวแทนของมโนทัศน์ที่ต้องการให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้

ขั้นที่ 2 การตีความและสรุปข้อมูล ประกอบด้วย 3 ขั้นตอนย่อย ดังนี้

2.1 ระบุความสัมพันธ์ของข้อมูล นักเรียนศึกษาข้อมูลและตีความข้อมูลเพื่อให้เข้าใจข้อมูล และเห็นความสัมพันธ์ที่สำคัญๆ ของข้อมูล

2.2 สืบหาความสัมพันธ์ของข้อมูล นักเรียนศึกษาข้อมูลและความสัมพันธ์ของข้อมูลในลักษณะต่างๆ จนสามารถอธิบายได้ว่า ข้อมูลต่างๆ สัมพันธ์กันอย่างไร ด้วยเหตุและผล

2.3 สรุปอ้างอิง เมื่อค้นพบความสัมพันธ์หรือหลักการแล้ว ให้นักเรียนสรุปอ้างอิงโดยโยงสิ่งที่ค้นพบไปสู่สถานการณ์อื่น

ขั้นที่ 3 การประยุกต์ใช้ข้อสรุปหรือหลักการ โดยนำข้อสรุปมาใช้ในการทำนายหรืออธิบายปรากฏการณ์อื่นๆ และฝึกตั้งสมมติฐาน รวมทั้งพิสูจน์และทดสอบสมมติฐานของตน เช่นเดียวกับอัมพร ม้าคนอง (2546: 40) กล่าวถึงการสอนที่ช่วยให้นักเรียนใช้เหตุผลในการค้นหารูปแบบหรือข้อสรุปจากตัวอย่างหรืองานที่ทำ ประกอบด้วยขั้นตอนต่อไปนี้

1) ขั้นการรับงาน (Task Confrontation) เป็นขั้นที่ครูผู้สอนมอบหมายงานให้นักเรียน หากเนื้อหาที่จะให้เรียนเป็นมโนทัศน์ ลักษณะของงานควรเป็นงานที่ให้นักเรียนจัดประเภทหรือค้นหาลักษณะเฉพาะ หากเนื้อหาเป็นความสัมพันธ์ ขั้นตอนหรือวิธีการ งานที่ให้อาจเป็นการแก้ปัญหาใดๆ

2) ขั้นการทำงาน (Task work) ในขั้นนี้ นักเรียนลงมือทำงานด้วยตนเอง โดยมีครูผู้สอนเป็นผู้จัดกิจกรรม สิ่งแวดล้อมและคอยให้คำแนะนำ

3) ขั้นไตร่ตรองเกี่ยวกับงาน (Reflection on Work) เป็นขั้นของการคิดวิเคราะห์เพื่อหาคำอธิบาย สำหรับการเรียนมโนทัศน์ นักเรียนจะอธิบายเหตุผลสำหรับการจำแนกลักษณะ แต่หากเป็นการเรียนเนื้อหาที่เป็นความสัมพันธ์ ขั้นตอนหรือวิธีการ นักเรียนจะวิเคราะห์กระบวนการในการแก้ปัญหา ในขั้นนี้ครูผู้สอนจะถามคำถามกระตุ้นความคิด และเพิ่มเติมคำอธิบายของนักเรียนให้ชัดเจนมากขึ้น

4) ขั้นการอ้างอิงผล (Generalization) ในขั้นนี้ นักเรียนควรบอกได้ว่า ลักษณะของมโนทัศน์มีอะไรบ้าง และมโนทัศน์ที่เรียนคืออะไร รวมถึงบอกรูปแบบในการแก้ปัญหาได้

5) ขั้นสรุป (Articulation) เป็นขั้นการสรุปมโนทัศน์หรือกระบวนการที่ได้

6) ขั้นการพิสูจน์ (Verification) ในขั้นนี้ ครูผู้สอนให้นักเรียนใช้มโนทัศน์หรือกระบวนการที่สรุปได้ทดสอบกับตัวอย่างว่า เป็นจริงตามข้อสรุปหรือไม่

