

บทที่ 2

ทฤษฎี

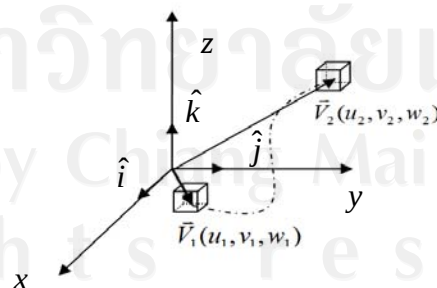
2.1 สมการที่เกี่ยวข้อง

การอธิบายพฤติกรรมการไหลของของไหลนั้น โดยปกติแล้วจะอธิบายด้วยทฤษฎีทางฟิสิกส์ที่สำคัญในการอธิบายกลศาสตร์ของของไหล ซึ่งสมการเหล่านี้จะรวมอยู่ในชุดสมการ Governing Equations ซึ่งต่อออกมาจากสมการพื้นฐาน กฎของเกาส์ กฎของนิวตัน และสมการพลังงาน ซึ่งทั้งหมดนี้ จะบรรยายถึงการอนุรักษ์มวล อัตราการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่น ฟลักซ์ของมวล โมเมนตัมและพลังงาน แต่ถึงแม้ว่าสมการเหล่านี้ จะสามารถอธิบายพฤติกรรมการไหลได้เกือบครบถ้วน แต่กระนั้นก็ตาม การแก้สมการที่มีคำตอบสอดคล้องกับเงื่อนไขการไหลในรูปแบบต่างๆ ยังเป็นการยากที่จะหาคำตอบที่แท้จริงได้ การอธิบายระบบของไหล มักจะอธิบายด้วยสมการอนุพันธ์ เนื่องจากการวัดการเปลี่ยนแปลงปริมาณต่างๆทำได้ง่าย โดยส่วนใหญ่แล้วปริมาณต่างๆที่เราสามารถวัดได้จะเป็นค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์

ดังนั้นเพื่อความเข้าใจในความหมายทางกายภาพของแต่ละพจน์ ในสมการเชิงอนุพันธ์ รวมทั้งที่มาของพจน์เหล่านี้ ในบทนี้จะแสดงความหมายของค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์และขั้นตอนการสร้างสมการที่เกี่ยวข้องกับของไหล ดังต่อไปนี้

2.1.1 ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์

เพื่ออธิบายความหมายของค่านี้ พิจารณารูปที่ 2.1 แสดงเส้นทางของก้อนอนุภาคของไหล จากตำแหน่งที่ 1 ที่เวลา t_1 ไปยังตำแหน่งที่ 2 ที่เวลา t_2 ที่ไม่ห่างกันมากบนปริภูมิ 3 มิติ



รูปที่ 2.1 แสดงการเคลื่อนที่เฉพาะส่วนย่อยของก้อนอนุภาคของไหลเคลื่อนที่จากตำแหน่ง ที่ 1 เวลา t_1 ด้วยความเร็ว $\vec{V}_1(u_1, v_1, w_1)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่มีค่าขึ้นกับ ความเร็วในแกน x, y, z ไปยังตำแหน่งที่ 2 ที่เวลา t_2 โดยที่มีความเร็วสุดท้ายเป็น $\vec{V}_2(u_2, v_2, w_2)$

โดย $\vec{V}_i(u_i, v_i, w_i) = u_i \hat{x} + v_i \hat{y} + w_i \hat{z}$

(2.1)

เมื่อ $i=1, 2$ เป็นตัวบ่งบอกตำแหน่งของก้อนอนุภาคของไหล

และนิยามฟังก์ชันความเร็วให้ขึ้นกับตำแหน่งและเวลาดังนี้

$$u_i \equiv u_i(x, y, z, t), \quad v_i \equiv v_i(x, y, z, t), \quad w_i \equiv w_i(x, y, z, t) \quad (2.2)$$

ในที่นี้ u, v และ w เป็นความเร็วในทิศทางใด ๆ

ขณะที่ก้อนอนุภาคของไหลนี้เคลื่อนที่ไปนั้น คุณสมบัติต่างๆ จะเปลี่ยนแปลงไปกับตำแหน่งและเวลาด้วย เช่นความหนาแน่น ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง x, y, z เช่นเดียวกับความเร็ว ความหนาแน่น ของก้อนของไหลที่ตำแหน่งที่ i นี้ จะเขียนได้ว่า

$$\rho_i = \rho(x_i, y_i, z_i, t_i) \quad (2.3)$$

เมื่อระบบมีการเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่อง จะสามารถกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ ของจุดหนึ่งในรูปของอีกจุดหนึ่งได้ (ในกรณีนี้จะกระจายจุดที่ 2 จากจุดที่ 1) ตามวิธีการของ ปราโมทย์ (2554)

$$\rho_2 = \rho_1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_1 (\Delta x) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_1 (\Delta y) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_1 (\Delta z) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_1 (\Delta t) + H.O.T \quad (2.4)$$

โดย $H.O.T$ คือผลรวมพจน์ที่มีอนุพันธ์อันดับสูงกว่า 1 หรือ high order term

เมื่อย้าย ρ_1 มายังด้านซ้ายของสมการแล้วหารตลอดด้วย Δt จะได้ว่า

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\Delta t} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_1 \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_1 \left(\frac{\Delta y}{\Delta t} \right) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_1 \left(\frac{\Delta z}{\Delta t} \right) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_1 + H.O.T \quad (2.5)$$

เมื่อ $\Delta t \rightarrow 0$ มากๆ ซึ่งเปรียบได้กับการเลื่อนของตำแหน่งที่ 2 เข้ามาใกล้ ตำแหน่งที่ 1 มากๆ ทำให้คิดได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\Delta t} &\approx \frac{d\rho}{dt} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} &\approx \frac{dx}{dt} = u \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} &\approx \frac{dy}{dt} = v \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} &\approx \frac{dz}{dt} = w \end{aligned} \quad (2.6)$$

และพจน์ $H.O.T$ ซึ่งประกอบด้วย $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ต่างเข้าสู่ศูนย์ ดังนั้น (2.5) จึงเขียนได้ว่า

$$\frac{d\rho}{dt} = u_1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_1 + v_1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_1 + w_1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_1 \quad (2.7)$$

ซึ่งพจน์ทางซ้ายมือคือ อนุพันธ์รวมของความหนาแน่นนั่นเอง ส่วนความหมายทางกายภาพของ (2.7) คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นทั้งหมดของก้อนของเหลวบริเวณที่ 1 และบริเวณรอบๆต่อเวลา จะเท่ากับ ผลรวมการพาก้อนของไหลออกไปจากบริเวณที่ 1 ในทิศทางต่างๆ (ทิศตามแกน x, y, z) กับ การเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นของก้อนของไหลในบริเวณที่ 1 ต่อเวลา จาก (2.7) อนุพันธ์สามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไป ได้ดังนี้

$$\frac{d}{dt} = (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) + \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (2.8)$$

เมื่อ
$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \quad (2.9)$$

(ในที่นี้ $\vec{\nabla}$ เขียนใน Cartesian coordinates โดยมีรูปทั่วไปคือ $\vec{\nabla} = \sum_{i=1}^n \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ โดย i เป็นตัวบ่งชี้ทิศทางของพิกัดในปริภูมิสามมิติ) ซึ่งอนุพันธ์รวมนี้จะใช้อธิบายการเปลี่ยนแปลงของปริมาณทางฟิสิกส์อย่างอื่นได้เช่นอุณหภูมิ ความเค้นในเนื้อวัสดุ ศักย์ไฟฟ้า ฯลฯ

2.1.2 การประมาณความต่อเนื่อง

ของไหลมีระยะห่างระหว่างโมเลกุลมากกว่าของแข็ง ทำให้มีสมบัติบางประการ เช่น ความเร็วและความหนาแน่นไม่เท่ากันในเนื้อสารในระดับขนาดของโมเลกุล ซึ่งในระดับเล็กมาก ๆ จะมีขนาดหรือปริมาณที่ไม่ต่อเนื่อง แต่อย่างไรก็ตามเราสามารถคิดให้ของไหลมีความต่อเนื่องได้ ถ้าปริมาตรเล็กนั้นถูกพิจารณาแล้วว่ามีจำนวนของโมเลกุลเพียงพอ เช่น น้ำปริมาตร 1 พิโคลิตร

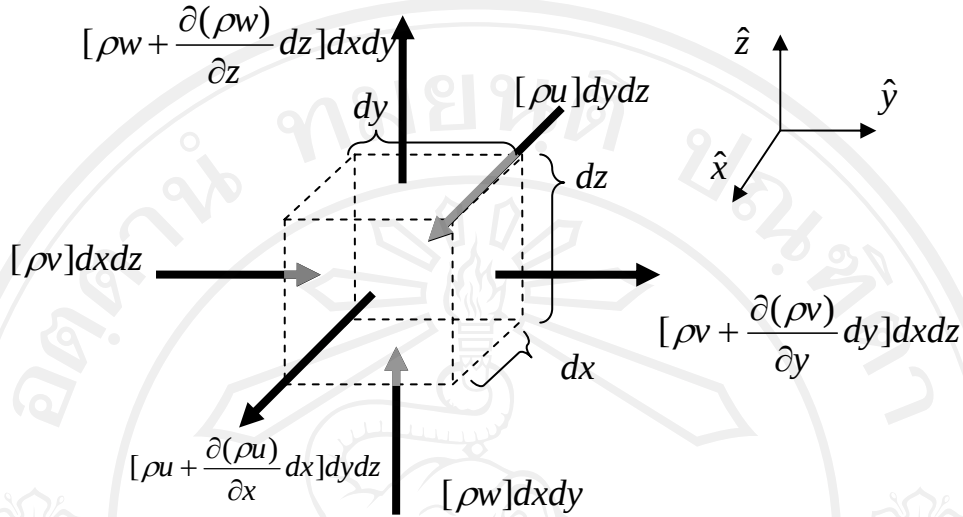
(1 picoliter = 10^{-12} ลิตร เทียบเท่ากับปริมาตรลูกบาศก์กว้าง 10 μm) จะประกอบด้วยโมเลกุลของน้ำประมาณ 3×10^{13} โมเลกุล ทำให้เราสามารถเฉลี่ยสมบัติของ ของไหลปริมาตรนี้และประมาณได้ว่าเป็นของไหลที่มีความต่อเนื่องได้ ซึ่งสมบัติความต่อเนื่องยังคงใช้ได้ เมื่อระดับความยาวของของไหลสั้นกว่าขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของโมเลกุล แต่อย่างไรก็ตามหากความยาวที่เกี่ยวข้องมีขนาดเล็กถึงระดับโมเลกุลหรืออยู่ระดับนาโนสเกลแล้ว จำเป็นต้องพัฒนาวิธีการในการอธิบายพฤติกรรมของไหลที่ต่างไป (Bruss, 2008) แต่ก็ยังคงอยู่บนรากฐานของ governing principle ที่ใช้กับของไหลในระดับ microscale และ macroscale ได้เป็นอย่างดี

สำหรับปริมาตรของของไหลที่ใช้งานวิจัยนี้จะอยู่ในระดับไมโครลิตรซึ่งประมาณได้ว่า เป็นของไหลที่มีความต่อเนื่องในเนื้อของไหล

2.1.3 สมการเชิงอนุพันธ์มวล

สมการต่างๆ ในระบบสมการของไหลควรแสดงถึงความเป็นจริงทางกายภาพและเข้าใจได้ง่าย สมการแรกในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหลนี้ คือสมการอนุรักษ์มวล ซึ่งแสดงว่า

มวลในระบบที่พิจารณาไม่มีการสูญหายไป เมื่อพิจารณาการไหลผ่านปริมาตรเล็กๆ ขนาดกว้าง dx ยาว dy สูง dz อยู่ที่ตำแหน่งหนึ่งในเนื้อสารดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 แสดงปริมาณฟลักซ์ของมวลที่ไหลเข้าและออกจากปริมาตร $dxdydz$

ตลอดพื้นที่ด้านซ้ายลูกบาศก์ ฟลักซ์ของมวลที่ไหลเข้ารอบทางด้านซ้ายมีค่าเท่ากับ $[\rho v]dxdz$ เนื่องจากทั้งความหนาแน่นและความเร็วในทิศ x และ z เปลี่ยนแปลงไปตลอด โดยกำหนดเป็นฟังก์ชันของระยะทางตามแนวแกน y ซึ่งสามารถเขียนฟลักซ์ของมวลได้ในรูปของอนุพันธ์แสดงในรูปที่ 2.2 ดังนั้นปริมาณ ฟลักซ์ของมวลที่ไหลออกทางด้านขวา ของกรอบคือ $[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy]dxdz$ ปริมาณมวลที่เพิ่มขึ้นในทิศแกน x ผ่านพื้นที่ $dydz$ ในการไหลนี้ เขียนได้ตามสมการ (2.10 ก) ทำนองเดียวกันกับมวลที่ไหลผ่านกรอบในระนาบ y และ z ไปทางแกน x ที่มีฟลักซ์ไหลเข้าและออกในทิศแกน y และ z จะเขียนได้ในรูปแบบเช่นเดียวกัน

$$[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx]dydz - \rho u dydz = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dxdydz \quad (2.10 ก)$$

$$[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy]dzdx - \rho v dzdx = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dxdydz \quad (2.10 ข)$$

$$[\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz]dxdy - \rho w dxdy = \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dxdydz \quad (2.10 ค)$$

จากรูปที่ 2.2 ในทิศทางตามแนวแกนหนึ่งๆ จะมีอัตราการเปลี่ยนแปลงของมวลที่ลดลงไป หรือปริมาณ ฟลักซ์ของมวลที่ลดลงไปคือ $-\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz$ เมื่อมวลไม่สามารถสูญหายออกจาก

ระบบดั่งนั้นปริมาณฟลักซ์ที่เข้าและออกจากปริมาตร $dx dy dz$ จะต้องเท่ากันเสมอ ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้โดยใช้ divergence theorem ดังนั้นจะได้ว่า

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy dz dx + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz dx dy = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \quad (2.11)$$

หารสมการนี้ตลอดด้วย $dx dy dz$ จะได้

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.12)$$

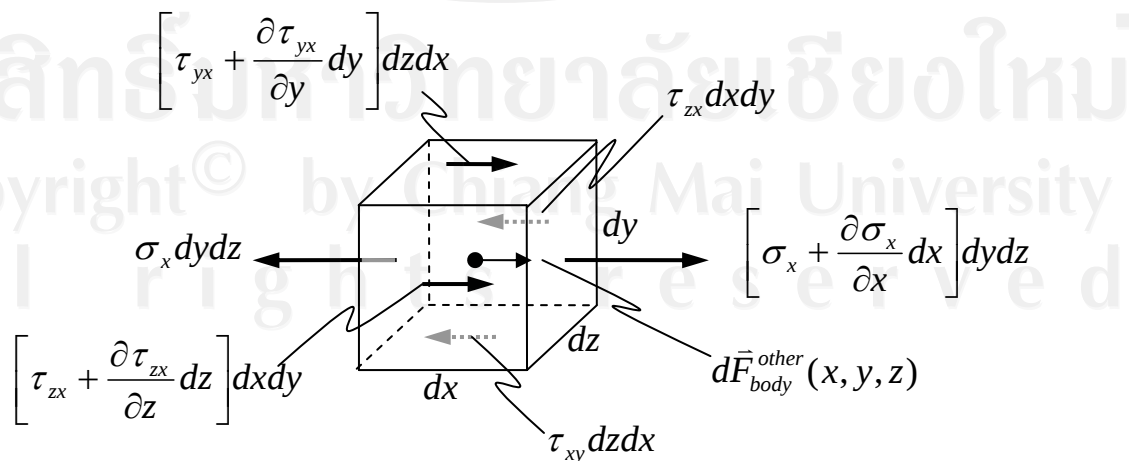
หรือเขียนในรูปเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.13)$$

ซึ่งเป็นสมการอนุรักษ์มวลที่เป็นสมการพื้นฐานของความเป็นจริงสมการแรกในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหล โดยบ่งบอกว่ามวลนั้นไม่มีการสูญหายไป ซึ่งจะประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่า 4 ตัว คือ ρ, u, v, w ต่างเปลี่ยนแปลงไปได้ตลอดการไหล สมการเชิงอนุพันธ์มวลสมการเดียวจึงไม่สามารถใช้แก้ปัญหา และ อธิบายการไหลได้ครบถ้วนจึง จำเป็นต้องมีสมการของพฤติกรรมทางฟิสิกส์อื่นเข้ามาเกี่ยวข้องอีก

2.1.4 สมการอนุรักษ์โมเมนตัม

จากกฎข้อที่สองของนิวตันที่ว่า แรงเท่ากับมวลคูณอัตราเร่งดั่งนั้น เมื่อเราพิจารณาแรงที่กระทำกับก้อนของไหลปริมาตร $dx dy dz$ จะพบว่าแรงทั้งหมดที่กระทำกับก้อนของไหล จะประกอบไปด้วยแรงเค้นตึงจาก แรงเค้นเฉือน และแรงอื่นๆที่กระทำกับปริมาตรก้อนของไหล ดังรูปที่ 2.3 สำหรับความเค้นเฉือน τ_{ij} คือ สมาชิกของ Tensor ความเค้นเฉือน ซึ่งสร้างจากองค์ประกอบของพื้นที่ที่แรงเค้นกระทำ โดย j คือทิศทางของแรงเค้น และ i คือทิศทางซึ่งตั้งฉากกับทิศที่ถูกแรงเค้นกระทำ



รูปที่ 2.3 แรงกระทำที่ผิว ($d\vec{F}_{surface}$) และแรงที่กระทำกับก้อนของไหลปริมาตร $dx dy dz$ ทั้งก้อน

$(d\vec{F}_{body}^{other})$ เฉพาะแนวแกน x

เมื่อพิจารณาที่ตำแหน่ง (x, y, z) มีแรงกระทำผิวที่แกน x ดังต่อไปนี้

บนระนาบ $y-z$ แรงกระทำสุทธิเนื่องจากความเค้นตึงฉากในทิศ $+x$

$$\left[\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right] dydz - \sigma_x dydz = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dydz \quad (2.14)$$

บนระนาบ $z-x$ แรงกระทำสุทธิเนื่องจากความเค้นตึงฉากในทิศ $+x$

$$\left[\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right] dzdx - \tau_{yx} dzdx = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy dzdx \quad (2.15)$$

บนระนาบ $y-x$ แรงกระทำสุทธิเนื่องจากความเค้นตึงฉากในทิศ $+x$

$$\left[\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right] dxdy - \tau_{zx} dxdy = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz dxdy \quad (2.16)$$

แรงอื่นๆที่กระทำกับก้อนของเหลวที่จุดศูนย์กลางมวลในปริมาตร $dxdydz$ คือ $d\vec{F}_{body}^{other}$

จาก (2.1) $\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$

$$\frac{d\vec{V}(x, y, z, t)}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad (2.17)$$

ดังนั้น ความเร่งตามแนวทิศทั้งสาม ที่เขียนในรูปสมการเชิงสเกลาร์จะเขียนได้ดังนี้

$$a_x = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.18 ก)$$

$$a_y = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2.18 ข)$$

$$a_z = u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \quad (2.18 ค)$$

จากกฎของนิวตัน เมื่อรวมแรงในทิศ x

$$dF_{surface}|_x + dF_{surface}|_x = dp_x = \frac{d}{dt}(\rho dxdydz V_x) \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dxdydz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dydzdx + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dzdxdy + dF_{body}^{other}|_x \quad (2.20)$$

$$= dxdydz \left(u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} + w \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_{body}^{other}|_x = \left(u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} + w \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} \right) \quad (2.21 ก)$$