7) ขั้นการปรับ (Refinement) เป็นขั้นการปรับมโนทัศน์หรือกระบวนการหากการพิสูจน์ไม่เป็นไปตามขั้นการสรุป การปรับจะทำให้มโนทัศน์หรือกระบวนการที่สรุปได้ถูกต้องและชัดเจนมากขึ้น

สำหรับการส่งเสริมนักเรียนได้ใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ (อัมพร ม้าคนอง, 2549: 97-98) ครูผู้สอนควรทำในบริบททางคณิตศาสตร์ เช่น ในขณะที่เรียนเนื้อหาคณิตศาสตร์หรือในขณะที่ทำกิจกรรมทางคณิตศาสตร์มากกว่าจะเป็นการกระตุ้นให้นักเรียนเห็นความสำคัญหรือให้เรียนรู้การให้เหตุผลเดี่ยวๆ แยกจากสิ่งอื่น โดยอาจทำในการสอนเนื้อหา มโนทัศน์หรือการแก้ปัญหา หากเป็นการแก้ปัญหา ครูผู้สอนไม่ควรคำนึงถึงคำตอบสุดท้ายที่ถูกต้องเท่านั้น แต่ควรให้ความสำคัญกับเหตุผลว่า ทำไมนักเรียนจึงได้คำตอบเหล่านั้น และคำตอบเหล่านั้นน่าจะถูกต้องหรือผิดเพราะเหตุใด การให้นักเรียนได้อธิบายหรือชี้แจงเหตุผลจะช่วยให้ นักเรียนได้ทบทวนการทำงานเพื่อสะท้อนความคิดของตน และที่สำคัญคือ นักเรียนจะได้ข้อสรุปหรือตัดสินใจความถูกต้องของสิ่งต่างๆ ด้วยตนเองมากกว่าที่จะเชื่อตามที่ครูผู้สอนบอกหรือตามที่หนังสือเขียนไว้ นักการศึกษาคณิตศาสตร์หลายท่านได้ให้แนวคิดว่าการที่นักเรียนได้คำตอบถูกต้องแต่ใช้เหตุผลผิดเป็นอันตรายอย่างยิ่งต่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เนื่องจากเมื่อนักเรียนได้คำตอบถูกต้องแล้ว ครูผู้สอนอาจไม่ได้ให้โอกาสนักเรียนแสดงผล ซึ่งทำให้ทั้งครูผู้สอนและนักเรียนไม่ทราบว่า ที่ผิวนั้นผิดเพราะเหตุใด ดังนั้นสิ่งที่ดีกว่าการได้คำตอบถูกต้องแต่เหตุผลผิดคือ การได้คำตอบที่ผิดและสามารถค้นพบอย่างเป็นเหตุเป็นผลว่า อะไรผิดและผิดเพราะเหตุใด ซึ่งบทบาทของครูที่สามารถส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลของนักเรียน มีดังนี้

1) ในขั้นเตรียมการสอน ครูผู้สอนควรปรับลักษณะและคำถามในตัวอย่างและแบบฝึกหัดให้เป็นลักษณะคำถามที่เจาะลึกแนวคิดของนักเรียน โดยการปรับลักษณะคำถามที่มักถามว่า อะไรหรือเท่าไร ให้เป็นลักษณะคำถามว่า เพราะเหตุใด ทำไม อย่างไร สัมพันธ์หรือเกี่ยวข้องกันอย่างไร ถ้า...(เปลี่ยนแปลงเงื่อนไขบางอย่าง) แล้ว...(จะเกิดอะไรขึ้น) หรือเหมือนหรือแตกต่างกันอย่างไร รวมถึงควรปรับสถานการณ์ปัญหาในตัวอย่างและแบบฝึกหัดให้เป็นสถานการณ์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน ดึงดูดความสนใจ ทำทลายความสามารถของนักเรียน อีกทั้งควรเพิ่มกิจกรรมการเรียนการสอนที่มุ่งเน้นให้นักเรียนได้สำรวจ สืบสวน สร้างข้อความคาดการณ์ อธิบายและตัดสินใจข้อสรุปในกรณีทั่วไปของตนเองได้

2) ในขั้นดำเนินการกิจกรรมการเรียนการสอน ครูผู้สอนควรใช้คำถามที่สร้างสรรค์ และให้เวลานักเรียนในการหาคำตอบ ขณะทำกิจกรรมครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนได้คิด เมื่อนักเรียนทำแบบฝึกหัดเสร็จและได้คำตอบเรียบร้อยแล้ว ครูอาจให้นักเรียนตรวจสอบความถูกต้อง โดยให้นักเรียนอธิบายในสิ่งที่ตนคิดและนำเสนอแนวคิดของตนอย่างอิสระ ตลอดจน ครูผู้สอนควรยอมรับความคิดเห็นของนักเรียนไม่ว่าถูกหรือผิด ซึ่งการตอบผิดของนักเรียน ทำให้ครูผู้สอนได้ทราบว่า ข้อผิดพลาดนั้นมาจากไหนและมีมากน้อยเพียงใด ครูผู้สอนไม่ควรย้ำสิ่งที่นักเรียนทำผิดหรือเข้าใจผิด แต่ควรซักถาม อธิบายและเปิดอภิปรายเพื่อให้นักเรียนเข้าใจแนวคิด และกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง (สสวท., 2551: 168-186) เพราะการให้เหตุผลของนักเรียนจะทำให้ครูผู้สอนทราบระดับพัฒนาการของนักเรียน และทราบความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนหรืออุปสรรคต่อการเรียนรู้ของนักเรียน ทำให้ครูผู้สอนสามารถนำสิ่งนี้ไปวิเคราะห์ เพื่อจัดสถานการณ์ให้เหมาะสมกับการเรียนรู้ของนักเรียน รวมถึงตรวจสอบผลของสิ่งแวดล้อมในห้องเรียนที่มีผลต่อความคิด ความเข้าใจของนักเรียน (อัมพร ม้าคนอง, 2549: 97)

นอกจากนี้ยังมีผู้เสนอแนะแนวทางการจัดการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับแบบรูป ดังนี้

Herbert และ Brown (1999: 124-126) ได้นำเสนอกระบวนการในการสืบเสาะเพื่อให้เหตุผลและแก้ปัญหาเกี่ยวกับแบบรูป ซึ่งประกอบด้วย 3 ขั้นตอน ได้แก่

ขั้นที่ 1 การค้นหาแบบรูป (Pattern seeking) ในขั้นนี้นักเรียนได้แก้สถานการณ์ปัญหาที่ให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติ โดยใช้การสังเกต รวบรวมข้อมูล ค้นหาแบบรูปและนำเสนอความคิดเห็นหรือเหตุผลของข้อมูลในรูปแบบต่างๆ

ขั้นที่ 2 การเข้าใจในแบบรูป (Pattern recognition) ในขั้นนี้นักเรียนถูกตั้งคำถามเกี่ยวกับวิธีการหาคำตอบ พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลในการได้มาซึ่งคำตอบ รวมถึงให้นักเรียนให้เหตุผลเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบที่ได้

ขั้นที่ 3 การทำให้อยู่ในรูปทั่วไป (Generalizing) ในขั้นนี้นักเรียนได้สร้างและอธิบายวิธีการทำแบบรูปให้อยู่ในรูปทั่วไป พร้อมบอกเหตุผลและวิธีการใช้การคิดเชิงพีชคณิตในการแก้สถานการณ์ปัญหา

Warren และ English (1999: 143-145) ได้เสนอแนะวิธีการส่งเสริมการเรียนรู้ของนักเรียนเกี่ยวกับวิธีการให้เหตุผลในการค้นหาแบบรูป ดังนี้

1) ครูผู้สอนควรจัดประสบการณ์การเรียนรู้เชิงรูปธรรมที่เกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์เชิงตัวเลข และความสัมพันธ์ในรูปสัญลักษณ์แก่นักเรียน

2) ครูผู้สอนควรมีการช่วยเหลือนักเรียนเพื่อให้ นักเรียนมองเห็นความสัมพันธ์ของแบบรูป เพื่อนำไปสู่การอธิบายเหตุผลของความสัมพันธ์ดังกล่าว

3) ครูผู้สอนควรจัดประสบการณ์การเรียนรู้เพื่อให้ นักเรียนสามารถหาความสัมพันธ์ของแบบรูปในพจน์ถัดไป โดยใช้เหตุผลประกอบการหาความสัมพันธ์ดังกล่าว