เมื่อ $\vec{f}_{body}^{other}$ คือแรงอื่นๆที่กระทำต่อก้อนปริมาตรของไหล

ทำนองเดียวกัน

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_{body}^{other} \Big|_y = \left(u \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + w \frac{\partial(\rho v)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} \right) \quad (2.21 \text{ ข})$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + f_{body}^{other} \Big|_z = \left(u \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho w)}{\partial y} + w \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} \right) \quad (2.21 \text{ ค})$$

สมการ(2.21) แสดงถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมต่อปริมาตรของไหล ที่จะใช้ได้เมื่อทราบรายละเอียดของความเค้นที่เกิดขึ้นในของไหล ดังนั้นจึงสามารถจำแนกปัญหาตามการไหลเป็นสองประเภท คือ การไหลที่ไม่มีผลของความหนืด (inviscid flow) ซึ่งเป็นการไหลแบบอุดมคติ ไม่มีการหมุนวน (irrotational) ส่วนการไหลที่มีผลของความหนืด (viscous flow) ซึ่งเป็นผลจากการเฉือนหนืด (viscous shearing)

2.1.4.1 การไหลที่ไม่มีผลของความหนืด

ในของไหลบางชนิด เช่น น้ำ และอากาศในระบบที่มีปริมาตรขนาดใหญ่ ของไหลเหล่านี้มีความหนืดน้อยมากเมื่อเทียบกับปริมาตรของไหล จึงสามารถประมาณหรือสมมติได้ว่าของไหลดังกล่าวไม่มีผลของความหนืด (inviscid, nonviscous หรือ frictionless) จึงสมมติว่าความเค้นเฉือนในของไหลเป็นศูนย์ ความเค้นดังกล่าวในของไหลไม่ขึ้นกับทิศทาง และขนาดความเค้นนี้คือความเค้นกดหรือความดันนั่นเอง (มนตรี, 2553) กล่าวคือ

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + f_{body}^{other} \Big|_x = \left(u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} + w \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} \right) \quad (2.22 \text{ ก})$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + f_{body}^{other} \Big|_y = \left(u \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + w \frac{\partial(\rho v)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} \right) \quad (2.22 \text{ ข})$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + f_{body}^{other} \Big|_z = \left(u \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho w)}{\partial y} + w \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} \right) \quad (2.22 \text{ ค})$$

สมการ (2.22) เรียกว่า สมการการเคลื่อนที่ของออยเลอร์ เขียนในรูปของเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$-\vec{\nabla} p + \vec{f}_{body}^{other} = \left(\vec{\nabla}(\rho \vec{V}) \cdot \vec{V} + \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} \right) \quad (2.22 \text{ ง})$$

2.1.4.2 การไหลที่มีผลของความหนืด

ในที่นี้จะกล่าวถึงการไหลในท่อขนาดเล็กเท่านั้น ซึ่งมีเลขเรย์โนลด์ (Reynolds number) ต่ำกว่า 2100 ซึ่งความหมายของเลขเรย์โนลด์ดูที่หัวข้อ 2.3.1 เมื่อเลขเรย์โนลด์ต่ำกว่า 2100 แรงหนืดจะส่งผลให้ของไหล เกิดการหมุนวน (vorticity) หรือ $\vec{\nabla} \times \vec{V} \neq 0$ โดยการไหลชนิดนี้มักเกิดขึ้นกับการไหลในท่อไมโครฟลูอิดิกส์ เสมอ และเมื่อประมาณให้ เป็นของไหลนิวโทเนียน ที่ ความเค้นเฉือนในของไหลมีความสัมพันธ์เชิงเส้นกับอัตราการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเชิงมุม และความเค้นตึงฉากจะขึ้นกับความดัน ไคเวอร์เจนต์ และเกรเดียนต์ ของความเร็ว ดังนั้นตัวความเค้นเฉือนและความเค้นตึงฉากจะนิยามได้ดังนี้ (มนตรี, 2553)

$$\sigma_i = -p - \frac{2}{3}\eta \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + 2\eta \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \quad (2.23)$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} = \eta \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.24)$$

เมื่อในที่นี้ i, j คือดัชนีกำกับของแกน x, y, z และ $V_1 = V_x = u, V_2 = V_y = v, V_3 = V_z = w$ และ η คือความหนืด (viscosity)

เมื่อแทนความเค้นดังกล่าวในสมการ (2.23) และ (2.24) ตามแนวแกน x จะได้ว่า

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{2}{3}\eta \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \\ + f_{body}^{other} \Big|_x = \left(u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} + w \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

จัดรูปและทำเช่นเดียวกันกับแกน y และ z สมการสำหรับของไหลที่มีความหนืดจะเขียนได้ดังสมการ (2.26)

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(-\frac{2}{3}\eta \frac{\partial}{\partial x} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \right) + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ + f_{body}^{other} \Big|_x = \left(u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} + w \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (2.26 ก)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial y} + \left(-\frac{2}{3}\eta \frac{\partial}{\partial y} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \right) + \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \eta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ + f_{body}^{other} \Big|_y = \left(u \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + w \frac{\partial(\rho v)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (2.26 ข)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial p}{\partial z} + \left(-\frac{2}{3}\eta \frac{\partial}{\partial z} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \right) + \eta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \eta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
& + f_{body}^{other} \Big|_z = \left(u \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} + u \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} + u \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} \right)
\end{aligned}
\tag{2.26 ค}$$

ซึ่งสมการ 2.26 นี้เรียกว่า สมการของนาเวียร์-สโตกส์ในรูปแบบอนุพันธ์

ในระบบไมโครฟลูอิดิกส์ซึ่งประกอบด้วยของไหลที่ไหลใน ท่อขนาดไมครอน(micro channel) ของไหลที่ใช้ นั้นมีความเร็วน้อยกว่าเสียง แต่ยังคงมีอิทธิพลของความหนืด ดังนั้นจึงสามารถประมาณได้ว่าของไหลที่ใช้ในระบบ เป็นของไหลที่บีบอัดไม่ได้หรือยุบตัวไม่ได้ เมื่อพิจารณาสมการอนุพันธ์มวลโดย ให้ความหนาแน่นของของไหลมีค่าคงที่ จะได้ว่า $\vec{\nabla} V = 0$ ซึ่งจะ ทำให้ทางซ้ายของสมการ (2.26) พจน์ที่ 2 และ 4 มีค่าเท่ากับศูนย์ จะได้ว่า

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f_{body}^{other} \Big|_x = \left(u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} + w \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} \right)
\tag{2.27 ก}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + f_{body}^{other} \Big|_y = \left(u \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + w \frac{\partial(\rho v)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} \right)
\tag{2.27 ข}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + f_{body}^{other} \Big|_z = \left(u \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho w)}{\partial y} + w \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} \right)
\tag{2.27 ค}$$

หรือเขียนในรูปเวกเตอร์ได้ว่า

$$-\vec{\nabla} p + \eta \nabla^2 \vec{V} + \vec{f}_{body}^{other} = \left((\rho \vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} + \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} \right)
\tag{2.28}$$

2.1.5 สมการเชิงอนุพันธ์พลังงาน

เมื่อพิจารณาว่าระบบของไหลเป็นระบบอนุพันธ์ จะสามารถสร้างสมการที่มีเงื่อนไข สอดคล้อง กับสมการของ นาเวียร์-สโตกส์ เพื่อช่วยหาคำตอบของสมการ และอธิบายระบบ การไหลของของไหลได้อีกสมการหนึ่ง ซึ่งอยู่บนพื้นฐานความจริงที่ว่าฟลักซ์ของพลังงาน หรือกำลัง ที่ผ่านเข้าและออกจากปริมาตรของไหลจะมีค่าเท่ากันเสมอ

Diagram illustrating a control volume (a small cube) with dimensions dx , dy , and dz . The forces and fluxes acting on the control volume are:

- Surface Forces (Stresses):**
 - Top face: $u\tau_{zx} dx dy$
 - Bottom face: $u\tau_{yx} dz dx$
 - Left face: $u\sigma_x dy dz$
 - Right face: $\left[u\sigma_x + \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} dx \right] dy dz$
 - Front face: $\left[q_x + \frac{\partial(q_x)}{\partial x} dx \right] dz dy$
 - Back face: $\left[u\tau_{zx} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} dz \right] dx dy$
- Body Forces:**
 - Volume force: $q dz dy$
 - Other work/energy flux: $\frac{dW^{other}}{dt_{body}} (x, y, z)$

รูปที่ 2.4 แสดงพลักร์ของพลังงานในทศแกน x ที่ไหลผ่านก้อนมวลซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหล
ณ เวลาหนึ่ง

สมการเชิงอนุพันธ์พลังงานที่เกี่ยวข้องกับการไหลในระบบไมโครฟลูอิดิกส์จะสร้างขึ้นโดยอาศัย กฎข้อที่ หนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์ ซึ่งกล่าวว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวลจะเท่ากับปริมาณพลักซ์ความร้อนที่ให้แก่ก้อนมวลรวมกับอัตราของงานทั้งหมดที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่างจากก้อนมวลนั้น

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d\bar{Q}}{dt} + \frac{dW}{dt} \quad (2.29)$$

โดย $\bar{Q}$ เป็นปริมาณความร้อนที่ไหลเข้าและออกจากระบบ (สำหรับเครื่องหมายของ dW ที่ใช้เป็นบวกเพราะพิจารณาปริมาณงานที่ให้กับก้อนของไหล ซึ่งในบางตำราจะพิจารณางานที่ได้จากของไหลโดยที่ปริมาณงานในระบบจะมีเครื่องหมายเป็นลบ)

เมื่อพิจารณา $\frac{dW_{Fbody}}{dt}$ ซึ่งแทนอัตราของงานหรือกำลังที่เกิดขึ้นจากแรงต่างๆ ที่กระทำบนก้อนมวลนี้ เช่น แรงโน้มถ่วงหรือแรงจากสนามไฟฟ้าที่กระทำกับประจุไฟฟ้าที่อยู่ในของไหล ดังนั้น

$$\frac{dW_{Fbody}}{dt} = \rho(dx dy dz) \vec{a} \cdot \vec{V} \quad (2.30)$$

เมื่อ $\vec{a}$ คือความเร่งเนื่องจากผลของแรงทั้งหมดที่กระทำกับก้อนของไหล

จากรูปที่ 2.4 อัตราของงานที่เกิดจากความเค้นตั้งฉาก σ_x ที่กระทำบนพื้นที่หน้าตัด $dy dz$ ในทิศ x คือ

$$\left[u\sigma_x + \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} dx \right] dy dz - u\sigma_x dx dy dz = \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} dx dy dz \quad (2.31)$$

อัตราของงานที่เกิดจากความเค้นเฉือน τ_{yx} ที่กระทำบนด้าน $dz dx$ ในทิศ x คือ

$$\left[u\tau_{yx} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} dy \right] dz dx - u\tau_{yx} dz dx = \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} dy dz dx \quad (2.32)$$

และอัตราของงานที่เกิดจากความเค้นเฉือน τ_{zx} ที่กระทำบนพื้นที่หน้าตัด $dx dy$ ในทิศ x คือ

$$\left[u\tau_{zx} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} dz \right] dx dy - u\tau_{zx} dx dy = \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} dz dx dy \quad (2.33)$$

ในทำนองเดียวกัน อัตราของงานที่เกิดขึ้นจากแรงต่างๆ ในทิศ y และ z ก่อให้เกิดอัตราของงานทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากแรงต่างๆ ในก้อนมวลขนาด $dx dy dz$ นี้

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} = & \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} dy dz dx + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} dz dx dy \\ & + \frac{\partial(v\sigma_y)}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} dz dx dy \\ & + \frac{\partial(w\sigma_z)}{\partial z} dz dx dy + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} dy dz dx \\ & + \rho(dx dy dz) \vec{a} \cdot \vec{V} \end{aligned} \quad (2.34)$$

สำหรับพจน์ $\frac{d\bar{Q}}{dt}$ ซึ่งแทนปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ให้กับก้อนมวลนั้นจะประกอบด้วย 2

ส่วนคือปริมาณความร้อนที่เกิดขึ้นบนปริมาตรของก้อนมวลเช่นปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ผลิตขึ้นเองได้ในก้อนมวลนั้น เมื่อกำหนดให้ $\bar{Q}$ แทนปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่เกิดขึ้นต่อมวลหนึ่งหน่วย

ดังนั้นปริมาณฟลักซ์ที่เกิดขึ้นบนก้อนมวลก้อนนี้คือ $\rho \bar{Q}(dxdydz)$ จากรูปที่ (2.4) ปริมาณความร้อนสุทธิที่ผ่านเข้าออกในแต่ละทิศคือ

$$[\bar{Q}_x - (\bar{Q}_x + \bar{Q}_x dx)]dydz = -\frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial x} dxdydz \quad (2.35 ก)$$

$$\left[\bar{Q}_y - \left(\bar{Q}_y + \frac{\partial \bar{Q}_y}{\partial y} dy \right) \right] dzdx = -\frac{\partial \bar{Q}_y}{\partial y} dydzdx \quad (2.35 ข)$$

$$\left[\bar{Q}_z - \left(\bar{Q}_z + \frac{\partial \bar{Q}_z}{\partial z} dz \right) \right] dxdy = -\frac{\partial \bar{Q}_z}{\partial z} dzdxdy \quad (2.35 ค)$$

จากกฎการนำความร้อนของฟูริเยร์ (Fourier law) ปริมาณฟลักซ์ความร้อน $\bar{Q}_x$, $\bar{Q}_y$ และ $\bar{Q}_z$ ขึ้นอยู่กับเกรเดียนต์ของอุณหภูมิดังนี้

$$\bar{Q}_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \bar{Q}_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{และ} \quad \bar{Q}_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.36)$$

โดย k แทนสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (thermal conductivity) ของของไหล ดังนั้นพจน์ของ

$\frac{dQ}{dt}$ จึงกลายเป็น

$$\frac{dQ}{dt} = \left[\rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dxdydz \quad (2.37)$$

ส่วนอัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานในก้อนของไหลนั้นจะประกอบด้วยพลังงานภายใน (internal energy) ซึ่งเกิดจากการเคลื่อนไหวของโมเลกุลในปริมาตรของเหลวนั้น และพลังงานจลน์ (kinetic energy) ซึ่งเกิดขึ้นเนื่องจากของไหลนั้นเกิดการไหล ส่วนพลังงานศักย์โน้มถ่วงในที่นี้จะไม่นำมาพิจารณา เพราะพลังงานศักย์นี้สามารถพิจารณาพลังงานให้เท่ากับศูนย์ที่จุดอ้างอิงใดๆ ได้ และมีผลน้อยเมื่อเทียบกับศักย์ชนิดอื่นในการไหลของของไหลในท่อ ยกเว้นว่าเป็นการไหลของของไหลที่ไหลขนานกับทิศของแรงโน้มถ่วง หาก U แทนพลังงานภายในต่อมวลของของไหล และ $\frac{1}{2}V^2$ คือพลังงานจลน์ต่อมวลของไหล แล้วพลังงานรวม H คือ $(U + \frac{1}{2}V^2)$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \rho \left(U + \frac{1}{2}V^2 \right) dxdydz \quad (2.38)$$

เมื่อแทนพจน์ต่างๆ ลงในสมการ (2.38) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho \left(U + \frac{1}{2} V^2 \right) = & \left[\rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \\ & + \left[\frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} \right. \\ & + \frac{\partial(v\sigma_y)}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} \\ & \left. + \frac{\partial(w\sigma_z)}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} \right] + \rho(dx dy dz) \vec{a} \cdot \vec{V} \end{aligned} \quad (2.39)$$

พจน์ทางซ้ายของสมการ(2.39)นี้ อยู่ในรูปอนุพันธ์รวม ซึ่งไม่สามารถแยกพิจารณาองค์ประกอบแต่ละความเร็ว และพลักซ์ของพลังงานในทิศทางต่างๆได้ เพื่อประโยชน์ในการแก้สมการหรือหาคำตอบจึงจำเป็นต้องเขียนสมการนี้ให้อยู่ในรูปค่าอนุพันธ์ย่อย

จาก $H = U + \frac{1}{2} V^2$ ดังนั้น $H(x, y, z, t)$ จะสามารถเขียน $\frac{dH(x, y, z, t)}{dt}$ ซึ่งเป็น total derivative และสามารถกระจายให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ย่อยและอนุพันธ์ธรรมดาในแกนต่างๆดังนี้

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial H}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} = u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} + w \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial t} = \vec{\nabla}(H\vec{V}) + \frac{\partial H}{\partial t} \quad (2.40)$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(U + \frac{1}{2} V^2 \right) \right] + \vec{\nabla} \cdot \left[\left[\rho \left(U + \frac{1}{2} V^2 \right) \right] \vec{V} \right] = & \left[\rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \\ & + \left[\frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} \right. \\ & + \frac{\partial(v\sigma_y)}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} \\ & \left. + \frac{\partial(w\sigma_z)}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} \right] + \rho(dx dy dz) \vec{a} \cdot \vec{V} \end{aligned} \quad (2.41)$$

2.1.6 ระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์

จากสมการอนุรักษ์ทั้งสามสมการคือ(2.13) (2.28) และ (2.41) ก่อให้เกิดระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยซึ่งสามารถสรุปได้ดังต่อไปนี้

สมการเชิงอนุรักษ์มวล

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

สมการเชิงอนุพันธ์โมเมนตัม

$$\begin{aligned}
 \left(u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} + w \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(-\frac{2}{3} \eta \frac{\partial}{\partial x} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \right) \\
 + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + f_{body}^{other} \Big|_x \\
 \left(u \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + w \frac{\partial(\rho v)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \left(-\frac{2}{3} \eta \frac{\partial}{\partial y} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \right) \\
 + \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \eta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + f_{body}^{other} \Big|_y \\
 \left(u \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho w)}{\partial y} + w \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \left(-\frac{2}{3} \eta \frac{\partial}{\partial z} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \right) \\
 + \eta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \eta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + f_{body}^{other} \Big|_z
 \end{aligned}$$

สมการเชิงอนุพันธ์พลังงาน

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(U + \frac{1}{2} V^2 \right) \right] + \vec{\nabla} \cdot \left(\left[\rho \left(U + \frac{1}{2} V^2 \right) \right] \vec{V} \right) &= \left[\rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \\
 + \left[\frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} \right. \\
 + \left[\frac{\partial(v\sigma_y)}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} \right. \\
 + \left. \left. \frac{\partial(w\sigma_z)}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} \right] \right] + \rho(dx dy dz) \vec{a} \cdot \vec{V}
 \end{aligned}$$

รูปแบบของสมการทั้งสามจะมีลักษณะคล้ายคลึงกัน เมื่อจับตาดูปริมาตรของไหลที่มีขนาด $dx dy dz$ ซึ่งตรึงอยู่กับที่ในบริเวณใดๆ ในของไหล หากพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยทั้งสาม

สมการนี้ จะพบว่าแต่ละสมการมีพจน์ที่เกี่ยวกับไดเวอร์เจนซ์ของปริมาณฟลักซ์ [กล่าวคือ $\vec{\nabla} \cdot (\text{ปริมาณฟลักซ์})$] อยู่เสมอ