4) ครูผู้สอนควรจัดหาสื่ออุปกรณ์ให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติ เพื่อให้ นักเรียนสามารถสร้างนิพจน์ทางคณิตศาสตร์ได้

5) ครูผู้สอนควรส่งเสริมให้นักเรียนมีการเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างนิพจน์ทางคณิตศาสตร์ที่ได้กับสถานการณ์ในชีวิตจริง

6) ครูผู้สอนควรส่งเสริมให้นักเรียนนำเสนอข้อมูลทั้งแบบรูปที่เป็นรูปเรขาคณิต และตารางข้อมูลแสดงความสัมพันธ์ของแบบรูป

นอกจากนี้ Warren และ Cooper (2008: 126) ได้เสนอแนะวิธีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ส่งเสริมการให้เหตุผลเพื่อให้เกิดความเข้าใจในเรื่องแบบรูป ดังนี้

ขั้นที่ 1 นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ของแบบรูปที่เป็นแบบรูปซ้ำ หลังจากนั้นจึงให้นักเรียนสังเกตความแตกต่างระหว่างแบบรูปซ้ำกับแบบรูปเพิ่ม โดยให้เรียนรู้จากแบบรูปที่เป็นรูปเรขาคณิต และแบบรูปของจำนวน ตามลำดับ เพื่อนำไปสู่การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ขั้นที่ 2 นักเรียนนำเสนอข้อมูลความสัมพันธ์ที่พบ โดยร่วมกันอภิปราย และให้เหตุผลถึงความสัมพันธ์ระหว่างแบบรูปซ้ำกับแบบรูปเพิ่ม

ขั้นที่ 3 ครูผู้สอนใช้คำถาม เพื่อให้เกิดการอภิปราย การแสดงเหตุผลในชั้นเรียน และส่งเสริมให้นักเรียนสามารถหาพจน์ถัดไปของแบบรูปเพิ่ม รวมทั้งหาพจน์ทั่วไปของแบบรูป

ขั้นที่ 4 ครูผู้สอนส่งเสริมให้นักเรียนมองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์กับค่าของพจน์ พร้อมทั้งตรวจสอบความสัมพันธ์ของพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่หาได้

Billings (2008: 280) ได้เสนอเครื่องมือสำหรับให้เหตุผลและการสร้างพจน์ทั่วไปของแบบรูปว่า ควรเริ่มต้นสอนแบบรูปโดยใช้สื่อที่เป็นรูปธรรม หลังจากนั้นจึงฝึกให้นักเรียนสร้างและนำเสนอพจน์ทั่วไปของแบบรูป โดยใช้คำถามที่ทำให้ นักเรียนมองเห็น และสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของแบบรูปที่เปลี่ยนไป พร้อมทั้งฝึกให้นักเรียนตรวจสอบพจน์ทั่วไปของแบบรูปโดยใช้การมองย้อนกลับ เช่นเดียวกับ Garrick Threlfall และ Orton (2005: 14-16) นำเสนอวิธีการเรียนเรื่องแบบรูปว่า ควรส่งเสริมให้นักเรียนได้เรียนรู้เรื่องแบบรูปตั้งแต่ขั้นอนุบาลโดยใช้สื่อที่เป็นรูปธรรม เพื่อเป็นพื้นฐานในการเรียนเรื่องแบบรูปในระดับสูงขึ้น สำหรับในชั้นมัธยมศึกษาควรจัดกิจกรรมที่ส่งเสริมให้นักเรียนเกิดความเข้าใจ สามารถมองเห็น อธิบายและอภิปรายความสัมพันธ์ของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ นอกจากนี้ Orton Orton และ Roper (2005: 128-134) นำเสนอวิธีการ

สอนเพื่อให้นักเรียนสามารถหาพจน์ทั่วไปของแบบรูป โดยใช้สื่อของจริงและสื่อที่เป็นรูปภาพ ซึ่งสื่อทั้งสองลักษณะจะช่วยกระตุ้นให้นักเรียนมองเห็นความสัมพันธ์และสามารถหาพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้ง่ายขึ้น

ดังนั้นจากการศึกษาเอกสารเกี่ยวกับแนวทางการจัดการเรียนการสอนเกี่ยวกับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในเรื่องแบบรูป ผู้วิจัยจึงผสมผสานและประยุกต์แนวทางในการจัดการเรียนการสอนดังกล่าว มาเป็นขั้นตอนการสอนเพื่อพัฒนาการให้เหตุผลผ่านการเรียนรู้เรื่องแบบรูป ดังนี้

ขั้นที่ 1 การนำเสนอปัญหา

เริ่มต้นจากครูผู้สอนนำเสนอปัญหาเกี่ยวกับแบบรูป 2-3 แบบรูป หลังจากนั้นให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ของแบบรูป โดยครูผู้สอนใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนมองเห็นความสัมพันธ์ของแบบรูป และสามารถสร้างข้อคาดการณ์เกี่ยวกับแบบรูปที่กำหนดให้ เช่น รูปถัดไปจะเป็นอย่างไร ทำไมจึงเป็นเช่นนั้น เป็นต้น

ขั้นที่ 2 การวิเคราะห์ข้อมูลและแลกเปลี่ยนเรียนรู้

ในขั้นนี้ครูผู้สอนใช้คำถามซึ่งเป็นการอภิปรายในชั้นเรียน ให้นักเรียนสามารถวิเคราะห์แบบรูป นำไปสู่การหาความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์กับค่าของพจน์ รวมถึงนักเรียนสามารถหาพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ พจน์ที่อยู่ไกล และพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้

ขั้นที่ 3 การเรียนรู้อย่างอิสระ

ในขั้นนี้ให้นักเรียนทำกิจกรรมกลุ่ม โดยการสร้างแบบรูปอย่างอิสระ รวมทั้งหาความสัมพันธ์ของแบบรูปในพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ พจน์ที่อยู่ไกล และพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่สร้างขึ้น หลังจากนั้นครูผู้สอนเลือกนักเรียนบางกลุ่มออกมานำเสนอวิธีการหาความสัมพันธ์ของแบบรูปที่สร้างขึ้น ในขณะที่นักเรียนนำเสนอ ครูผู้สอนใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนแสดงผลของการวิเคราะห์และหาความสัมพันธ์ของแบบรูป รวมทั้งตรวจสอบความถูกต้อง

ขั้นที่ 4 การสรุปและให้งาน

ในขั้นนี้ให้นักเรียนสรุปขั้นตอนการวิเคราะห์แบบรูปและวิธีการหาพจน์ทั่วไป รวมทั้งบอกเหตุผลที่นำไปสู่การสร้างพจน์ทั่วไป หลังจากนั้นครูผู้สอนมอบหมายงานให้นักเรียนทำ

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

อรรณพ พรหมแก้ว (2551) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาทักษะกระบวนการการแก้ปัญหาและทักษะกระบวนการการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสันป่าตองวิทยาคม ซึ่งการออกแบบกิจกรรมการเรียนการสอนแต่ละหน่วย มีการนำเข้าสู่บทเรียนโดยใช้ปัญหาหรือสถานการณ์เป็นตัวกระตุ้น และจัดกิจกรรมแบบกลุ่มโดยเน้นให้เกิดการอภิปรายและการแก้ปัญหา หลังจากนั้นมอบหมายให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดและเขียนอนุทิน ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการด้านทักษะกระบวนการการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในขั้นตอนความเข้าใจปัญหาและขึ้นวางแผนการแก้ปัญหา นักเรียนพัฒนาอยู่ในระดับดีมาก ส่วนขั้นการดำเนินการตามแผนและขั้นการตรวจสอบผล นักเรียนมีความสามารถอยู่ในระดับพอใช้ ความสามารถของนักเรียนในด้านทักษะกระบวนการการให้เหตุผลซึ่งนักเรียนสามารถอธิบายให้เหตุผลที่สมเหตุสมผลประกอบคำตอบอยู่ในระดับดี