สมการเชิงอนุพันธ์มวล

$$\rho \vec{V}$$

แสดงถึงฟลักซ์ของมวล

สมการเชิงอนุพันธ์โมเมนตัม

$$\rho u \vec{V}, \rho v \vec{V}, \rho w \vec{V}$$

แสดงถึงฟลักซ์ของโมเมนตัม

สมการเชิงอนุพันธ์พลังงาน

$$\left[\rho \left(U + \frac{1}{2} V^2 \right) \right] \vec{V}$$

แสดงถึงฟลักซ์ของพลังงาน

นอกจากนี้ สมการทั้งสามสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบเดียวกัน กล่าวคือ

$$\frac{\partial \{A\}}{\partial t} + \frac{\partial \{B\}}{\partial x} + \frac{\partial \{C\}}{\partial y} + \frac{\partial \{D\}}{\partial z} = \{E\} \quad (2.42)$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
\{A\} &= \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho \left(U + \frac{V^2}{2} \right) \end{Bmatrix}, \\
\{B\} &= \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \sigma'_x \\ \rho vu - \tau_{xy} \\ \rho wu - \tau_{xz} \\ \rho \left(U + \frac{V^2}{2} \right) u + pu - k \frac{\partial T}{\partial x} - u \sigma_x - v \tau_{xy} - w \tau_{xz} \end{Bmatrix} \\
\{C\} &= \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p - \sigma_y \\ \rho wv - \tau_{zy} \\ \rho \left(U + \frac{V^2}{2} \right) v + pv - k \frac{\partial T}{\partial y} - u \tau_{yz} - v \sigma_x - w \tau_{yz} \end{Bmatrix} \\
\{D\} &= \begin{Bmatrix} \rho w \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ \rho w^2 + p - \sigma_z \\ \rho \left(U + \frac{V^2}{2} \right) w + pw - k \frac{\partial T}{\partial z} - u \tau_{zx} - v \tau_{zy} - w \sigma_z \end{Bmatrix} \\
\{E\} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ f_{body}^{other} \Big|_x \\ f_{body}^{other} \Big|_y \\ f_{body}^{other} \Big|_z \\ \left(u f_{body}^{other} \Big|_x + v f_{body}^{other} \Big|_y + w f_{body}^{other} \Big|_z \right) + \rho \bar{Q} \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

ซึ่ง f_{body}^{other} คือแรงทั้งหมดที่กระทำกับปริมาตรของเหลวนขนาด $dxdydz$

ในที่นี้ $\sigma'_x = \sigma_x - p$ เพื่อแสดงให้เห็นถึงพจน์ความดันที่ซ่อนอยู่ใน σ_x ซึ่งเป็นความเค้นตั้งฉาก

การเขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์นี้จะมีประโยชน์สำหรับใช้คำนวณด้วยระเบียบวิธีทางตัวเลข

ต่อไปซึ่งจะทำให้การประดิษฐ์สมการต่างๆง่ายขึ้น และสามารถตรวจสอบความถูกต้อง

สอดคล้องของคำตอบจากปัญหาการไหล ซึ่งต้องสอดคล้องกับทั้งสามสมการหลักนี้ (ปราโมทย์,

2.2 ของไหลในสมดุล

ก่อนที่จะพิจารณาการเคลื่อนที่ของของไหล ควรพิจารณาถึงธรรมชาติโดยปกติของของไหลเป็นเบื้องต้นก่อน โดยธรรมชาติแล้วของไหลที่ไม่มีแรงภายนอกกระทำและอยู่ในภาชนะจะอยู่ในสมดุล โดยของไหลที่อยู่ในสมดุลจะอยู่นิ่งเทียบกับผนังภาชนะที่ใส่ของไหลนั้น เพราะของไหลจะสูญเสียพลังงานจนออกไปจากระบบอย่างต่อเนื่อง ในรูปความร้อนจากการเสียดทานภายในซึ่งเกิดจากแรงหนืดที่เป็นสมบัติของของไหลภายในปริมาตรของเหลวนั้น ดังนั้นที่สถานะสมดุลนี้ สนามความเร็ว ณ จุดใดๆ ในของไหลจะมีค่า เป็นศูนย์ ($\vec{V}(r, t) = 0$) ทั้งหมด (แต่สำหรับกรณีของไหลไหลในสภาวะสมดุลการไหลอัตราการเปลี่ยนแปลงสนามความเร็วในของไหลจะเป็นศูนย์ กล่าวคือ $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$) หาก $\vec{f}_{body}^{other}$ คือแรงโน้มถ่วงมีทิศทาง $-\hat{z}$ และ $\vec{V}(x, y, z) = 0$ ดังนั้นสมการนาเวียร์-สโตกส์ ของระบบนี้คือ

$$-\nabla p - \rho g \hat{z} = 0 \quad (2.42)$$

เมื่ออินทิเกรต (2.42) จะได้ว่า $p(z) = p^* + \rho g z$ (2.43)

เมื่อกำหนดให้ p^* เป็นความดันใดๆ ที่ระดับความสูง $z = 0$ แล้วจะสามารถกำหนดความดันซึ่งขึ้นกับค่าความสูง z เป็น ความดันสถิตของของไหล (hydrostatic pressure)

ประโยชน์ของความดันที่ขึ้นกับความสูงนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้เป็นระบบจ่ายของไหลโดยผลต่างความดัน และระบบวัด ซึ่งใช้ในงานวิจัยนี้

2.3 การไหลของของไหลในท่อไมโครฟลูอิดิกส์

สมการนาเวียร์-สโตกส์ นั้นมีความยากลำบากในการแก้เพื่อได้ผลเฉลยที่แท้จริง เนื่องจากสมการนี้เป็น สมการอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น (non-linear differential equation) แต่อย่างไรก็ตามในบางสถานการณ์ก็สามารถแก้สมการนี้ได้บ้างเงื่อนไขได้เช่น ของไหลเป็นของไหลบีบอัดไม่ได้ เช่น น้ำ หรือสารละลาย หรือของไหลที่ไหลด้วยความเร็วน้อยกว่าเสียงมากๆ และพิจารณาการไหลเพียงที่ระบบอยู่ในสภาวะสมดุล (steady state) ผนังท่อไม่มีการเคลื่อนที่ ของไหลบริเวณผนังหรือขอบเขตการไหลมีความเร็วเป็นศูนย์ และไม่มีการไหลไปกับผนังท่อ (non-slip flow) ซึ่งต้นกำเนิดของเงื่อนไขนี้มาจากข้อสมมติที่ว่า โมเลกุลของไหลด้านนอกสุดมีการถ่ายเทโมเมนตัมให้กับผนังได้ทั้งหมด ซึ่งการถ่ายเทโมเมนตัมของของไหลที่มีความหนาแน่นสูงเช่นของเหลวนี้อยู่ในระดับค่าเฉลี่ยระยะอิสระของโมเลกุล (mean free path) ซึ่งประมาณ 0.3 นาโนเมตร (Bruss, 2008) ในบทนี้จะแสดงวิธีการประมาณและการแก้สมการนาเวียร์-สโตกส์ ที่ สภาวะคงตัว ซึ่งไม่มีการเปลี่ยนแปลงสนามความเร็วภายในของไหล หรือ ที่สถานะ $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$

2.3.1 การไหลแบบราบเรียบ และเลขเรย์โนลด์

การไหลในระบบของไหลในท่อไมโครฟลูอิดิกส์โดยส่วนใหญ่จะเป็นการไหลแบบราบเรียบ (laminar flow) ซึ่งมีเส้นกระแสขนานกัน (parallel streamline) และมีเลขเรย์โนลด์ (Re) ที่มีค่า $Re < 2100$ โดยเลขเรย์โนลด์จะเป็นปริมาณที่ไร้หน่วย (dimensionless) ซึ่งใช้ในการหาขอบเขตการไหลหรือแยกแยะระหว่างการไหลแบบปั่นป่วน (turbulent flow) ซึ่งมี $Re > 3000$ ส่วนช่วงระหว่างขอบเขตทั้งสองจะเป็นช่วงที่มีการไหลทั้งสองแบบผสมกันหรือช่วงเปลี่ยนรูปแบบการไหล (transition region) ที่มาของตัวเลขนี้นั้นมาจากการทดลอง แต่สามารถพิจารณาเงื่อนไขดังกล่าวได้จากการพิจารณาการทำสมการนาเวียร์-สโตกส์ให้เป็นสมการไร้หน่วย

เมื่อพิจารณาถึงสมการนาเวียร์-สโตกส์ ปรากฏการณ์การไหลที่สวามิภักดิ์และน่าประหลาดใจ มักมาจากพจน์ไม่เชิงเส้น $\rho(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$ เกือบทั้งสิ้น ซึ่งก่อให้เกิดความซับซ้อนทางคณิตศาสตร์ที่ใช้แก้สมการ นาเวียร์-สโตกส์ตามมาด้วย แต่กระนั้นก็ตามในเงื่อนไขของการไหลความเร็วต่ำเช่นในระบบไมโครฟลูอิดิกส์ พจน์ไม่เชิงเส้นนี้จะสามารถละทิ้งไปได้ โดยการวิเคราะห์ว่าจะสามารถละพจน์นี้ออกไปได้หรือไม่นั้นจะกระทำโดยการทำให้สมการนาเวียร์-สโตกส์ เป็นสมการไร้หน่วย การละพจน์ไม่เชิงเส้นนี้เอง ทำให้คำตอบที่แท้จริงของสมการสามารถหาได้

กำหนดให้ ตัวแปรทางกายภาพที่เช่น ความยาว L_0 ความเร็ว V_0 มีหน่วยใดๆ โดย $\tilde{r}$ และ $\tilde{V}$ เป็นตัวแปรไร้หน่วย เช่นตัวเลขธรรมดา และ $\tilde{r}$ กับ $\tilde{V}$ เป็นตัวแปรที่ใช้อธิบายระบบ

$$\tilde{r} = L_0 \tilde{r} \quad (2.44 \text{ ก})$$

$$\tilde{V} = V_0 \tilde{V} \quad (2.44 \text{ ข})$$

เมื่อความยาวและความเร็วได้ถูกกำหนดให้มีหน่วยใดหน่วยหนึ่งที่สอดคล้องกัน จากกฎของการสเกล (scaling law) จะได้ว่า

$$t = \frac{L_0}{V_0} \tilde{t} = T_0 \tilde{t} \quad (2.44 \text{ ค})$$

$$p = \frac{F_0}{A_0} \tilde{p} = \eta \frac{V_0}{L_0} \tilde{p} = \rho V_0^2 \tilde{p} \quad (2.44 \text{ ง})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{T_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \quad (2.44 \text{ จ})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{L_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \quad (2.44 \text{ ฉ})$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าตัวแปรต่างๆ เช่น p สามารถเขียนได้ในรูปแบบของหน่วยตัวแปรอื่นๆได้ หลายรูปแบบ ดังนั้นแทน (2.44) ในสมการนาเวียร์-สโตกส์ ของของไหลบีบอัดไม่ได้ ที่ไม่พิจารณาแรง

จากภายนอก $\vec{f}_{body}^{other} = 0$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{V} = \rho \left(\frac{V_0}{T_0} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + \frac{V_0^2}{L_0} (\tilde{V} \cdot \nabla) \tilde{V} \right) = -\frac{P_0}{L_0} \tilde{V} \tilde{p} + \eta \frac{V_0}{L_0^2} \nabla^2 \tilde{V} \quad (2.45)$$

$$\rho \frac{L_0}{T_0^2} \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + (\tilde{V} \cdot \nabla) \tilde{V} \right) = \eta \frac{V_0}{L_0^2} (-\tilde{V} \tilde{p} + \nabla^2 \tilde{V}) \quad (2.46)$$

$$\frac{\rho V_0 L_0}{\eta} \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + (\tilde{V} \cdot \nabla) \tilde{V} \right) = (-\tilde{V} \tilde{p} + \nabla^2 \tilde{V}) \quad (2.47)$$

จาก (2.47) จึงนิยาม

$$Re = \frac{\rho V_0 L_0}{\eta} \quad (2.48)$$

จาก (2.47) จะได้ว่าเมื่อ $Re \ll 1$ สมการทางฝั่งซ้ายซึ่งเป็นพจน์ที่เกี่ยวกับแรงเฉื่อย (inertia term) จะมีค่าน้อยจนตัดออกได้ เมื่อเทียบกับสมการทางฝั่งขวาซึ่งเป็นพจน์ที่เกี่ยวกับแรงหนืด (viscous term) หรือเมื่อพิจารณาหน่วยของ Re กล่าวได้ว่า Re เป็นอัตราส่วนระหว่างแรงเฉื่อยต่อแรงหนืด โดย V_0 คือความเร็วเฉลี่ยของไหล L_0 หรือ D_h คือเส้นผ่านศูนย์กลางไฮดรอลิก (hydraulic diameter)

โดย
$$L_0 = \frac{4A}{P} \quad (2.49)$$

เมื่อ A คือพื้นที่หน้าตัดของไหลไหลผ่านและ P คือเส้นรอบรูปที่เปียกของไหล (wet perimeter)

เมื่อพิจารณาระบบ ที่ สภาวะคงตัว $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$ สมการนาเวียร์-สโตกส์ จะลดรูปเป็นสมการที่เป็นเชิงเส้น ซึ่งคือ สมการของสโตกส์ (Stokes equation)

$$0 = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{V} \quad (2.50)$$

แต่หาก เงื่อนไขขอบเขตที่ห่อหุ้มปริมาตรของไหลมีการเปลี่ยนแปลงไปกับเวลา เช่นการไหลของไหลในปั๊มของเหลว หรือกระบอกฉีด เทอม $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ จะไม่สามารถละทิ้งได้โดยจะได้ว่า

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{V} \quad (2.51)$$

เนื่องจากรูปแบบที่เฉพาะ ของ สมการของสโตกส์ ทำให้สามารถแก้สมการนี้หาค่าความดันที่ตำแหน่งใดๆได้ โดยการนิยามการหมุนของเวกเตอร์ความเร็วในเนื้อของไหล (vortex)

$$\vec{\omega} \equiv \nabla \times \vec{V} \quad (2.52).$$

เมื่อใช้เงื่อนไขที่ว่า $\nabla \times \vec{V} = 0$ โดย กระทำ $\nabla \times$ ทั้งสองข้างของสมการ (2.50) ได้ว่า

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \vec{\omega} \quad (2.53)$$

และนำ $\vec{\nabla} \cdot$ กระทำกับ (2.50) เมื่อทั้งสองข้างของสมการต้องเป็นค่าคงที่จะได้ว่า

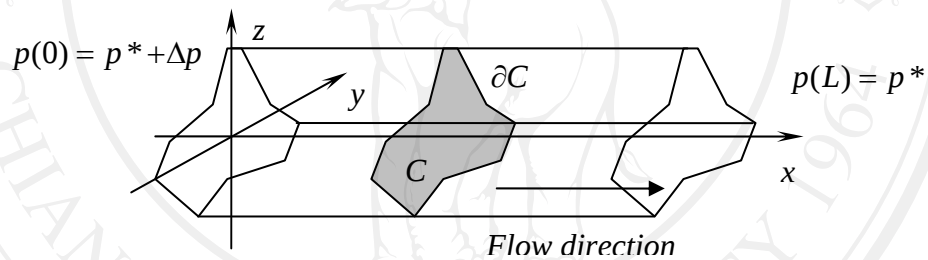
$$\vec{\nabla}^2 p = 0 \quad (2.54)$$

ซึ่งเป็นสมการลาปลาซ (Laplace equation) ใช้คำนวณหาความดันที่จุดใดๆ ในระบบได้จากเงื่อนไขขอบเขต

เนื่องจากการไหลในไมโครฟลูอิดิกส์ส่วนใหญ่เป็นการไหลแบบราบเรียบดังกล่าวแล้ว และยังเป็น Poiseuille flow ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อ Newtonian fluid ในระบบไหลคงที่หรือในสภาวะสมดุล (steady) โดยความดันจากภายนอก (pressure driven flow) ซึ่งมีสมบัติของแบบความเร็ว (velocity profile) เป็น parabolic โดยมีความเร็วสูงสุดที่จุดกึ่งกลางสุดของท่อ หรือหลอดการไหลโดยลักษณะของ สนามความเร็วจะขึ้นกับรูปร่างของขอบเขตท่อแต่ละแบบ

2.3.2 การไหลในท่อตรงที่มีพื้นที่หน้าตัดใดๆ

เมื่อพิจารณาการไหลที่สภาวะคงตัว (steady state flow) หรือการไหลแบบ Poiseuille flow ในท่อที่มีพื้นที่หน้าตัดใดๆ ดังรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 การไหลแบบ Poiseuille flow ของของไหลบีบอัดไม่ได้ในท่อตรงตามแนวแกน x ซึ่งมีพื้นที่หน้าตัดใดๆเป็น C (บริเวณแรงงา) และมีขอบเขตคือ ∂C ความยาว L ซึ่งทางปลายซ้ายของท่อมีความดันมากกว่าปลายด้านขวาด้วยความแตกต่าง Δp

จากรูปที่ 2.5 p เป็นความดันที่ตัดผลจากความดันสถิตย์ออกแล้ว เนื่องจากไม่มีความเร่งอื่นใดจากภายนอกมาเกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ไปตามแนวแกน x เหลือเพียงแรงดันกับแรงเค้นที่หักล้างกัน ทำให้ความเร่งของของไหลตามแนวแกน x เป็นศูนย์ นั่นคือความเร็วในแนวแกน x จะไม่เปลี่ยนแปลงไปกับตำแหน่งของ x (translation invariant) แต่ไม่เป็นศูนย์ หรือความเร็วของของไหลจะเป็นอิสระกับ x และสนามความเร็วในระนาบ y, z ถูกบังคับด้วยขอบเขตของท่อจึงต้องมีขนาดเป็นศูนย์ ดังนั้นรูปแบบความเร็วของของไหลที่เป็นไปได้คือ $\vec{V}(\vec{r}) = u(y, z)\hat{x}$ ซึ่งรูปแบบการไหลที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงความเร็วเช่นนี้จะเกิดขึ้น กับของไหลที่มีความเร็วต่ำๆ เท่านั้น เมื่อของไหลมีความเร็วเพิ่มขึ้นอย่างทันทีทันใดหรือที่มีความเร็วสูงๆ จะเกิดสูญเสียสมมาตรของการ

เคลื่อนที่นี้ไป (broken symmetry of translation invariant) เนื่องจาก $\vec{V}(\vec{r}) = u(y, z)\hat{x}$ เป็นฟังก์ชันของ y และ z ทำให้สมการนาเวียร์-สโตกส์ เหลือเพียง

$$0 = \eta \nabla^2 [u(y, z)\hat{x}] - \vec{\nabla} p \quad (2.55)$$

เมื่อ สนามความเร็วในแนวแกน y และ z เป็นศูนย์ การเปลี่ยนแปลงความดันในแนวแกน y และ z จึงถูกบังคับให้เป็นศูนย์ ดังนั้นจึงเหลือเพียงสมการนาเวียร์-สโตกส์ ในแนวแกน x เท่านั้น

$$\eta \nabla^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u(y, z) = \frac{\partial p(x)}{\partial x} \quad (2.56)$$

จาก (2.56) รูปแบบที่เป็นไปได้ของสมการนี้คือทั้งสองข้างของสมการต้องเป็นค่าคงที่เท่านั้น เมื่อ เกรเดียนท์ของความดันเป็นค่าคงที่ แสดงว่า ความดันจะเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ x และใช้เงื่อนไขขอบเขต จะได้ว่า

$$p(\vec{r}) = \frac{\Delta p}{L}(L - x) + p^* \quad (2.57)$$

จากเงื่อนไขขอบเขตที่ต้องสอดคล้องกับสมการอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง $\vec{V}(\vec{r}) = u(y, z)\hat{x}$ จะต้องเป็นไปได้สำหรับทุกค่าในโดเมน C ผนวกกับเงื่อนไขที่ของไหลจะไม่มีกรล้นไหลที่ผนังท่อหรือขอบเขต ∂C ซึ่งจะได้ว่า

$$\nabla^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u(y, z) = -\frac{\Delta p}{\eta L}, \text{ for } (y, z) \in C \quad (2.58)$$

$$u(y, z) = 0, \text{ for } (y, z) \in \partial C \quad (2.59)$$

เมื่อใช้เงื่อนไขดังกล่าวจะสามารถหาคำตอบของระบบสมการได้ และจากนั้น จะสามารถหาอัตราการไหลของปริมาตร Q และอัตราการไหลของมวล Q_{mass} ของของไหลได้ตามลำดับโดยการอินทิเกรตบนพื้นที่หน้าตัด C

$$Q = \int_C u(y, z) dydz \quad (2.60)$$

$$Q_{mass} = \int_C \rho u(y, z) dydz \quad (2.61)$$

จากสมการ (2.58) ซึ่งเป็นสมการปัวซองซึ่งสามารถใช้การกระจายไอเกนฟังก์ชันให้อยู่ในรูปผลรวมของฟังก์ชันฐานได้ โดยกระจายความเร็ว (Bruss, 2008)

$$|u\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n |\phi_n(y, z)\rangle \quad (2.62)$$

และพจน์ทางด้านขวาคือ

$$-\frac{\Delta p}{\eta L} = -\frac{\Delta p}{\eta L} \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n(y, z) | 1 \rangle |\phi_n(y, z)\rangle \quad (2.63)$$

แทนใน (2.58) พจน์ทางซ้ายซึ่งเป็น Laplacian operator มี eigenvalue k_n^2

$$\nabla^2 |u\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \nabla^2 |\phi_n(y, z)\rangle = a_n (-k_n^2) |\phi_n(y, z)\rangle \quad (2.64)$$

(2.63) แทนใน (2.64) แล้วดำเนินการด้วย $\langle \phi_m |$

$$\langle \phi_m(y, z) | a_n (-k_n^2) |\phi_n(y, z)\rangle = \langle \phi_m(y, z) | -\frac{\Delta p}{\eta L} \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n(y, z) | 1 \rangle |\phi_n(y, z)\rangle \quad (2.65)$$

$$a_n (-k_n^2) \delta_{mn} = -\frac{\Delta p}{\eta L} \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n(y, z) | 1 \rangle \delta_{mn} \quad (2.66)$$

$$\delta_{mn} = 1 \leftrightarrow m = n, \delta_{mn} = 0 \leftrightarrow m \neq n$$

$$a_m (-k_m^2) = -\frac{\Delta p}{\eta L} \langle \phi_m(y, z) | 1 \rangle \quad (2.67)$$

$$|u(y, z)\rangle = \frac{\Delta p}{\eta L} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\langle \phi_m(y, z) | 1 \rangle}{k_m^2} |\phi_m(y, z)\rangle \quad (2.68)$$

จาก (2.60)

$$Q = \int_C u(y, z) dy dz = \langle 1 | u(y, z) \rangle = \frac{\Delta p}{\eta L} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\langle \phi_m(y, z) | 1 \rangle \langle 1 | \phi_m(y, z) \rangle}{k_m^2} \quad (2.69)$$

เมื่อนิยาม $A_m = \langle \phi_m(y, z) | 1 \rangle \langle 1 | \phi_m(y, z) \rangle$ คือพื้นที่ยังผล (effective area) แล้วนิยาม hydrodynamic radius R_D โดยให้ P คือเส้นรอบรูปพื้นที่หน้าตัด ซึ่งตัวแปรทั้งสามตัวนี้จะขึ้นอยู่กับรูปร่างของปัญหา และเมื่อพิจารณาสเกลความยาวของทั้งสอง กับพื้นที่หน้าตัด A แล้ว จะนิยามว่า

$$R_D \equiv \frac{2A}{P} \quad (2.70)$$

จาก (2.58) หรือ (2.64) เมื่อ k_n^2 มิติคือส่วนกลับของความยาวกำลังสอง เพื่อปรับให้ผลรวมเทอมสุดท้ายไม่มีหน่วยเพื่อหาค่าประมาณผลรวมในสมการ (2.69) ทางด้านขวา จะได้ว่า

$$Q = \frac{\Delta p}{\eta L} R_D^2 A \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(k_m^2 R_D^2)} \frac{A_m}{A} = \frac{\Delta p}{2\eta L} \frac{A^3}{P^2} \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma} \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8}{(k_m^2 R_D^2)} \frac{A_m}{A} \approx 1 \quad (2.71)$$

$$Q \approx \frac{\Delta p}{2\eta L} \frac{A^3}{P^2} \quad (2.72)$$

ดังนั้นเมื่อการไหลที่เป็นแบบ Poiseuille flow ในท่อที่มีพื้นที่หน้าตัดใดๆ เมื่อพารามิเตอร์ต่างๆคงที่ จะนิยามค่าความนำการไหล (hydrodynamic conductance: G_{hyd}) และความต้านทานการไหล (hydrodynamic resistance: R_{hyd}) ได้ดังนี้

$$Q = G_{hyd} \Delta p = \frac{\Delta p}{R_{hyd}} \quad (2.73)$$

พารามิเตอร์ทั้งสองนี้ มีประโยชน์ในการคำนวณ อัตราการไหลในท่อ เมื่อความดันคงที่ หรือคำนวณ ความดันที่ลดลงจากปลายหนึ่งของท่อไปยังอีกปลายหนึ่งของท่อ (pressure drop) จากแหล่งจ่ายความดัน หรือผลต่างความดันระหว่างท่อ ที่เกิดขึ้นในการควบคุมปริมาตร บนไมโคร

ฟลูอิดิกชิป เช่นการควบคุมปริมาณการผสมสารโดยใช้วาล์วลม (pneumatic valves) ดังการใช้งานที่ปรากฏในงานตีพิมพ์ทบทวนเอกสารของ Melin and Quake (2007) นอกจากนี้ยังใช้ในการคำนวณการไหลในระหว่างการเปลี่ยนแปลงเริ่มต้นสำหรับการประยุกต์ใช้ ไมโครฟลูอิดิกส์ในการจำยาสำหรับผู้ป่วยเพื่อให้ได้ปริมาตรที่แม่นยำ (Vedel, 2009) การควบคุมปริมาตรและความดันของไหลในหยดของไหลขนาดเล็ก (droplet) เพื่อใช้เป็นหลอดทดลองขนาดเล็ก (micro reactor) เช่นการประยุกต์ใช้ droplet เป็นหลอดทดลองขนาดเล็กในงานของ Günther *et. al.* (2004) ฯลฯ

2.3.3 การไหลในท่อตรงที่มีพื้นที่หน้าตัดสี่เหลี่ยม

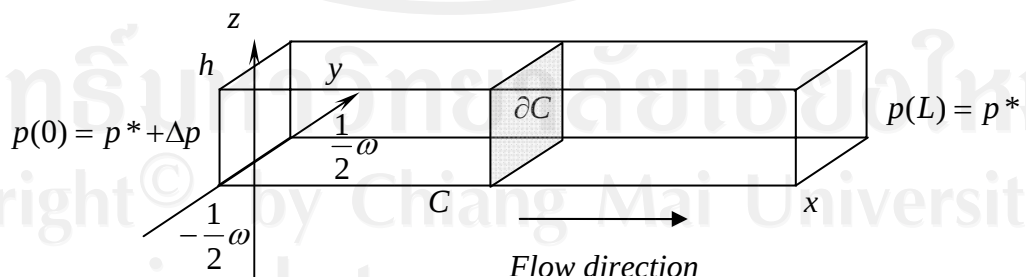
ไมโครฟลูอิดิกชิปที่สร้างด้วยเทคนิค EWBT (Etched Wiring Board Technique) มีลักษณะพื้นที่หน้าตัดใกล้เคียงกับรูปสี่เหลี่ยม ดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 ลักษณะภาคตัดขวางสี่เหลี่ยมของไมโครฟลูอิดิกชิปที่สร้างด้วยเทคนิค EWBT

ถ่ายโดยใช้กล้องจุลทรรศน์กำลังขยาย 65 เท่า

แม้ว่าจะไม่สามารถหาคำตอบที่แท้จริงของการไหลในท่อชนิดนี้ได้ แต่สามารถใช้การกระจายอนุกรมฟูเรียร์ เพื่อหาคำตอบโดยประมาณได้กับปัญหาดังกล่าว จากการจำลองปัญหาดังรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7 แผนภาพการไหลในท่อพื้นที่หน้าตัดสี่เหลี่ยม กว้าง ω สูง h ยาว L ซึ่งมีผลต่างความดันระหว่างปลายท่อทั้งสอง Δp

ด้วยการพิจารณาปัญหาเช่นเดียวกับการไหลในท่อตรงซึ่งมีพื้นที่หน้าตัดใดๆ ซึ่งจะเขียนสมการนาเวียร์-สโตกส์ ได้ดังในรูปแบบเดียวกันคือ

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] V(y, z) = -\frac{\Delta p}{\eta L} \quad (2.74)$$

ด้วยเงื่อนไขบังคับในโดเมน C และขอบเขต ∂C

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u(y, z) = -\frac{\Delta p}{\eta L} \quad \text{กรณี} \quad -\frac{1}{2}\omega < y < \frac{1}{2}\omega, \quad 0 < z < h \quad (2.75)$$

$$u(y, z) = 0 \quad \text{กรณี} \quad y = \pm \frac{1}{2}\omega, z = 0, z = h \quad (2.76)$$

จากเมื่อกระจาย $u(y, z)$ ด้วย อนุกรมฟูเรียร์ แล้วใช้เงื่อนไข (2.75) กับ (2.76) จะได้

$$u(u, z) = \frac{4h^2 \Delta p}{\pi^3 \eta L} \sum_{n, \text{odd}} \frac{1}{n^3} \left[1 - \frac{\cosh(n\pi \frac{y}{h})}{\cosh(n\pi \frac{\omega}{2h})} \right] \sin(n\pi \frac{z}{h}) \quad (2.77)$$

อินทิเกรตหาอัตราการไหลจะได้

$$Q = \frac{h^3 \omega \Delta p}{12 \eta L} \left[1 - \sum_{n, \text{odd}} \frac{1}{n^5} \frac{192}{\pi^5} \frac{h}{\omega} \tanh(n\pi \frac{\omega}{2h}) \right] \quad (2.78)$$

หลังจากนั้นทำการประมาณ ในขอบเขตที่ $\frac{h}{\omega} \rightarrow 0$ ซึ่ง $\frac{h}{\omega} \tanh(n\pi \frac{\omega}{2h}) \rightarrow \frac{h}{\omega} \tanh(\infty) = \frac{h}{\omega}$

และ ใช้ Rieman zeta function , $\zeta(x) = \sum_{n, \text{odd}} \frac{1}{n^x}$ ในการประมาณพจน์ $\sum_{n, \text{odd}} \frac{1}{n^5}$

$$\text{ซึ่ง} \quad \sum_{n, \text{odd}} \frac{1}{n^5} = \sum_n \frac{1}{n^5} - \sum_{n, \text{even}} \frac{1}{n^5} = \zeta(5) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^5} = \zeta(5) - \frac{1}{32} \zeta(5) = \frac{31}{32} \zeta(5) \quad (2.79)$$

$$\text{ได้ว่า} \quad Q \approx \frac{h^3 \omega \Delta p}{12 \eta L} \left[1 - 0.630 \frac{h}{\omega} \right] \quad \text{กรณี} \quad h < \omega \quad (2.80)$$

2.3.4 การไหลในท่อโค้งที่มีพื้นที่หน้าตัดสี่เหลี่ยม

เนื่องจากของไหลถูกบังคับให้เบี่ยงเบนไปตามขอบเขตของท่อ ซึ่งจะเป็นสาเหตุให้เกิดการไหลทุติยภูมิ (secondary flow) ซึ่งสามารถอธิบายได้จากการเกิด การหมุนวน (vortex) เช่นคล้ายกันกับการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่อยู่ในกรอบหมุน ซึ่งจะก่อให้เกิดแรงหนีศูนย์กลาง (centrifugal force) และแรงโคลิออริส (colioris force) ซึ่งเป็นแรงไม่อนุรักษ์ กรณีการไหลในท่อของของไหลที่บีบอัดไม่ได้ สมการ นาเวียร์-สโตกส์ จะเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{V} + f_{body} \quad (2.81)$$

โดย $\nu \nabla^2 \vec{V}$ คือพจน์ของแรงหนืดต่อหน่วยมวล f_{body} คือแรงที่กระทำกับก้อนของไหล ต่อหน่วยมวล และนิยาม ความหนืดจลน์ (kinematic viscosity) $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ คืออัตราส่วนของความหนืด η ต่อความหนาแน่น ρ เมื่อใช้คุณสมบัติของเวกเตอร์ (vector identity) กับพจน์ที่สองทางด้านซ้าย

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V}) = \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - \vec{V} \times \vec{\omega} \quad (2.82)$$

ดังนั้น (2.81) จะเขียนโดยใช้นิยาม (2.61) ได้เป็น

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - \vec{V} \times \vec{\omega} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{V} + \vec{f}_{body} \quad (2.83)$$

ใช้ $\nabla \times$ กระทำกับ (2.83) จะได้ว่า

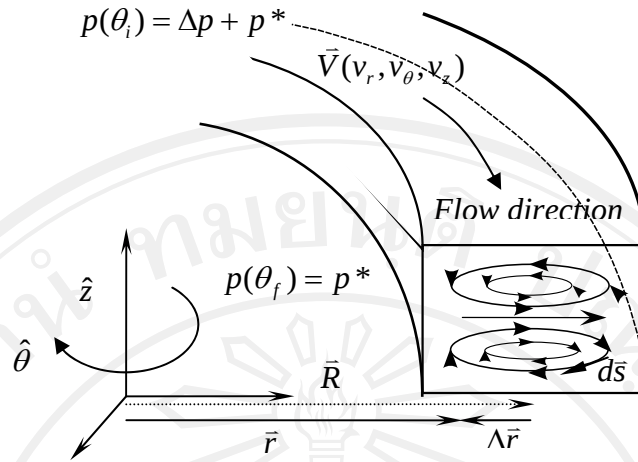
$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{V} - \vec{\omega} (\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) + \nabla \times (\nu \nabla^2 \vec{V}) + \nabla \times \vec{f}_{body} \quad (2.84)$$

จากเงื่อนไขของของไหลที่บีบอัดไม่ได้

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{V} - \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) + \nabla \times (\nu \nabla^2 \vec{V}) + \nabla \times \vec{f}_{body} \quad (2.85)$$

จาก (2.85) พจน์แรกแสดงให้เห็นว่าทิศทางการหมุน จะเคลื่อนที่ไปกับของไหล ส่วนพจน์ที่สองนั้นจะหมายถึงทิศทางของการหมุนจะตั้งฉากกับทิศทางของความดันที่ลดลง พจน์ที่สาม เป็นพจน์ของแรงบิดซึ่งเกิดจากผลของความหนืดและพจน์สุดท้ายจะเป็นพจน์ของแรงอื่นที่กระทำกับก้อนของเหลว ซึ่งอาจเป็น แรงไม่อนุรักษ์เช่นแรงหนีศูนย์กลาง แรงโคลิออริส ที่กระทำกับก้อนของไหลที่กำลังหมุนวนอยู่ (Greitzer *et. al.*, 2004)

สำหรับ ปรากฏการณ์ซึ่งเกิดการหมุนวนในของไหลที่สามารถเกิดขึ้นในท่อโค้งซึ่งมีรัศมี ความโค้งมากๆ พื้นที่หน้าตัดน้อยๆ ในระบบการไหลไมโครฟลูอิดิกส์ คือปรากฏการณ์การไหลแบบดีน (Dean flow) ซึ่งผลของแรงหนีศูนย์กลางจะก่อให้เกิด การไหลแบบทุติยภูมิ ขึ้นสามารถแสดงให้เห็นถึงการหมุนวนในระนาบของไหล ได้ดังรูปที่ 2.8 ดังนี้



รูปที่ 2.8 ลักษณะภาคตัดขวางและการหมุนวนในท่อสี่เหลี่ยมโค้งในพิกัด ทรงกระบอก ที่มีรัศมีความโค้งวัดจากกึ่งกลางท่อมีความยาว R โดยในที่นี้กำหนดว่า $\vec{V}(v_r, v_\theta, v_z)$ และ $\vec{V}(r, \theta, z, t)$

การอธิบายระบบดังกล่าวจะอ้างอิงงานของDean (1959) ซึ่งสมการนาเวียร์-สโตกส์ ของของไหลหนืดบีบอัดไม่ได้ เมื่อไม่คิดผลของแรงโน้มถ่วง และไม่มีแรงอื่นมาเกี่ยวข้อง สมการความต่อเนื่อง และสมการนาเวียร์-สโตกส์จะเขียนได้ดังนี้

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad (2.86 ก)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] \quad (2.86 ข)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] \quad (2.86 ค)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \quad (2.86 ง)$$

เมื่อพิจารณาการไหลที่ สภาวะคงตัว ($\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$) สมมติให้ของไหลบีบอัดไม่ได้ และไหลแบบราบเรียบ (มี parallel stream line) ที่ไม่ขึ้นกับ มุม θ ดังนั้นจะได้ v_r และ v_z ไม่เป็นฟังก์ชันของมุม θ ดังนั้น พจน์ที่มีอนุพันธ์เทียบกับ θ จะเป็นศูนย์ สมการ (2.86) จะลดรูปเป็น

$$\frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2.87 \text{ ก})$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] \quad (2.87 \text{ ข})$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta \left[\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] \quad (2.87 \text{ ค})$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \quad (2.87 \text{ ง})$$

พจน์ที่สองทางซ้ายของสมการ (2.87 ข) คือพจน์ของแรงหนีศูนย์กลางซึ่งเป็นต้นเหตุที่ทำให้เกิดการหมุนวนของของไหล ในขอบเขตของท่อ เมื่อทำการประมาณให้อัตราส่วนของเส้นผ่านศูนย์กลางไฮดรอลิก a ของท่อสี่เหลี่ยมต่อรัศมีความโค้ง r มีค่ามากๆ แล้วจะประมาณได้ว่า

$$\lim_{a/r \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{r} \right] \approx 0 \quad \text{และ} \quad \lim_{a/r \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{r^2} \right] \approx 0 \quad \text{เป็นผลให้} \quad \lim_{a/r \rightarrow \infty} \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right] \approx \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.88)$$

$$\text{จากรูปที่ 2.8 } \vec{r} = \vec{R} + \Delta \vec{r} \quad \text{เมื่อ} \quad \Delta \vec{r}_{\max} \approx a \quad \lim_{\Delta \vec{r} \rightarrow 0} \vec{R} + \Delta \vec{r} \approx \vec{R} \quad (2.89)$$

ด้วยเงื่อนไขจาก (2.88) และ (2.89) จะได้ว่า

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2.90 \text{ ก})$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta^2}{R} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] \quad (2.90 \text{ ข})$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta \left[\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] \quad (2.90 \text{ ค})$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \quad (2.90 \text{ ง})$$

จาก (2.87 ค) สมการนี้จะจริงเมื่อสมมติให้พจน์ทั้งสามเป็นค่าคงที่ เมื่ออินทิเกรต (2.87 ค) จะได้รูปแบบของความดันเป็น $p = f(r, z)\theta + g(r, z)$ เมื่อ $f(r, z)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ และ $g(r, z)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ จากนั้นใช้เงื่อนไขเดียวกันหาฟังก์ชันของความดัน p โดยใช้ (2.90 ข) และ (2.90 ง)

จะได้ว่า
$$p = C'R\theta + g(r, z) \quad (2.92)$$

เมื่อ C' ในที่นี้เป็นค่าคงที่ $f(r, z)$ และ $g(r, z)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ จากเงื่อนไขสมการความต่อเนื่อง (2.90 ก) จะได้ว่า

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (2.93)$$

จึงกำหนดฟังก์ชันกระแสทุติยภูมิ (secondary stream line) ในระนาบ r และ z ซึ่งมีทิศทางของความเร็วของของไหล ตามแนวเส้นกระแส โดยฟังก์ชันกระแสที่สภาวะคงตัว $\psi(r, z)$ เป็นฟังก์ชันของ r และ z ซึ่งต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้ เมื่อทราบฟังก์ชันกระแสจะสามารถวาดเส้นกระแสที่ $\psi(r, z)$ ค่าคงตัวหนึ่งๆ ได้ เส้นกระแสที่เขียนได้จะทำให้ทราบรูปแบบการไหล (flow pattern) จากเงื่อนไขในสภาวะสมดุลเส้นกระแสหนึ่งๆจะมีค่าคงที่ ดังนั้น

$$d\psi(r, z) = \frac{\partial \psi(r, z)}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi(r, z)}{\partial z} dz = 0 \quad (2.94)$$

เนื่องจาก v_r และ v_z มีทิศทางสัมผัสกับเส้นกระแส และการกำหนดองค์ประกอบความเร็วในหน้าตัดที่ θ คงที่โดยใช้เงื่อนไข $\vec{V}_s \times d\vec{s} = 0$ เมื่อ $\vec{V}_s$ เป็นความเร็วของของไหลในระนาบ r และ z ที่ θ คงที่ค่าหนึ่ง และ $d\vec{s} = dr\hat{r} + dz\hat{z}$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์ขนาดเล็กๆ ที่ขนานกันกับเส้นกระแสเส้นหนึ่งด้วยเงื่อนไขนี้จะได้ว่า

$$v_r dz - v_z dr = 0 \quad (2.95)$$

เทียบ (2.95) กับ (2.94) จะได้ว่า

$$v_r = -\frac{\partial \psi(r, z)}{\partial z} \quad \text{และ} \quad v_z = \frac{\partial \psi(r, z)}{\partial r} \quad (2.96)$$

แทน (2.96) และ (2.92) ใน (2.90) นำ (2.90 ข) ที่แทนด้วย (2.96) และ (2.92) ลงด้วย (2.90 ง)

เนื่องจากสมการความต่อเนื่องนั้นเป็นศูนย์ไป จะเหลือชุดสมการใหม่สองสมการดังนี้

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial v_\theta}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) = \frac{C}{\rho} + \nu \left[\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] \quad (2.97)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + \frac{2v_\theta}{R} \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = \nu \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right] \quad (2.98)$$

เมื่อ ν คือความหนืดจลน์ (dynamic viscosity) โดยที่ $\nu = \eta/\rho$

จากการประมาณสมการ (2.97) และ (2.98) เนื่องจาก r และ z ปรากฏในรูปของคิฟเฟอร์เรนเชียลเท่านั้น จึงสามารถเลื่อนหรือเปลี่ยน พิกัดของสมการ (2.97) และ (2.98) ใหม่ เป็น (x, y) เพื่อความสะดวก ในการพิจารณาเส้นกระแสการไหลในระนาบ โดย ทิศของ x สอดคล้องกับ

ทิศทางของ r ทิศของ y สอดคล้องกับทิศทางของ z และปรับให้ (2.97) เป็นสมการไร้หน่วย เพื่อให้การวิเคราะห์อัตราส่วนระหว่างปริมาณต่างๆ เป็นไปโดยง่ายและสื่อความหมาย โดยใช้สเกลตาม Dean (1959) ดังนี้

$$\psi = v\tilde{\psi}, \quad x = a\tilde{x}, \quad y = a\tilde{y}, \quad v_\theta = V_0\tilde{v}_\theta, \quad Ca^2 = 4vV_0 \quad (2.99)$$

สำหรับเลข 4 ในพจน์สุดท้าย นั้นกำหนดขึ้นให้สอดคล้องกับนิยามของเส้นผ่านศูนย์กลางไฮดรอลิก (2.49) ซึ่งสามารถใช้การประมาณนี้กับท่อที่มีพื้นที่หน้าตัดอื่นๆ ได้ ด้วยการทำให้สมการไร้หน่วย (2.97) คล้ายกับ (2.44) จะได้

$$\nabla_*^2 \tilde{v}_\theta = -4 + \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \tilde{y}} - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \tilde{x}} \right) \quad (2.100)$$

$$\text{เมื่อ } \nabla_*^2 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \right)$$

พิจารณาพจน์สุดท้ายทางขวา ที่เป็นพจน์ของเกลหรือการหมุนวน โดยนิยามตาม (2.52) ซึ่งการหมุนวนจะไม่เกิดบนระนาบ $\tilde{x}, \tilde{y}$ เมื่อพจน์นี้เป็นศูนย์ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\nabla_*^2 \tilde{v}_\theta = -4 \quad (2.101)$$

ซึ่งจะได้ สมการที่อยู่ในรูปแบบคล้าย (2.50) อันเป็นการไหลในท่อที่สภาวะคงตัว โดยมีเกรเดียนต์ของความดันลดลงเป็นเชิงเส้น และมีผลเฉลยของลักษณะความเร็วอยู่ในรูปพาราโบลา (parabolic flow)

จากนั้นเมื่อใช้เงื่อนไข (2.99) ทำให้ (2.98) เป็นสมการไร้หน่วย จะได้ว่า

$$\nabla_*^4 \tilde{\psi} = K\tilde{v}_\theta \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \tilde{y}} + \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial (\nabla_*^2 \tilde{\psi})}{\partial \tilde{y}} - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial (\nabla_*^2 \tilde{\psi})}{\partial \tilde{x}} \right) \quad (2.102)$$

$$\text{โดย} \quad K = \frac{2a}{R} \left(\frac{aV_0}{v} \right)^2 \quad (2.103)$$

จากการสังเกตจากการทดลอง Dean จึงสมมติให้ของไหลในระนาบ $\tilde{x}, \tilde{y}$ บริเวณกึ่งกลางท่อพุ่งออกตามแนวแกน $\tilde{x}$ ด้วยความเร็วคงที่ ที่สภาวะคงตัวเพื่อทำให้สมการ (2.100) สามารถหาคำตอบโดยประมาณได้ โดยเขียนฟังก์ชันกระแสที่ใช้เงื่อนไข (2.96) โดยให้ความเร็วลัพท์ในทิศ $\tilde{x}$ มีค่าคงที่และ ความเร็วลัพท์ในทิศ $\tilde{y}$ มีค่าเป็นศูนย์ ในที่สุดแล้วฟังก์ชันกระแสสุดท้ายก็คือ

$$\tilde{\psi} = -2k\tilde{y} \quad (2.104)$$

ซึ่งไม่ขึ้นกับเงื่อนไขขอบเขตของท่อ จากนั้นแทน (2.104) ใน (2.100) จะได้

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial \tilde{y}^2} = -4 + 2k \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \tilde{x}} \quad (2.105)$$

พิจารณาการไหลแบบหนืดและบีบอัดไม่ได้ในท่อโค้งซึ่งมีพื้นที่หน้าตัดสี่เหลี่ยมมุมฉาก มีความกว้าง $2a$ ยาว $2b = 2\beta a$ จากเงื่อนไขดังกล่าว จะได้เงื่อนไขขอบเขตของ $\tilde{v}_\theta(\tilde{x}, \tilde{y})$ ดังนี้

$$\tilde{v}_\theta(\pm 1, \tilde{y}) = 0, \tilde{v}_\theta(\tilde{x}, \pm \beta) = 0; -\beta \leq \tilde{y} \leq +\beta, -1 \leq \tilde{x} \leq +1 \quad (2.106)$$

โดย β เป็นอัตราส่วนความกว้างต่อความยาวของหน้าตัดท่อสี่เหลี่ยม

เมื่อหาคำตอบด้วยการกระจายอนุกรม(2.105)เช่นเดียวกับการแก้ปัญหาคาร์ไหลในท่อตรง โดยคำตอบสมการจะอยู่ในรูป (2.107)

$$\tilde{v}_\theta = 2(\beta^2 - \tilde{y}^2) + e^{k\tilde{x}} \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cosh l_n \tilde{x} + B_n \sinh l_n \tilde{y}) \cos m_n \tilde{y} \quad (2.107)$$

เมื่อ A_n, B_n, l_n, m_n, k เป็นค่าคงที่ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$,

จากนั้นใช้เงื่อนไขขอบเขตจะได้ว่า

$$\beta m = (n + \frac{1}{2})\pi, l_n^2 = k^2 + m_n^2 \quad (2.108)$$

จัดรูปแล้วรวมพจน์ต่างๆ

$$\tilde{v}_\theta = 2(\beta^2 - \tilde{y}^2) + \frac{8}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cosh m_n \tilde{x} \cos m_n \tilde{y}}{m_n^3 \cosh m_n} \quad (2.109)$$

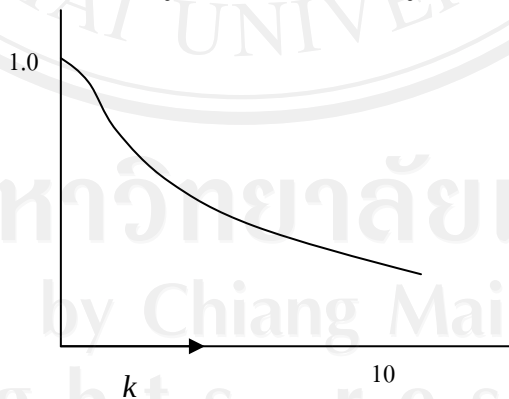
จาก (2.109) สามารถหาอัตราการไหลที่ไหลผ่านท่อโดยประมาณ โดยอินทิเกรตรอบพื้นที่หน้าตัด

$$\tilde{Q} = \int_{-1-\beta}^1 \int_{-\beta}^{\beta} \tilde{v}_\theta d\tilde{x} d\tilde{y} = \frac{16\beta^3}{3} - \frac{16}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l_n (\cosh 2l_n - \cosh 2k)}{m_n^6 \cosh l_n \sinh l_n} \quad (2.110)$$

ถ้าหาก $k = 0$ ซึ่งเป็นการไหลที่ฟังก์ชันกระแสหยุดยั้งจะมีค่าเป็นศูนย์

$$\tilde{Q} \approx \frac{16\beta^3}{3} - \frac{32}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh m_n}{m_n^5} \quad (2.111)$$

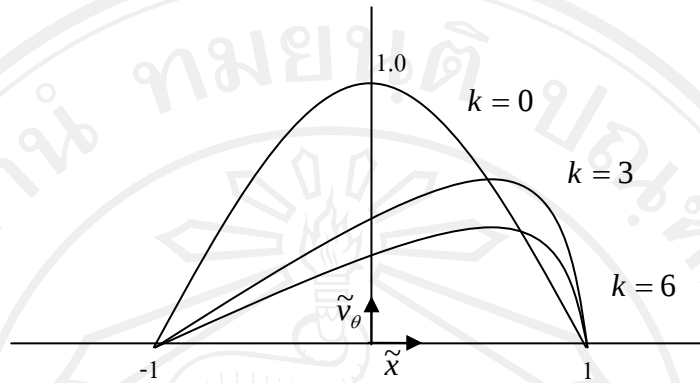
เมื่อเขียนกราฟระหว่างสัดส่วนของอัตราการไหลที่ $k > 0$ ต่ออัตราการไหลที่ $k = 0$ กับค่า k จะพบว่า อัตราการไหลของการไหลปฐมภูมิลดลงมีลักษณะ ดังรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9 ลักษณะกราฟระหว่างสัดส่วนของอัตราการไหลที่ $k > 0$ ต่ออัตราการไหลที่ $k = 0$ กับ

ค่า k (Dean, 1959)

สำหรับรูปแบบของความเร็วในท่อของไหลบนระนาบ ของ $\tilde{v}_\theta$ กับ $\tilde{x}$ ที่ k ต่างกัน จะแสดงได้ดังรูปที่ 2.10 เมื่อ k มีค่ามากขึ้นของไหลจะถูกเหวี่ยงออกตามแนวรัศมีหรือแกน $\tilde{x}$ มากขึ้นเนื่องจากมีความเร็วในทิศออกจากแนวรัศมีส่วนโค้งหรือ $\tilde{v}_x$ ซึ่งแปรกับค่า k



รูปที่ 2.10 รูปแบบของความเร็วในท่อของไหลบนระนาบ ของ $\tilde{v}_\theta$ กับ $\tilde{x}$ ที่ k ต่างกัน (Dean, 1959)

สำหรับการพิจารณาถึงคุณสมบัติทางกายภาพของปริมาณไร้หน่วยที่ Dean ได้แสดงวิธีการพิจารณาโดยประมาณนั้น White (1929) ได้ทดลองหาความสัมพันธ์ระหว่าง k และ C ในท่อโค้งพื้นที่หน้าตัดวงกลม โดยเปลี่ยนการสเกลความเร็วในทิศต่างๆใหม่ จนได้อัตราส่วนระหว่างความเร็วการไหลทุติยภูมิ (secondary flow) กับความเร็วการไหลปฐมภูมิ (primary flow) ดังนี้

$$\kappa C^* = \frac{Ca^3}{4\eta v} \sqrt{\frac{a}{R}} \quad (2.112)$$

$$\kappa = \frac{2av_m}{v} \sqrt{\frac{a}{R}} \quad (2.113)$$

$$C^* = \left(\frac{\pi a^4 C}{8\eta} \right) / \pi a^2 v_m \quad (2.114)$$

$$\frac{|v_x|}{|v_\theta|} = \frac{1}{\kappa C^*} \quad (2.114)$$

เมื่อ C^* คือเกรเดียนต์ของความดันของการไหลผ่านท่อตรงซึ่งมีพื้นที่หน้าตัดเท่ากับท่อโค้ง

a คือรัศมีท่อโค้ง

v_m คือความเร็วเฉลี่ยของการไหลในท่อตามแนวโค้งของท่อ

v คือความหนืดจลน์

ด้วยหลักเช่นเดียวกัน ในทางการทดลองจึงนิยามตัวเลขซึ่งบอกถึงอัตราส่วนระหว่าง การไหลตามขวาง(transverse flow)ต่อการไหลตามยาว(longitudinal flow) ด้วย Dean number ซึ่งนิยามดังนี้

$$D_e = \frac{D_h V}{\nu} \sqrt{\frac{D_h}{2R}} \quad (2.115)$$

เมื่อ V คืออัตราเร็วเฉลี่ยของไหล

ν คือความหนืดจลน์, $\nu = \eta / \rho$ เมื่อ η คือความหนืด ρ คือความหนาแน่น

D_h คือเส้นผ่านศูนย์กลางไฮดรอลิกนิยามตาม (2.49)

R คือรัศมีความโค้งของท่อ

การศึกษาการไหลแบบคินและการไหลในท่อโค้งมีผู้ศึกษาไว้หลากหลายทั้งการสร้างแบบจำลองทางคอมพิวเตอร์ และการทดลอง เช่นการศึกษาของ Ligrani (1994) ที่ศึกษา Dean flow ของอากาศในท่อโค้ง พื้นที่หน้าตัดสี่เหลี่ยมที่มีอัตราส่วนกว้างต่อยาว 1:40 เท่า ที่ Dean number มากที่สุดประมาณ 430 โดยใช้เครื่องกำเนิดควันและตัวตรวจวัดความเร็วแบบ hotwire ที่มีขนาดในระดับไมครอน เพื่อวัดความเร็วของอากาศในท่อ และกล้องวิดีโอเพื่อสังเกตการเกิดปรากฏการณ์ พบว่าที่ Dean number <40-60 การไหลของอากาศจะเป็นการไหลแบบราบเรียบ และขณะที่ Dean number อยู่ระหว่าง 40-60 และ 64-75 การไหลจะอยู่ในสภาวะไม่สมดุลและพบว่าการเกิด secondary flow ปริมาณน้อย และในช่วง Dean number > (64-75) จะเกิดคู่ Vortex มากกว่า 2 คู่โดยตำแหน่งศูนย์กลางการหมุนดังกล่าวจะขึ้นกับ Dean number เมื่อ Dean number มีค่าประมาณ 75-200 คู่ของ Vortex จะเกิดการบิดเกลียว แยกออกและรวมตัวกันสลับไปมา ซึ่งทำควบคู่ไปกับแบบจำลองทางคอมพิวเตอร์ซึ่งให้ผลสอดคล้องกัน

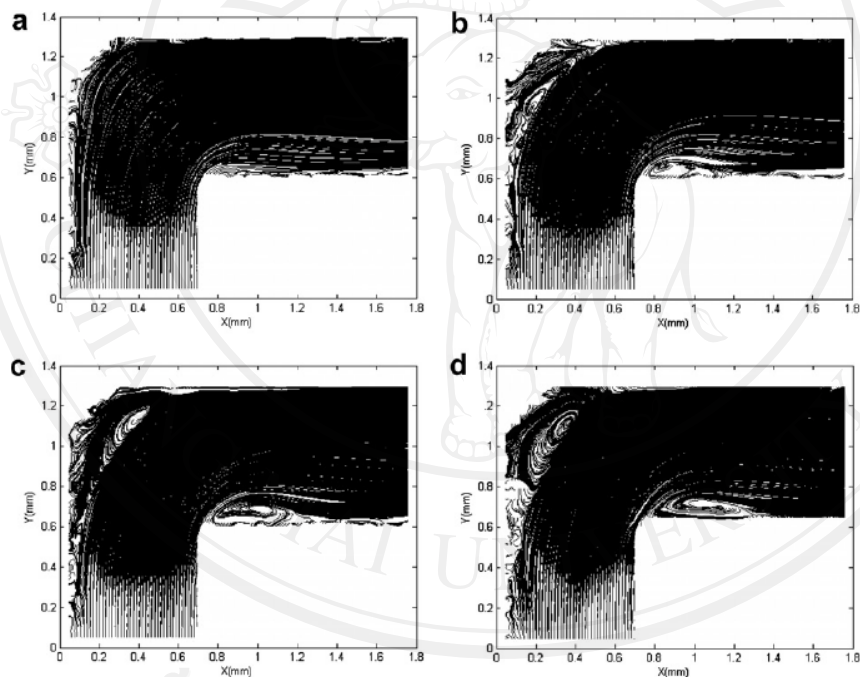
สำหรับการศึกษาทางทฤษฎีซึ่งพยายามหาผลเฉลยด้วยการประมาณจากปรากฏการณ์

ดังกล่าวโดยใช้วิธีทางตัวเลข (numerical methode) perturbation method, Galerkin method และวิธีผลต่างสืบเนื่อง (finite different) โดยผลการคำนวณมีลักษณะใกล้เคียงผลการทดลองซึ่งชี้ให้เห็นว่าสามารถใช้คอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณปัญหาดังกล่าวได้เป็นอย่างดี เช่นการศึกษาของ

Zhiming และ Yulu (1997) ส่วนการแก้ปัญหาทางทฤษฎีโดยวิเคราะห์สมบัติทางคณิตศาสตร์ของจุดเอกฐาน (singularity) ของระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์ เช่นงานของ Khan (2006) ก็ให้ผลที่สอดคล้องกัน สำหรับการทดลองที่ศึกษา Dean flow ในของเหลวทั้งการทดลองและการคำนวณสามารถดูเพิ่มเติมได้จากงานของ Kim *et. al.* (2006)

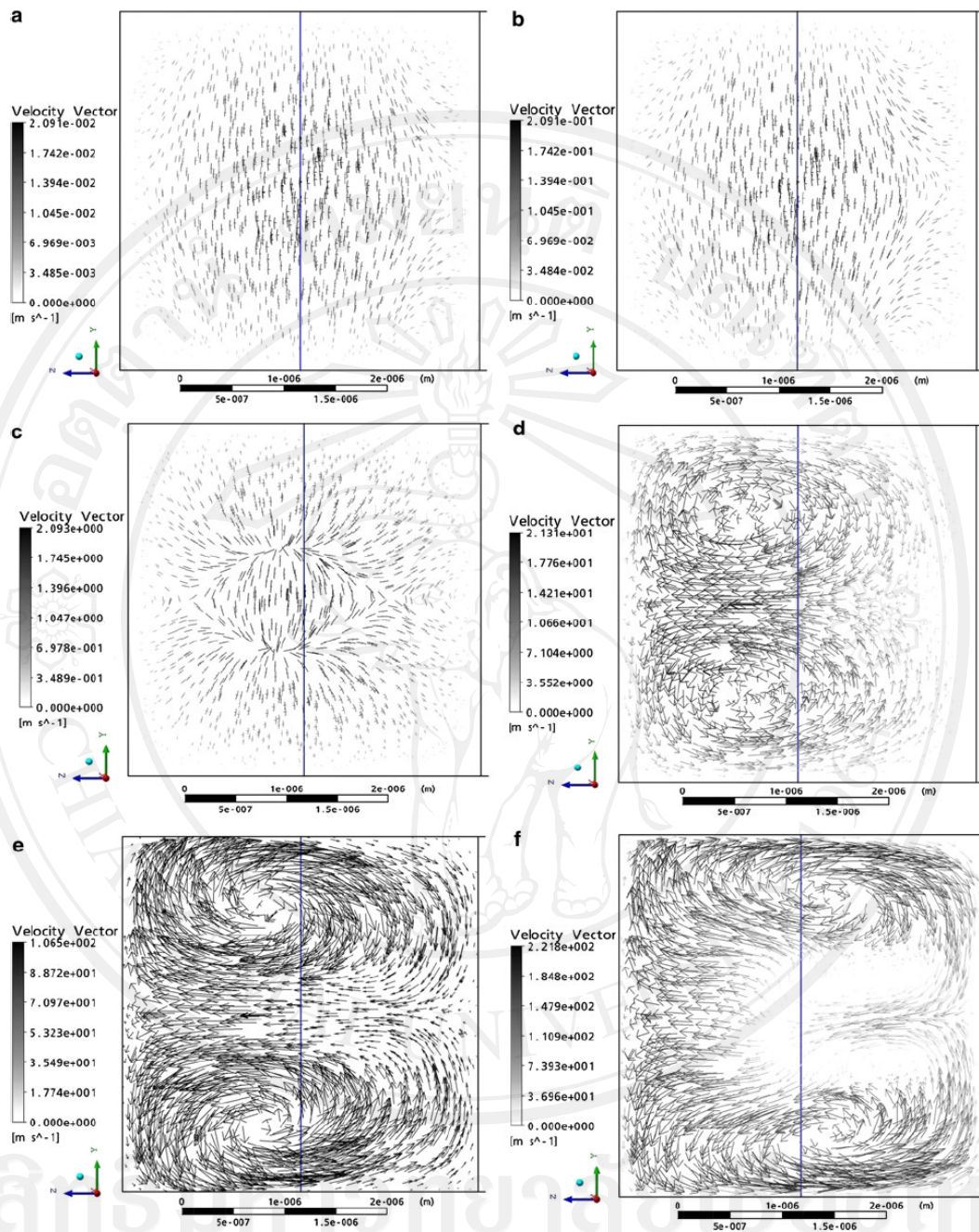
2.3.5 การไหลในท่อโค้งงอ 90 องศาที่มีพื้นที่หน้าตัดสี่เหลี่ยม

สำหรับการไหลในท่อโค้งงอ 90 องศา ซึ่งมีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยม ในระบบนั้นตัวทฤษฎียังมีความคล้ายคลึงกับการไหลชนิดในท่อโค้ง ซึ่งมักเหนี่ยวนำให้เกิดการไหลที่หมุนวนที่มีจุดหมุนเพิ่มขึ้นดังรูปที่ 2.11 และ 2.12 ที่แสดงเส้นกระแสการไหลทุติยภูมิในพื้นที่หน้าตัดบริเวณที่ของไหลผ่านออกมาจากรัศมีความโค้ง ของท่อสี่เหลี่ยม ขนาดกว้างและยาว $5\text{ }\mu\text{m}$ ถูกงอให้มีมุม 90 องศา และเป็นผลทำให้เกิดการสูญเสียความดันจากแหล่งจ่ายความดัน เช่นปั๊มที่ใช้หลักการจากกลไก แรงโน้มถ่วง และสนามไฟฟ้าเป็นต้น ซึ่งในท่อทุกแบบต่างมีการสูญเสียแรงดัน (pressure loss หรือ pressure drop) จากแหล่งจ่ายเสมอ (Som and Biswas, 2008)



รูปที่ 2.11 เส้นกระแสทุติยภูมิจากการคำนวณจาก velocity vector ที่ได้จากการทดลองถ่ายภาพ

โดยใช้ particle image velocimetry (PIV) method ของการไหลผ่านท่อโค้ง 90 องศาของ Xiong และ Chung (2008)



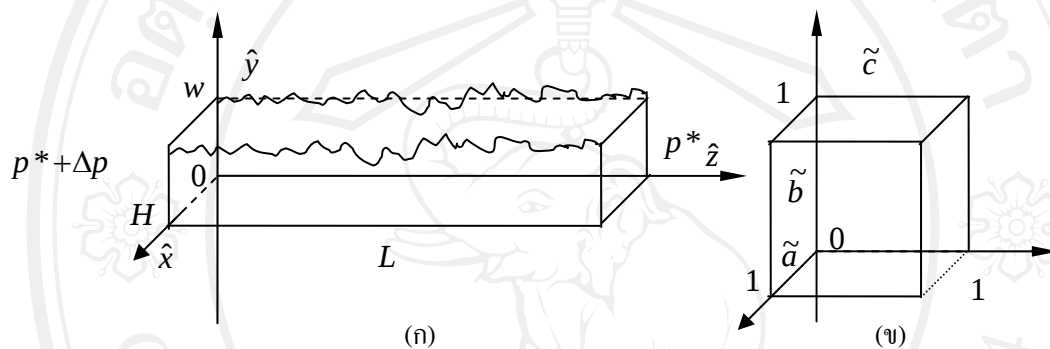
รูปที่ 2.12 เส้นกระแสทฤษฎีหลังผ่านท่อหน้าตัดสี่เหลี่ยมขนาด $5 \times 5 \mu\text{m}$ ยาว $400 + 400 \mu\text{m}$ มุมงอ

90 องศา จากการคำนวณแบบตาราง (computer grid) ที่ เลขเรย์โนลด์

0.056, 0.56, 5.6, 56, 280 และ 560 ตามลำดับ (Tanisclass *et. al.*, 2011)

2.3.6 รูปแบบการไหลในท่อที่มีความซับซ้อนบนพื้นผิว

ความซับซ้อนบนพื้นผิวนี้นี้หมายถึงพื้นผิวไม่ราบเรียบ หรือ พื้นที่ทำหน้าตัดไม่ราบเรียบ มีความขรุขระ ซึ่งต่างจากกรณี 2.3.4 ที่เป็นท่ออุดมคติ เนื่องจากแม่แบบที่นำมาทำ ไมโครเซนแนล ถูกกัดด้วยกรดจากทางด้านข้าง เมื่อทำการสร้างแม่แบบของปัญหาโดยประมาณ จะได้ลักษณะของปัญหาดังรูปที่ 2.13 เมื่อใช้ perturbation theory ในการประมาณปัญหา ดังกล่าวในระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์ ที่ไร้หน่วย ลักษณะของไมโครเซนแนลจะเป็นดังรูปที่ 2.13 โดยสาเหตุที่มีพื้นผิวขรุขระเพียงด้านเดียวนั้นเนื่องมาจากประมาณว่าปัญหามีความสมมาตร



รูปที่ 2.13 (ก) ไมโครเซนแนลที่มองจากด้านบน ซึ่งมีความขรุขระด้านข้างมีความกว้าง w และมีความยาว L โดยกำหนดให้ไมโครเซนแนลมีการเปลี่ยนแปลงความกว้างบริเวณพื้นผิว (shape-perturbed) และถูกผลักดันด้วยความดัน Δp ที่ $z = 0$

(ข) ความยาวไร้หน่วย $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ และ $\tilde{c}$ ซึ่งนิยามขึ้นให้เป็นตัวแปรไร้หน่วย ในขอบเขตที่มีความกว้างและยาว 1 หน่วย

$$\text{เมื่อนิยาม} \quad w(x, z) = w_0 \left[1 + \alpha \lambda \left(\frac{x}{H}, \frac{z}{L} \right) \right] \quad (2.116)$$

เป็นฟังก์ชันของพื้นผิวซึ่งขึ้นกับตำแหน่ง x และ z โดยที่ w_0 คือความสูงเฉลี่ยแท้จริงของครึ่งหนึ่งของความกว้างท่อจริง α เป็นพารามิเตอร์ไร้หน่วยซึ่ง $\alpha \ll 1$ และ $\lambda \left(\frac{x}{H}, \frac{z}{L} \right)$ เป็นฟังก์ชันของ

ความซับซ้อนขรุขระบนพื้นผิว ซึ่งจะนิยาม $\frac{x}{H}$, $\frac{z}{L}$ และ $\frac{y}{w(x, z)}$ เป็นตัวแปรไร้หน่วยดังนี้

$$\tilde{a} = \frac{x}{H} \quad (2.117 \text{ ก})$$

$$\tilde{b} = \frac{y}{w(x, z)} = \frac{y}{w_0 \left[1 + \alpha \lambda \left(\frac{x}{H}, \frac{z}{L} \right) \right]} \approx \frac{y}{w_0} \left[1 - \alpha \lambda \left(\frac{x}{H}, \frac{z}{L} \right) \right] \quad (2.117 \text{ ข})$$

$$\tilde{c} = \frac{z}{L} \quad (2.117 \text{ ก})$$

และให้ค่าเฉลี่ยของ $\lambda\left(\frac{x}{H}, \frac{z}{L}\right)$ และ $w(x, z)$ บนระนาบ $x-z$ มีค่าเป็นไปตามเงื่อนไขดังนี้

$$\left\langle \lambda\left(\frac{x}{H}, \frac{z}{L}\right) \right\rangle \equiv \frac{1}{HL} \int_0^L \int_0^H \lambda\left(\frac{x}{H}, \frac{z}{L}\right) dx dz = 0 \quad (2.118)$$

$$\left\langle w\left(\frac{x}{H}, \frac{z}{L}\right) \right\rangle \equiv \frac{1}{HL} \int_0^L \int_0^H w\left(\frac{x}{H}, \frac{z}{L}\right) dx dz \quad (2.119)$$

โดยการทดลองที่จะสอดคล้องกับเงื่อนไขนี้ จะต้องสามารถวัดค่าเฉลี่ย ของความกว้างของ ไมโครแขนแนลได้อย่างแม่นยำโดยมีค่าความแปรปรวนน้อยที่สุด

นิยามอัตราส่วน $\gamma = \frac{w_0}{L}$ และ $\varepsilon = \frac{H}{L}$ เพื่อความสะดวก

สเกลความเร็ว และความดันในแต่ละแนวแกน ให้เป็นความเร็วไร้หน่วยดังนี้

$$\tilde{v}_x(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}) = \frac{1}{\varepsilon V_0} v_x(x(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}), y(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}), z(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})) \quad (2.120 \text{ ก})$$

$$\tilde{v}_x(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}) = \frac{1}{\gamma \mathcal{W}_0} v_x(x(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}), y(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}), z(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})) \quad (2.120 \text{ ข})$$

$$\tilde{v}_x(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}) = \frac{1}{V_0} v_x(x(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}), y(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}), z(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})) \quad (2.120 \text{ ค})$$

$$\tilde{p}(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}) = \frac{1}{P_0} [p(x(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}), y(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}), z(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})) - p^*] \quad (2.120 \text{ ง})$$

เมื่อ V_0 เป็นความเร็วของของไหล และ P_0 คือความดันที่ใช้ขับเคลื่อนของไหลในระบบ เนื่องจากสมการนาเวียร์-สโตกส์ประกอบด้วย โอเปอเรเตอร์ $\tilde{\nabla}$ และ $\tilde{\nabla}^2$ ซึ่งหาได้โดยใช้

Jacobian matrix ซึ่งเป็นอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของ $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ และ $\tilde{c}$ โดย

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{b}}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{c}}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{a}}{\partial y} & \frac{\partial \tilde{b}}{\partial y} & \frac{\partial \tilde{c}}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{a}}{\partial z} & \frac{\partial \tilde{b}}{\partial z} & \frac{\partial \tilde{c}}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{H} & -\alpha \tilde{b} \frac{\partial \lambda(\tilde{a}, \tilde{c})}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{w_0} (1 - \alpha \lambda(\tilde{a}, \tilde{c})) & 0 \\ 0 & -\alpha \tilde{b} \frac{\partial \lambda(\tilde{a}, \tilde{c})}{\partial z} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon L} & -\alpha \tilde{b} \frac{\partial \lambda(\tilde{a}, \tilde{c})}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma L} (1 - \alpha \lambda(\tilde{a}, \tilde{c})) & 0 \\ 0 & -\alpha \tilde{b} \frac{\partial \lambda(\tilde{a}, \tilde{c})}{\partial z} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (2.121)$$

จากกฎลูกโซ่ $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \tilde{a}} \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tilde{b}} \frac{\partial \tilde{b}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tilde{c}} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial x}$ และ Jacobian matrix จะได้ว่า

$$\tilde{\nabla} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \tilde{a}} - \frac{\alpha H}{\varepsilon} \tilde{b} \frac{\partial \lambda(\tilde{a}, \tilde{c})}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \tilde{b}} \\ \frac{1}{\gamma} (1 - \alpha \lambda(\tilde{a}, \tilde{c})) \frac{\partial}{\partial \tilde{b}} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{c}} - \alpha L \tilde{b} \frac{\partial \lambda(\tilde{a}, \tilde{c})}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \tilde{b}} \end{bmatrix} \quad (2.122)$$

$$\tilde{\nabla}^2 = \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{a}^2} - \frac{2\alpha H}{\varepsilon^2} \tilde{b} \frac{\partial \lambda(\tilde{a}, \tilde{c})}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{b} \partial \tilde{a}} + \alpha^2 \left[\frac{H}{\varepsilon} \tilde{b} \frac{\partial \lambda(\tilde{a}, \tilde{c})}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \tilde{b}} \right] \left[\frac{H}{\varepsilon} \tilde{b} \frac{\partial \lambda(\tilde{a}, \tilde{c})}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \tilde{b}} \right] \\ \frac{1}{\gamma^2} (1 - 2\alpha \lambda(\tilde{a}, \tilde{c}) + \alpha^2 \lambda) \frac{\partial^2}{\partial \tilde{b}^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \tilde{c}^2} - \frac{2\alpha L}{\varepsilon^2} \tilde{b} \frac{\partial \lambda(\tilde{a}, \tilde{c})}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{b} \partial \tilde{a}} + \alpha^2 \left[L \tilde{b} \frac{\partial \lambda(\tilde{a}, \tilde{c})}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \tilde{b}} \right] \left[L \tilde{b} \frac{\partial \lambda(\tilde{a}, \tilde{c})}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \tilde{b}} \right] \end{bmatrix} \quad (2.123)$$

เมื่อ $\alpha \ll 1$ หรือพิจารณาแค่ first order approximation พจน์ $\alpha^2 \approx 0$ จะได้ว่า

$$\tilde{\nabla}^2 \approx \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{a}^2} - \frac{2\alpha H}{\varepsilon^2} \tilde{b} \frac{\partial \lambda(\tilde{a}, \tilde{c})}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{b} \partial \tilde{a}} \\ \frac{1}{\gamma^2} (1 - 2\alpha \lambda(\tilde{a}, \tilde{c})) \frac{\partial^2}{\partial \tilde{b}^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \tilde{c}^2} - 2\alpha L \tilde{b} \frac{\partial \lambda(\tilde{a}, \tilde{c})}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{b} \partial \tilde{a}} \end{bmatrix} \quad (2.124)$$

เนื่องจากของไหลที่ไหลในไมโครแชนแนลเช่นน้ำ เป็นของไหลบีบอัดไม่ได้ จากสมการความ

ต่อเนื่องจะได้ว่า $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{a}} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{b}} + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{c}} - \alpha \left[\frac{H}{\varepsilon} \frac{\partial \lambda(a, c)}{\partial x} \tilde{b} \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{b}} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \lambda(a, c)}{\partial x} \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{b}} + L \frac{\partial \lambda(a, c)}{\partial z} \tilde{b} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{b}} \right] = 0 \quad (2.125)$$

จากสมการนาเวียร์-สโตกส์ ที่ไร้หน่วย (2.47) ที่ระบบอยู่ในสมดุล $\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} = 0$

$$\text{Re}((\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{v}}) = (-\tilde{\mathbf{v}} \tilde{p} + \tilde{\mathbf{v}}^2 \tilde{\mathbf{v}})$$

เมื่อเขียนองค์ประกอบในแต่ละแนวแกน x, y และ z ตามลำดับโดยใช้โอเปอเรเตอร์ทั้งสองจาก

(2.119) และ (2.121) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
& \frac{\tilde{v}_x}{L} \left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{a}} - \frac{\alpha H}{\varepsilon} \frac{\partial \lambda(a, c)}{\partial x} b \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{b}} \right] + \frac{\tilde{v}_y}{L} \left[\frac{1}{\gamma} (1 - \alpha \lambda) \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{b}} \right] + \frac{\tilde{v}_z}{L} \left[\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{c}} - \alpha L \frac{\partial \lambda(a, c)}{\partial x} b \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{b}} \right] \\
&= -\frac{1}{\varepsilon L} \frac{\partial p}{\partial \tilde{a}} + \frac{\alpha H}{\varepsilon L} \frac{\partial \lambda(a, c)}{\partial x} b \frac{\partial p}{\partial \tilde{b}} + \frac{1}{L^2} \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{a}^2} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{b}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{c}^2} - \frac{2\alpha}{\varepsilon^2} H \frac{\partial \lambda(a, c)}{\partial x} b \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{b} \partial \tilde{a}} \right. \\
&\quad \left. - 2\alpha \lambda(a, c) \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{b}^2} - 2\alpha L \frac{\partial \lambda(a, c)}{\partial z} b \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{b} \partial \tilde{c}} \right]
\end{aligned} \tag{2.126 ก}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\tilde{v}_x}{L} \left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{a}} - \frac{\alpha H}{\varepsilon} \frac{\partial \lambda(a, c)}{\partial x} b \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{b}} \right] + \frac{\tilde{v}_y}{L} \left[\frac{1}{\gamma} (1 - \alpha \lambda) \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{b}} \right] + \frac{\tilde{v}_z}{L} \left[\frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{c}} - \alpha L \frac{\partial \lambda(a, c)}{\partial x} b \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{b}} \right] \\
&= -\frac{1}{\varepsilon L} (1 - \alpha \lambda(a, c)) \frac{\partial p}{\partial \tilde{b}} + \frac{1}{L^2} \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_y}{\partial \tilde{a}^2} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_y}{\partial \tilde{b}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_y}{\partial \tilde{c}^2} - \frac{2\alpha}{\varepsilon^2} H \frac{\partial \lambda(a, c)}{\partial x} b \frac{\partial^2 \tilde{v}_y}{\partial \tilde{b} \partial \tilde{a}} \right. \\
&\quad \left. - 2\alpha \lambda(a, c) \frac{\partial^2 \tilde{v}_y}{\partial \tilde{b}^2} - 2\alpha L \frac{\partial \lambda(a, c)}{\partial z} b \frac{\partial^2 \tilde{v}_y}{\partial \tilde{b} \partial \tilde{c}} \right]
\end{aligned} \tag{2.126 ข}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\tilde{v}_x}{L} \left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{a}} - \frac{\alpha H}{\varepsilon} \frac{\partial \lambda(a, c)}{\partial x} b \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{b}} \right] + \frac{\tilde{v}_y}{L} \left[\frac{1}{\gamma} (1 - \alpha \lambda) \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{b}} \right] + \frac{\tilde{v}_z}{L} \left[\frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{c}} - \alpha L \frac{\partial \lambda(a, c)}{\partial x} b \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{b}} \right] \\
&= -\frac{1}{L} \frac{\partial p}{\partial \tilde{c}} + \alpha \frac{\partial \lambda(a, c)}{\partial x} b \frac{\partial p}{\partial \tilde{b}} + \frac{1}{L^2} \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{a}^2} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{b}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{c}^2} - \frac{2\alpha}{\varepsilon^2} H \frac{\partial \lambda(a, c)}{\partial x} b \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{b} \partial \tilde{a}} \right. \\
&\quad \left. - 2\alpha \lambda(a, c) \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{b}^2} - 2\alpha L \frac{\partial \lambda(a, c)}{\partial z} b \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{b} \partial \tilde{c}} \right]
\end{aligned} \tag{2.126 ค}$$

โดย perturbation theory แต่ละองค์ประกอบของความเร็วจึงแทนใน (1.126) จะเขียนเรียงตามลำดับการประมาณ (ด้วยก) ได้ว่า

$$\tilde{v}_x = \tilde{v}_x^0 + \alpha \tilde{v}_x^1 \tag{2.127 ก}$$

$$\tilde{v}_y = \tilde{v}_y^0 + \alpha \tilde{v}_y^1 \tag{2.127 ข}$$

$$\tilde{v}_z = \tilde{v}_z^0 + \alpha \tilde{v}_z^1 \tag{2.127 ค}$$

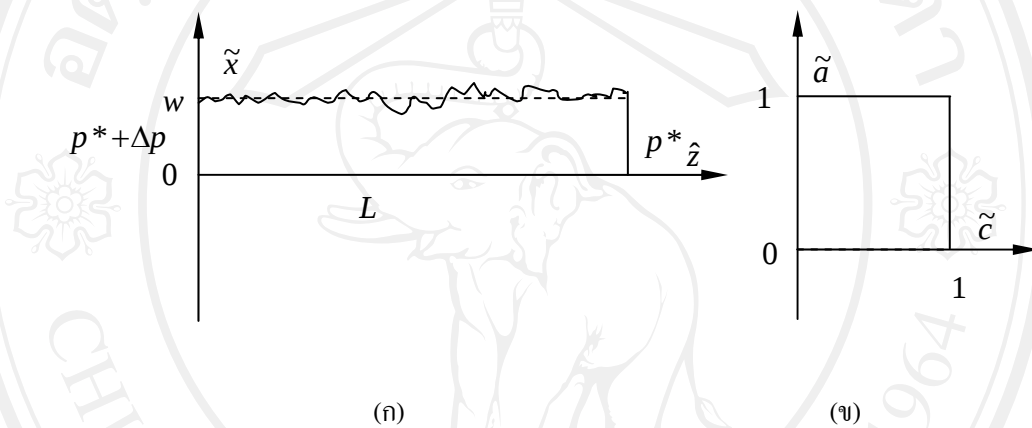
$$\tilde{p} = \tilde{p}^0 + \alpha \tilde{p}^1 \tag{2.127 ง}$$

นำ (2.125) แทนใน (2.124) และหาคำตอบโดยแทนเงื่อนไขขอบเขตที่ว่าของไหลไม่มีการเลื่อนไหลไปกับผนังท่อจึงมีความเร็วบริเวณผนังท่อไม่โครเซนแนลเป็นศูนย์ ตามรูปที่ 2.11 (ข)

จากการทดลองในขั้นต้น การไหลของน้ำในท่อที่มีอัตราเร็วประมาณ 0.01- 0.1 m/s ที่มีหน้าตัดในระดับไมโครเมตรและความยาวในระดับเซนติเมตร Re จะมีค่าน้อยกว่า 10 ซึ่งอาจตัดพจน์ไม่เชิงเส้นนี้ออกไม่ได้ และหากพื้นผิวมีความซับซ้อนด้วยแล้วการตัดพจน์ไม่เชิงเส้นออกโดยกำหนดให้มีความเร็วในทิศทางเดียวจะทำให้ผลเฉลยคลาดเคลื่อนไปได้ จะเห็นว่าปัญหามีความ

ซับซ้อนและไม่เป็นเชิงเส้นจึงไม่สามารถแก้ปัญหาเพื่อหาคำตอบที่แท้จริงได้ แต่หากเมื่อประมาณให้ Re มีค่าน้อยมากและกำหนดให้ความเร็วมีทิศทางตามแนวของท่อ จะสามารถตัดพจน์ไม่เชิงเส้นทิ้งได้

เพื่อที่จะพิจารณาผลของความซับซ้อนของพื้นผิว กับความดันและอัตราการไหล จึงลดความซับซ้อนและพิจารณาปัญหาเป็น 2 มิติโดยมีผนังด้านหนึ่งเรียบและขรุขระและมีความลึกอนันต์ดังเช่นตัวอย่างดังรูปที่ 2.14 (Bruus, 2008)



รูปที่ 2.14 (ก) ไมโครแชนแนล 2 มิติ ที่มองจากด้านบน ซึ่งมีความเรียบด้านหนึ่งและมีความขรุขระด้านหนึ่ง มีความกว้าง w และมีความยาว L โดยกำหนดให้ไมโครแชนแนลมีการเปลี่ยนแปลงความกว้างบริเวณพื้นผิว (shape-perturbed) และถูกผลักดันด้วยความดัน Δp ที่ $z = 0$

(ข) ความยาวไร้หน่วย $\tilde{\alpha}$ และ $\tilde{c}$ ซึ่งนิยามขึ้นให้เป็นตัวแปรไร้หน่วย ในขอบเขตที่มีความกว้างและยาว 1 หน่วย

เมื่อทำกระบวนการเช่นเดิม จะได้สมการความต่อเนื่องเป็น

$$\left[\frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{c}} + \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{\alpha}} \right] + \alpha \left[\frac{\partial \lambda(\tilde{c})}{\partial z} \tilde{\alpha} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{\alpha}} + \lambda(\tilde{c}) \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{\alpha}} \right] = 0 \quad (2.128)$$

เมื่อตัดเทอมไม่เชิงเส้นออกโดยประมาณว่า $Re \ll 1$ และแทน (2.125) ในสมการนาเวียร์-สโตกส์ (2.47) และเขียนแยกองค์ประกอบความเร็วแต่ละแนวแกนตามลำดับได้ดังนี้

$$-\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\alpha}} + \alpha \lambda(\tilde{c}) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\alpha}} = 0 \quad (2.129 \text{ ก})$$

$$\left[\frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \tilde{a}^2} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{c}} \right] - \alpha \left[2\lambda(\tilde{c}) \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \tilde{a}^2} - \frac{\partial \lambda(\tilde{c})}{\partial z} \tilde{a} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{a}} \right] = 0 \quad (2.129 \text{ ข})$$

เมื่อใช้เงื่อนไขที่ว่า องค์ประกอบของความเร็วในแนวแกน x และเกรเดียนต์ของความดันตามแนวแกน x มีค่าเป็นศูนย์ แล้วแทน (1.125) ใน (2.126) และ (2.127) จะเขียนพจน์การประมาณลำดับที่ศูนย์ ในสมการความต่อเนื่องและสมการนาเวียร์-สโตกส์ตามลำดับได้ดังนี้

$$\frac{\partial \tilde{v}_z^0}{\partial \tilde{c}} + \frac{\partial \tilde{v}_x^0}{\partial \tilde{a}} = 0 \quad (2.130)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}^0}{\partial \tilde{a}} = 0 \quad (2.131)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_x^0}{\partial \tilde{a}^2} = 12 \frac{\partial \tilde{p}^0}{\partial \tilde{c}} \quad (2.132)$$

โดยใช้เงื่อนไขขอบเขต ตามรูปที่ 2.12 จะได้คำตอบดังนี้

$$\tilde{v}_x^0(\tilde{a}, \tilde{c}) = 0 \quad (2.133 \text{ ก})$$

$$\tilde{v}_z^0(\tilde{a}, \tilde{c}) = 6\tilde{a}(1-\tilde{a}) \quad (2.133 \text{ ข})$$

$$\tilde{p}^0(\tilde{a}, \tilde{c}) = 1 - \tilde{a} \quad (2.133 \text{ ค})$$

สำหรับการประมาณในลำดับที่หนึ่ง เมื่อแทน (2.131) สมการความต่อเนื่องและสมการนาเวียร์-สโตกส์จะเขียนได้ดังนี้

$$\left[\frac{\partial \tilde{v}_z^1}{\partial \tilde{c}} + \frac{\partial \tilde{v}_x^1}{\partial \tilde{a}} \right] + \alpha \left[\frac{\partial \lambda(\tilde{c})}{\partial z} \tilde{a} \frac{\partial \tilde{v}_z^1}{\partial \tilde{a}} + \lambda(\tilde{c}) \frac{\partial \tilde{v}_x^1}{\partial \tilde{a}} \right] = 6 \frac{\partial \lambda(\tilde{c})}{\partial z} \tilde{a}(1-\tilde{a}) \quad (2.134 \text{ ก})$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_z^1}{\partial \tilde{a}^2} = 12 \frac{\partial \tilde{p}^1}{\partial \tilde{c}} + 2\lambda(\tilde{c}) \frac{\partial^2 \tilde{v}_z^0}{\partial \tilde{a}^2} = 12 \frac{\partial \tilde{p}^1}{\partial \tilde{c}} - 24\lambda(\tilde{c}) \quad (2.134 \text{ ข})$$

$$\frac{\partial \tilde{p}^1}{\partial \tilde{a}} = 0 \quad (2.134 \text{ ค})$$

โดยใช้เงื่อนไขขอบเขต ที่ของไหลไม่ลื่นไหลบริเวณขอบเขตของท่อจะได้คำตอบของสมการดังนี้

$$\tilde{v}_x^0(\tilde{a}, \tilde{c}) = 6 \frac{\partial \lambda(\tilde{c})}{\partial z} \tilde{a}^2(1-\tilde{a}) \quad (2.135 \text{ ก})$$

$$\tilde{v}_z^1(\tilde{a}, \tilde{c}) = -6\lambda(\tilde{c})\tilde{a}(1-\tilde{a}) \quad (2.135 \text{ ข})$$

$$\tilde{p}^1(\tilde{a}, \tilde{c}) = 3 \int_0^{\tilde{c}} \lambda(s) ds \quad (2.135 \text{ ค})$$

เมื่อรวมผลของสมการทั้งสอง แทน (2.133) และ (2.131) ลงใน (2.125) และเปลี่ยนตัวแปรกลับจากสมการไร้หน่วยให้เป็นสมการที่มีหน่วยจะได้ว่า

$$v_x(x, z) = \gamma \frac{w_0^2 \Delta p}{2\eta L} \alpha \frac{\partial \lambda(\tilde{c})}{\partial z} \frac{x^2}{w(z)^2} \left[1 - \frac{x}{w(z)} \right] \quad (2.136 \text{ ก})$$

$$v_z(x, z) = \frac{w_0^2 \Delta p}{2\eta L} \left[1 - \alpha \lambda \left(\frac{z}{L} \right) \right] \frac{x}{w(z)} \left[1 - \frac{x}{w(z)} \right] \quad (2.136 \text{ ข})$$

$$p(x, z) = p^* + \Delta p \left[1 - \frac{z}{L} + 3\alpha \int_0^{z/L} \lambda(s) ds \right] \quad (2.136 \text{ ค})$$

เมื่อหาอัตราการไหล โดยการอินทิเกรตพื้นที่หน้าตัดกับความเร็วตามความลึกตั้งแต่ 0 ถึง D และตั้งแต่ 0 ถึง $w(x)$ จะได้ว่า

$$Q = \int_0^D \int_0^{w(x)} v_z dx dy = D \int_0^{w(x)} \frac{w_0^2 \Delta p}{2\eta L} \left[1 - \alpha \lambda \left(\frac{z}{L} \right) \right] \frac{x}{w(z)} \left[1 - \frac{x}{w(z)} \right] dx \quad (2.137 \text{ ก})$$

$$Q = D \frac{w_0^2 \Delta p}{2\eta L} \left[1 - \alpha \lambda \left(\frac{z}{L} \right) \right] w(z) \int_0^{w(x)} \frac{x}{w(z)} \left[1 - \frac{x}{w(z)} \right] \frac{dx}{w(z)} \quad (2.137 \text{ ข})$$

$$Q = D \frac{w_0^2 \Delta p}{2\eta L} \left[1 - \alpha \lambda \left(\frac{z}{L} \right) \right] w_0 \left[1 + \alpha \lambda \left(\frac{z}{L} \right) \right] \frac{1}{6} = D \frac{w_0^3 \Delta p}{12\eta L} - \left[\alpha \lambda \left(\frac{z}{L} \right) \right]^2 \quad (2.137 \text{ ค})$$

$$Q = D \frac{w_0^3 \Delta p}{12\eta L} - \left[\alpha \lambda \left(\frac{z}{L} \right) \right]^2 = Q_0 - \left[\alpha \lambda \left(\frac{z}{L} \right) \right]^2 \quad (2.138)$$

นิยาม $Q_p = \left[\alpha \lambda \left(\frac{z}{L} \right) \right]^2$ และพิจารณา (2.138)

$$\Delta p = \frac{12\eta L}{D w_0^3} (Q + Q_p) = R_h Q + R_h Q_p \quad (2.139)$$

นั่นคือ หากค่า $\alpha > 1$ จะเกิดพจน์ความดันต้านทานการไหลเพิ่มขึ้นอีก $R_h Q_p$ จากการไหลในท่อแบบอุดมคติที่มีเพียงพจน์ $R_h Q$ นั่นคือต้องการความดันในการผลักดันของไหลมากกว่าในกรณีที่เป็นท่อราบเรียบ ในปริมาณหนึ่ง แต่เมื่อ $\alpha^2 \ll 1$ ซึ่งสอดคล้องกับ perturbation theory พจน์ของความซับซ้อนซึ่งอยู่ในรูปของ พจน์การประมาณ จะมีค่าน้อยมากจนตัดทิ้งได้ แล้วเขียน(2.139)ใหม่ตามนิยาม (2.118) จะได้ว่า

$$\Delta p = \frac{12\eta L}{D \langle w^3 \rangle} Q = R_h Q \quad (2.140)$$

ซึ่งท้ายที่สุดแล้วสมการนี้ยังคงเป็นไปตามสมการความต่อเนื่อง และมีรูปแบบของความต้านทานการไหล เช่นเดิมและไม่เปลี่ยนแปลงไป จากกรณีการไหลแบบอุดมคติ หากสามารถหาค่าเฉลี่ยความกว้างยกกำลังสามของ w^3 ซึ่งเป็นตัวแทนที่แท้จริงของระบบได้

แต่อย่างไรก็ตามได้มีผู้ศึกษา ผลของความดันที่ลดลงกับอัตราการไหลในไมโครแชนแนลที่ขรุขระซึ่งได้ผลต่างจากตัวทฤษฎีอย่างมีนัยสำคัญ เช่นรายงานของ Mala และ Li (1990) ที่ทำการทดลองวัดค่าความดันสูญเสียและอัตราการไหลของน้ำในท่อตรง พื้นที่หน้าตัดวงกลมในระดับ 50-254 μm ที่ทำจากโลหะสแตนเลสและแก้ว (fuse silica) เทียบกับทฤษฎีของไหลแบบฉบับ พบว่าที่

เลขเรย์โนลด์ต่ำๆสามารถประมาณได้ว่าผลการทดลองสอดคล้องกับการไหลตาม Poiseuille flow theory แต่เมื่อเลขเรย์โนลด์สูงขึ้น การไหลในท่อขนาดเล็กจะเกิดการสูญเสียความดันไปมากกว่าทฤษฎี ซึ่งเป็นผลให้ตัวประกอบความเสียดทาน (friction factor ซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อ 2.3) มีค่าเพิ่มขึ้นกว่าค่าทางทฤษฎีของไหลแบบฉบับ อย่างมีนัยสำคัญ และขึ้นกับเลขเรย์โนลด์ แต่ก็ได้ให้คำอธิบายว่าอาจเป็นผลของความขรุขระบนพื้นผิวไมโครแชนแนลได้เช่นกัน

เพื่อทดสอบผลของสภาพการมีขั้วและผลของความหนืดต่อการไหลในระดับไมโครเมตร Judy *et. al.* (2002) ได้ทำการทดลองเช่นเดียวกันกับท่อตรงที่มีพื้นที่หน้าตัดสี่เหลี่ยม ในช่วงเส้นผ่านศูนย์กลาง 15 ถึง 150 μm แต่เพิ่มชนิดของของไหล เป็นน้ำ methanol และ isopropanol แต่กลับพบว่าไม่พบความแตกต่างไปจากทฤษฎีของสโตกส์อย่างมีนัยสำคัญซึ่งให้เหตุผลว่าอาจเป็นไปได้ว่าถูกจำกัดไว้ด้วยความคลาดเคลื่อนในการทดลอง

สำหรับผลของความขรุขระที่มีต่อการไหล Kandlikar *et. al.* (2005) ได้ทำการทดลองหาผลของความขรุขระบนพื้นผิวของไมโครแชนแนลตรงพื้นที่หน้าตัดสี่เหลี่ยม ที่เส้นผ่านศูนย์กลางไฮดรอลิก 300-750 μm โดยสร้างความขรุขระบนผนังเป็นรูปฟันเลื่อย แล้วทดลองหาค่าสัมประสิทธิ์ความต้านทานการไหล พบว่าเมื่อใช้เส้นผ่านศูนย์กลางไฮดรอลิกยังผลที่ปรับแก้จาก Darcy factor โดยการเพิ่มผลของความขรุขระเข้าไปจะทำให้ค่าที่ได้สอดคล้องกับการทดลองเพิ่มขึ้นอีก 5 % และ Taylor *et. al.* (2006) ยังตีพิมพ์ผลงานที่ให้ข้อมูลการสนับสนุนการทดลองนี้อีกครั้งหนึ่ง เช่นเดียวกับ Cao *et. al.* (2006) ที่ศึกษาผลของความขรุขระต่อการไหลของแก๊สอาร์กอนในไมโครแชนแนลในเงื่อนไขของการไหลที่มีการลื่นไถลในท่อแพลตฟอร์มก็พบว่าความขรุขระก็มีผลต่อการไหลอย่างมีนัยสำคัญเช่นเดียวกัน โดยสัมประสิทธิ์ความต้านทานการไหลของไมโครแชนแนลที่มีค่าความขรุขระจะมีค่ามากกว่าสัมประสิทธิ์ความต้านทานการไหลไมโครแชนแนลที่ราบเรียบ

ส่วนการศึกษาทางด้านทฤษฎีด้วยแบบจำลองทางคอมพิวเตอร์ของ Rawool *et. al.* (2006) ซึ่งแก้ปัญหาของการไหลที่ไหลผ่านไมโครแชนแนลที่สร้างให้มีผิวขรุขระที่ยื่นเข้าไปในไมโครแชนแนลเป็นรูปสี่เหลี่ยม สามเหลี่ยม และสี่เหลี่ยมคางหมูหันด้านคู่ขนานที่สั้นเข้าไปในไมโครแชนแนล พบว่าสัมประสิทธิ์ความต้านทานการไหลจะเพิ่มขึ้นอย่างไม่เป็นเชิงเส้นกับความสูงของรูปแบบความขรุขระ และสัมประสิทธิ์ความเสียดทานดังกล่าวจะมีค่าลดลงเมื่อเปลี่ยนรูปร่างความขรุขระเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู (Chen *et. al.*, 2009)

2.4 การไหลของของไหลที่ขึ้นกับเวลา

เมื่อการไหลเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา สมการนาเวียร์-สโตกส์ ต้องรวมพจน์ $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ เข้าไว้

ด้วย ดังนี้ $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{V} + f_{body}$ ซึ่งมีผลทำให้สมการ มีความซับซ้อนมากขึ้น

จึงมีการอธิบายระบบของไหลอีกแบบหนึ่ง ซึ่งลดความซับซ้อนของการไหลลง โดยอาศัยการประมาณลำดับที่ 1 แบบ Lump ซึ่งอธิบายการไหลของของไหลผ่านตัวแปร ความดันและอัตราการไหล และคุณลักษณะของท่อ โดยจะกล่าวต่อไปใน Equivalent Circuit theory (EC theory) (Vdel, 2006)

ในบางกรณีการไหลที่ขึ้นกับเวลาสามารถหาคำตอบได้ซึ่งจะแสดงดังต่อไปนี้คือ การเริ่มต้นการไหลไปสู่การไหลแบบ Poiseuille และหยุดไหลจากการไหลแบบ Poiseuille ซึ่งเกี่ยวข้องกับการไหลในไมโครเซนแนลมากที่สุด

สำหรับการเริ่มและหยุดไหลจะแบ่งเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 การหยุดไหลของของไหลในท่อจากการไหลแบบ Poiseuille

เมื่อ $t > 0$ ที่ปลายท่อด้านขาเข้าบริเวณ $x = 0$ ความดันบริเวณทางเข้า $p(0) = \Delta p + p^*$ และปลายท่อด้านขาออกบริเวณ $x = L$ มีความดัน $p(L) = p^*$

แต่เมื่อ $t = 0$ ความดัน Δp จะถูกนำออกจากระบบไปทันที จนความดันบริเวณปลายท่อทั้งสองด้านมีค่าเท่ากันซึ่งจะได้ว่า $p(0) = p(L) = p^*$ เมื่อให้ท่อมีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยม และผนังท่อกมีความราบเรียบตามรูปที่ 2.7 สมการนาเวียร์-สโตกส์จะลดรูปเป็น

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (2.141)$$

เมื่อ $\vec{V}(\vec{r}) = u(y, z, t)\hat{x}$ เป็นอิสระกับ x และ พจน์ ไม่เชิงเส้น $(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}$ ถูกตัดออกด้วยสมมาตรของรูปร่างท่อที่บังคับให้ของไหลมีความเร็วในแนวแกนเดียว

$$\frac{\partial u(y, z, t)}{\partial t} = \nu \left[\frac{\partial^2 u(y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(y, z, t)}{\partial z^2} \right] \quad (2.142)$$

เงื่อนไขขอบเขต และ เงื่อนไขเริ่มต้นของระบบ จะเป็นดังนี้

$$u(\pm \frac{\omega}{2}, z, t) = 0, u(x, 0, t) = 0, u(x, h, t) = 0 \quad (2.143 \text{ ก})$$

$$u(y, z, 0) = \frac{4h^2 \Delta p}{\pi^3 \eta L} \sum_{n, \text{odd}} \frac{1}{n^3} \left[1 - \frac{\cosh(n\pi \frac{y}{h})}{\cosh(n\pi \frac{\omega}{2h})} \right] \sin(n\pi \frac{z}{h}) \quad (2.143 \text{ ข})$$

$$u(y, z, \infty) = 0 \quad (2.143 \text{ ค})$$

$$\left. \frac{\partial u(y, z, 0)}{\partial y} \right|_{y=\pm \omega/2} = \left. \frac{\partial u(y, z, 0)}{\partial z} \right|_{z=0, h} = 0 \quad (2.144 \text{ ง})$$

โดยที่ $u(y, z, 0) = u(y, z)$ ซึ่งเป็นคำตอบของการไหลที่สภาวะคงตัวของการไหลแบบ Poiseuille เนื่องจาก สมการ (2.141) เป็นสมการอนุพันธ์เชิงเส้นแบบ homogeneous ซึ่งสามารถใช้การกระจาย โอเกนฟังก์ชันเพื่อหาคำตอบสมการได้ดังนี้

$$u(x, z, t) = \sum_{n,m} \tilde{C}_{nm} u_{nm}(y, z, t) \quad (2.144)$$

เมื่อ $\tilde{C}_n$ เป็นสัมประสิทธิ์การกระจายที่ไร้หน่วย

$$u_{nm}(x, z, t) = T_{nm}(t) \tilde{u}_{nm}(y, z) = T_{nm}(t) Y_{nm}(y) Z_{nm}(z) \quad (2.145)$$

เมื่อแทน (2.145) ใน (2.142) และหารตลอดด้วย $T_{nm}(t) \tilde{u}_{nm}(y, z)$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{Y_{nm}(y)} \frac{\partial^2 Y_{nm}(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{Z_{nm}(z)} \frac{\partial^2 Z_{nm}(z)}{\partial z^2} - \frac{1}{v T_{nm}(t)} \frac{\partial T_{nm}(t)}{\partial t} = 0 \quad (2.146)$$

ซึ่งสามารถแยกตัวแปรได้ โดยกำหนด ให้

$$\frac{1}{Y_{nm}(y)} \frac{\partial^2 Y_{nm}(y)}{\partial y^2} = -n^2 \quad \text{จะได้ว่า } Y_{nm}(y) = A_{nm} \cos ny + B_{nm} \sin ny \quad (2.147)$$

$$\frac{1}{Z_{nm}(z)} \frac{\partial^2 Z_{nm}(z)}{\partial z^2} = -m^2 \quad \text{จะได้ว่า } Z_{nm}(y) = C_{nm} \cos mz + D_{nm} \sin mz \quad (2.148)$$

$$\frac{1}{v T_{nm}(t)} \frac{\partial T_{nm}(t)}{\partial t} = n^2 + m^2 \quad \text{จะได้ว่า } T_{nm}(t) = E_{nm} e^{-v(n^2+m^2)t} \quad (2.149)$$

โดยใช้เงื่อนไขว่าของไหลไม่มีการเลื่อนไหลบริเวณขอบท่อ และเงื่อนไขที่ว่าคำตอบของสมการต้องมีความต่อเนื่องและมีความเร็วมากที่สุดบริเวณกึ่งกลางท่อ ตาม (2.143 ก) (2.143 ค) และ (2.143 ง) จะได้ว่า

$$u(x, z, t) = \sum_{k, \text{odd}} \sum_{l, \text{odd}} C_{kl} \cos\left(\frac{k\pi}{w} y\right) \sin\left(\frac{l\pi}{h} z\right) e^{-v\left(\left(\frac{k\pi}{w}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{h}\right)^2\right)t} \quad (2.150)$$

จาก (2.143 ข)

$$u(x, z, t) = \sum_{k, \text{odd}} \sum_{l, \text{odd}} C_{kl} \cos\left(\frac{k\pi}{w} y\right) \sin\left(\frac{l\pi}{h} z\right) = \frac{4h^2 \Delta p}{\pi^3 \eta L} \sum_{n, \text{odd}} \frac{1}{n^3} \left[1 - \frac{\cosh(n\pi \frac{y}{h})}{\cosh(n\pi \frac{w}{2h})} \right] \sin(n\pi \frac{z}{h}) \quad (2.151)$$

หาค่า C_{kl} โดยคูณ (2.151) ด้วย $\cos\left(\frac{p\pi}{w} y\right) \sin\left(\frac{q\pi}{h} z\right)$ แล้วอินทิเกรตในช่วงโดเมนของท่อ

$$\begin{aligned} \int_{-w/2}^{w/2} \int_0^h \sum_{k, \text{odd}} \sum_{l, \text{odd}} C_{kl} \cos\left(\frac{k\pi}{w} y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{w} y\right) \sin\left(\frac{l\pi}{h} z\right) \sin\left(\frac{q\pi}{h} z\right) dz dy = \\ \int_{-w/2}^{w/2} \int_0^h \frac{4h^2 \Delta p}{\pi^3 \eta L} \sum_{n, \text{odd}} \frac{1}{n^3} \left[1 - \frac{\cosh(n\pi \frac{y}{h})}{\cosh(n\pi \frac{w}{2h})} \right] \sin(n\pi \frac{z}{h}) \sin\left(\frac{q\pi}{h} z\right) \cos\left(\frac{p\pi}{w} y\right) dz dy \end{aligned} \quad (2.152)$$

$$C_{kl} = \frac{8h^2 \Delta p}{\pi^3 \eta w L} \int_{-w/2}^{w/2} \frac{1}{n^3} \left[1 - \frac{\cosh(l\pi \frac{y}{h})}{\cosh(l\pi \frac{w}{2h})} \right] \cos\left(\frac{k\pi}{w} y\right) dy \quad (2.153)$$

เมื่อแทนค่า k, l ที่เป็นคี่จะได้ว่า

$$C_{kl} = \frac{16h^2 \Delta p}{\pi^3 \eta w L} \frac{1}{n^3} (-1)^{(k+3)/2} \left[\left(\frac{w}{k\pi} \right) - \left(\frac{\left(\frac{k\pi}{w} \right)}{\left(\left(\frac{k\pi}{w} \right)^2 + \left(\frac{l\pi}{h} \right)^2} \right)} \right] \quad (2.154)$$

แทน C_{kl} ใน (2.150)

$$u(x, z, t) = \sum_{k, \text{odd}} \sum_{l, \text{odd}} \frac{16h^2 \Delta p}{\pi^3 \eta w L} \frac{(-1)^{(k+3)/2}}{n^3} \left[\left(\frac{w}{k\pi} \right) - \left(\frac{\left(\frac{k\pi}{w} \right)}{\left(\left(\frac{k\pi}{w} \right)^2 + \left(\frac{l\pi}{h} \right)^2} \right)} \right] \cos \frac{k\pi}{w} y \sin \frac{l\pi}{h} z e^{-\sqrt{\left(\frac{k\pi}{w} \right)^2 + \left(\frac{l\pi}{h} \right)^2} t} \quad (2.155)$$

กรณีที่ 2 การเริ่มไหลของของไหลในท่อไปเป็นการไหลแบบ Poiseuille

ในทางกลับกันเมื่อของไหลเริ่มไหล จนเป็นการไหลแบบ Poiseuille เมื่อใช้เงื่อนไขขอบเขต

$$u(y, z, \infty) = \frac{4h^2 \Delta p}{\pi^3 \eta L} \sum_{n, \text{odd}} \frac{1}{n^3} \left[1 - \frac{\cosh(n\pi \frac{y}{h})}{\cosh(n\pi \frac{w}{2h})} \right] \sin(n\pi \frac{z}{h}) \quad (2.156 ก)$$

$$u(y, z, 0) = 0 \quad (2.156 ข)$$

จะได้ความเร็วในขณะเริ่มไหลที่เวลา t ใดๆ

$$u(x, z, t) = \sum_{k, \text{odd}} \sum_{l, \text{odd}} \frac{16h^2 \Delta p}{\pi^3 \eta w L} \frac{(-1)^{(k+3)/2}}{n^3} \left[\left(\frac{w}{k\pi} \right) - \left(\frac{\left(\frac{k\pi}{w} \right)}{\left(\left(\frac{k\pi}{w} \right)^2 + \left(\frac{l\pi}{h} \right)^2} \right)} \right] \cos \frac{k\pi}{w} y \sin \frac{l\pi}{h} z \left(1 - e^{-\sqrt{\left(\frac{k\pi}{w} \right)^2 + \left(\frac{l\pi}{h} \right)^2} t} \right) \quad (2.157)$$

เมื่อนำ (2.157) มาเขียนกราฟที่เวลาต่างๆ ที่เงื่อนไขต่างๆ ที่สมมติให้มีลักษณะสี่เหลี่ยมจัตุรัส

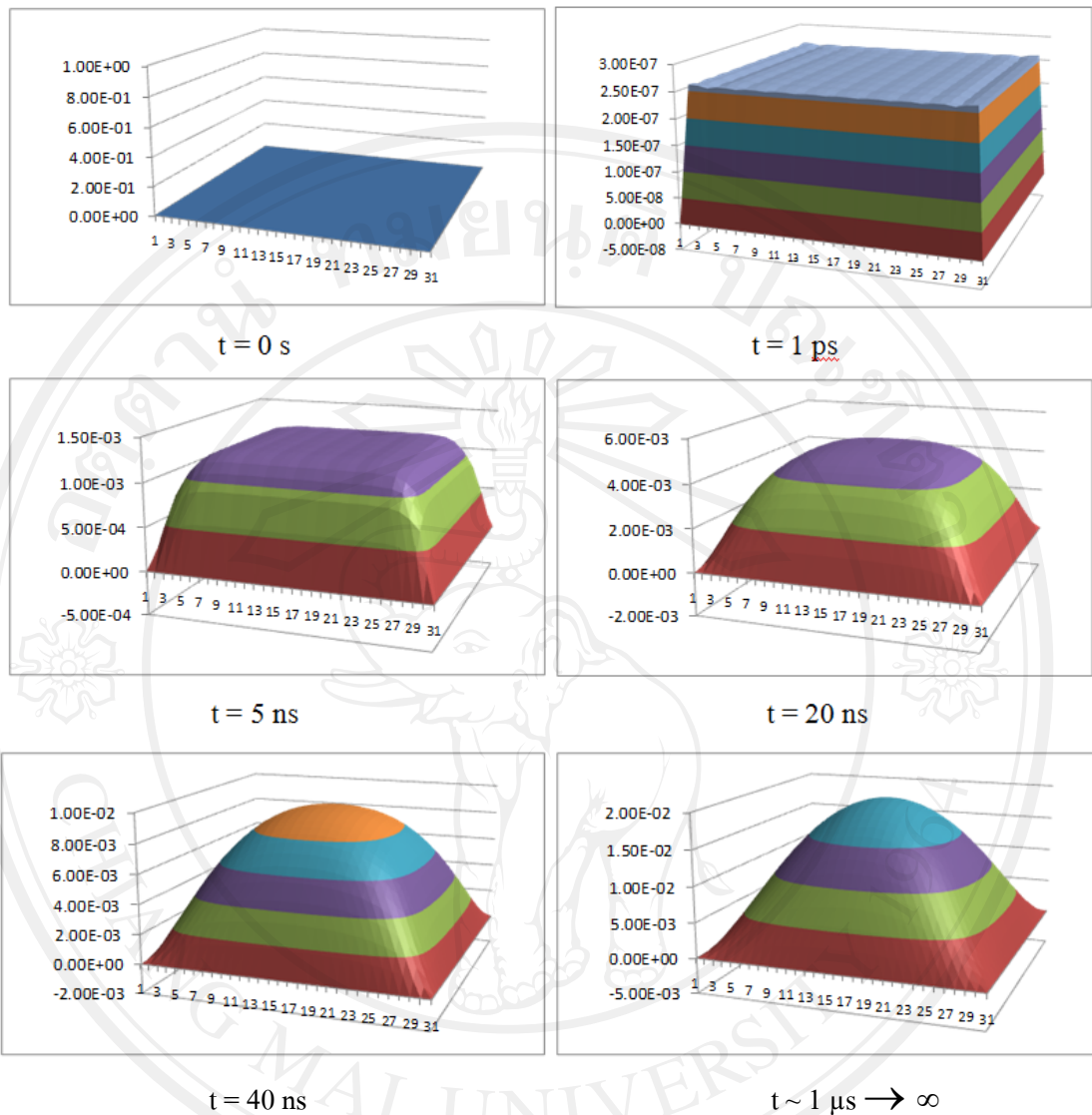
ใกล้เคียงกับขนาดความสูงของท่อที่ใช้ทดลอง กล่าวคือกำหนดให้ ดังนี้

- ความดันที่ใช้ขับเคลื่อนการไหล 50 mmHg
- ความสูง×ความกว้าง×ความยาว 30 μm × 30 μm × 26 mm (ทิศความเร็วตามแนวความยาว)
- ความหนืด 0.85 mPa·s

- ความหนาแน่นของของไหลคือน้ำ 1 kg/m³

จะได้ลักษณะของความเร็วในทิศทางการไหลเป็น เมตร/วินาที ณ ตำแหน่งต่างๆบนระนาบ

ภาคตัดขวางของท่อ ที่เวลาต่างกัน ดังรูปที่ 2.15



รูปที่ 2.15 ลักษณะพื้นผิวซึ่งแสดงขนาดความเร็วในทิศทางการไหลเป็นเมตรต่อวินาทีบนพื้นที่หน้าตัดของไมโครแชนแนลขนาด ความสูง×ความกว้าง $30 \mu\text{m} \times 30 \mu\text{m}$

จากรูปที่ 2.15 แสดงให้เห็นว่าการเปลี่ยนแปลงความเร็วจากศูนย์ไปเป็นการไหลแบบ Poiseuille นั้นใช้เวลาเพียงน้อยนิด นั่นคือระบบจะเข้าสู่สมดุลได้รวดเร็วมากจนสามารถประมาณได้ว่าการไหลใน ไมโครแชนแนลมีอัตราไหลคงที่ตลอดช่วงเวลาที่มีความดันกระทำได้ ซึ่งหากระบบเป็นท่อตรงแข็งแรงจึงไม่มีการกักเก็บของไหลไว้ภายในแล้ว จะได้ว่าความดันในระบบจะแปรผันตรงกับอัตราการไหลเสมอ ตาม Poiseuille law

2.5 แรงตึงผิวของของไหลและหยดของไหล

ความแตกต่างระหว่างฟิสิกส์ของการเคลื่อนที่ของของไหลในระบบขนาดใหญ่ (macro scale) และระบบขนาดเล็ก (micro scale) อีกอย่างที่น่าสนใจนอกเหนือไปจากการไหลแบบราบเรียบที่มักเกิดขึ้นในระบบขนาดเล็กเสมอ คือผลของความตึงผิว (surface tension) เหตุที่ทำให้เกิดปรากฏการณ์เช่นนี้ขึ้นเพราะระบบขนาดเล็ก โดยมากมีพื้นที่ผิวต่อปริมาตรมากกว่าระบบขนาดใหญ่ ผลของความตึงผิวนี้อาจทำให้เกิดปรากฏการณ์หลอดแคบหรือ capillary effect ซึ่งนำไปประยุกต์ใช้เป็น แคมพิลลารีปั๊ม (capillary pump) ซึ่งใช้ปั๊มของไหลในงานที่ไม่ต้องอาศัยแรงผลักดันจากภายนอก เช่นระบบตรวจวิเคราะห์สารต่างๆ เช่น ตรวจวินิจฉัยสารเคมีในปัสสาวะ เป็นต้น (Klasner *et. al.*, 2010)

ผลจากความตึงผิวสามารถอธิบายโดยใช้พลังงานเสรีของ Gibbs (Gibbs free energy) เมื่อระบบอยู่ในสถานะกึ่งสมดุล (quasi-equilibrium) หรือมีการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรระบบเป็นไปอย่างเชื่องช้า พลังงานเสรีจะมีค่าน้อยที่สุด ตามนิยามที่สภาวะสมดุล

$$dG = \frac{\partial G}{\partial \Omega} d\Omega = \left(\sum_i \frac{\partial G_i}{\partial \Omega} \right) d\Omega = 0 \quad (2.158)$$

เมื่อ G คือพลังงานเสรีของ Gibbs, Ω คือตัวแปรในระบบ เช่น ตำแหน่ง พื้นที่ผิวใดๆ หรือปริมาตรในระบบ