อลิสรา ชมชื่น (2550) ได้ทำการวิจัยเพื่อพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การสื่อสารและการให้เหตุผล เพื่อเสริมสร้างสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น และศึกษาผลการใช้กระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น โดยการพิจารณาจากสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย ความรู้ด้านมโนทัศน์ ความรู้ด้านการดำเนินการ ความสามารถในการแก้ปัญหา ความสามารถในการสื่อสาร และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยจัดกระบวนการเรียนการสอน 4 ขั้นตอน ได้แก่ ขั้นทบทวนความรู้พื้นฐาน ขั้นการเรียนรู้จากการปฏิบัติ ขั้นสร้างความเชื่อมโยง และขั้นสร้างความรู้และนำความรู้ไปใช้ ผลการวิจัยพบว่า ความรู้ด้านมโนทัศน์ ความรู้ด้านการดำเนินการ ความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสารและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และความรู้ด้านมโนทัศน์ ความรู้ด้านการดำเนินการ ความสามารถในการแก้ปัญหา การสื่อสารและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังเรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

อิทธิเทพ นวระสุจิตร์ (2548) ได้สร้างชุดการเรียนการสอนที่เน้นการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ด้านกระบวนการ การให้เหตุผล ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และศึกษาผลการเรียนของนักเรียนจากการเรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านกระบวนการ การให้เหตุผล โดยใช้ชุดการสอนและจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นให้นักเรียนปฏิบัติทั้งแบบเดี่ยวและแบบกลุ่ม โดยเริ่มจากสิ่งที่ย่อยไปยาก ควบคุมบทบาทในการกำหนดกิจกรรมที่หลากหลาย ตลอดจนครูใช้คำถามกระตุ้นการให้เหตุผลของนักเรียน ซึ่งประกอบด้วย 2 ช่วง คือ ช่วงที่ 1 เตรียมความ

พร้อมทางการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านกระบวนการ การให้เหตุผล และช่วงที่ 2 สถานการณ์ปัญหาที่ส่งเสริมการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านกระบวนการ การให้เหตุผล ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนโดยใช้ชุดการเรียนการสอนที่เน้นการคิดเชิงคณิตศาสตร์ด้านกระบวนการ การให้เหตุผลที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น มีผลการเรียนผ่านเกณฑ์ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม เป็นจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .01

รัชดา ยাত্রา (2549) ศึกษาผลของการจัดกิจกรรมชุมนุมคณิตศาสตร์โดยใช้ทักษะการเชื่อมโยงที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยจัดกิจกรรมหรือสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ส่งเสริมให้นักเรียนได้นำความรู้และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ มาใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์ที่ผู้วิจัยกำหนดขึ้น เพื่อให้ผู้เรียนเห็นการเชื่อมโยงภายในเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ด้วยกัน และคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 หลังการปฏิบัติกิจกรรมชุมนุมคณิตศาสตร์โดยใช้ทักษะการเชื่อมโยงสูงกว่าก่อนเข้าร่วมกิจกรรม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 หลังการปฏิบัติกิจกรรมชุมนุมคณิตศาสตร์โดยใช้ทักษะการเชื่อมโยงสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 80 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จิรา ลำนวนหอม (2546) ได้สร้างกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เรื่องแบบรูปและการให้เหตุผลสำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 พร้อมทั้งศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องแบบรูปและการให้เหตุผลของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่ได้รับการสอนโดยใช้ชุดกิจกรรม ซึ่งแต่ละกิจกรรมจะเน้นให้นักเรียนสังเกต รวบรวม ค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูล สร้างข้อความคาดการณ์ และให้เหตุผลสนับสนุนหรือคัดค้านข้อความคาดการณ์ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องแบบรูปและการให้เหตุผลมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .05 จึงสรุปได้ว่านักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องแบบรูปและการให้เหตุผล

พนารัตน์ แซ่มชื่น (2548) ได้สร้างชุดกิจกรรมแบบปฏิบัติการเพื่อส่งเสริมทักษะการปัญหา และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่องแบบรูปและความสัมพันธ์ให้มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ร้อยละ 80 และศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องแบบรูปและความสัมพันธ์ของนักเรียนหลังจากที่ได้รับการสอนโดยใช้ชุดกิจกรรมแบบปฏิบัติการ โดยให้นักเรียนลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง จากอุปกรณ์ของจริงในแต่ละชุดกิจกรรม เพื่อให้ให้นักเรียนได้เก็บข้อมูล สังเกต และนำไปสู่การสรุปกฎเกณฑ์ต่างๆ ด้วยตนเอง ผลการวิจัยพบว่า ชุดกิจกรรมและปฏิบัติการเพื่อส่งเสริมทักษะการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่องแบบรูปและความสัมพันธ์ มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ร้อยละ 80 และ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนหลังจากได้รับการสอนโดยใช้ชุดกิจกรรมแบบปฏิบัติการเพื่อส่งเสริมทักษะการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่องแบบรูปและความสัมพันธ์ อยู่ในระดับสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 ที่กำหนดไว้อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

Ellis (2007) ศึกษาปัจจัยที่มีอิทธิพลต่อการให้เหตุผลเรื่องแบบรูปของนักเรียน ผลการวิจัยพบว่า ปัจจัยที่มีอิทธิพลต่อการให้เหตุผลแบบรูปคือการใช้เนื้อหาแบบรูปที่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ในชีวิตจริง เนื่องจากปัญหาดังกล่าวจะช่วยส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียนมากกว่าการใช้เนื้อหาแบบรูปของจำนวนที่เป็นความสัมพันธ์เชิงปริมาณ

Warren และ Cooper (2008) ศึกษากระบวนการคิดทางพีชคณิตโดยใช้แบบรูปเรขาคณิตที่เป็นแบบรูปเพิ่มกับนักเรียนที่มีอายุเฉลี่ย 8 ปี ผลการวิจัยพบว่า นอกจากนักเรียนสามารถมองเห็นความสัมพันธ์จากแบบรูปเรขาคณิตที่เป็นแบบรูปเพิ่มแล้วนักเรียนยังสามารถสร้างรูปทั่วไปจากความสัมพันธ์ซึ่งถือเป็นกระบวนการคิดทางพีชคณิตอย่างหนึ่ง

Rivera และ Becker (2008) ศึกษาวิธีการสร้างพจน์ทั่วไปของแบบรูปโดยใช้แบบรูปที่เป็นรูปภาพและมีความสัมพันธ์เชิงเส้น ผลการวิจัยพบว่า การใช้แบบรูปที่เป็นรูปภาพสามารถสร้างความเข้าใจของนักเรียนและช่วยให้นักเรียนสามารถสร้างพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้

Rivera (2010) ได้จัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยใช้ visual template เพื่อช่วยในการหาพจน์ทั่วไปของแบบรูป ผลการวิจัยพบว่า การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยใช้ visual template มีส่วนช่วยให้นักเรียนสามารถสร้างพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้

จากงานวิจัยข้างต้นเห็นได้ว่า มีงานวิจัยหลายเรื่องที่ศึกษาเกี่ยวกับการพัฒนาทักษะการให้เหตุผลควบคู่ไปกับการพัฒนาทักษะการแก้ปัญหา ดังนั้นอาจกล่าวได้ว่า ทักษะการให้เหตุผลสามารถพัฒนาไปพร้อมกับทักษะการแก้ปัญหาได้ นอกจากนี้ยังมีงานวิจัยที่ใช้เนื้อหาเรื่องแบบรูปเพื่อส่งเสริมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยเริ่มจากการใช้สื่อของจริงที่เป็นรูปธรรมเพื่อให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติ ไปสู่การสรุปความคิดรวบยอดที่เป็นนามธรรม เพื่อสร้างความเข้าใจในเรื่องแบบรูปแก่นักเรียน และช่วยให้นักเรียนสามารถสร้างพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้ ตลอดจนมีการใช้สถานการณ์ปัญหาในชีวิตประจำวันมาเชื่อมโยงกับการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จึงเป็นทักษะสำคัญที่ควรมีการพัฒนาอย่างต่อเนื่องเพื่อส่งเสริมให้นักเรียนมีทักษะกระบวนการด้านการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ดียิ่งขึ้น ทั้งนี้เนื้อหาเรื่องแบบรูปจัดเป็นเนื้อหาหนึ่งที่สามารถพัฒนาทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนได้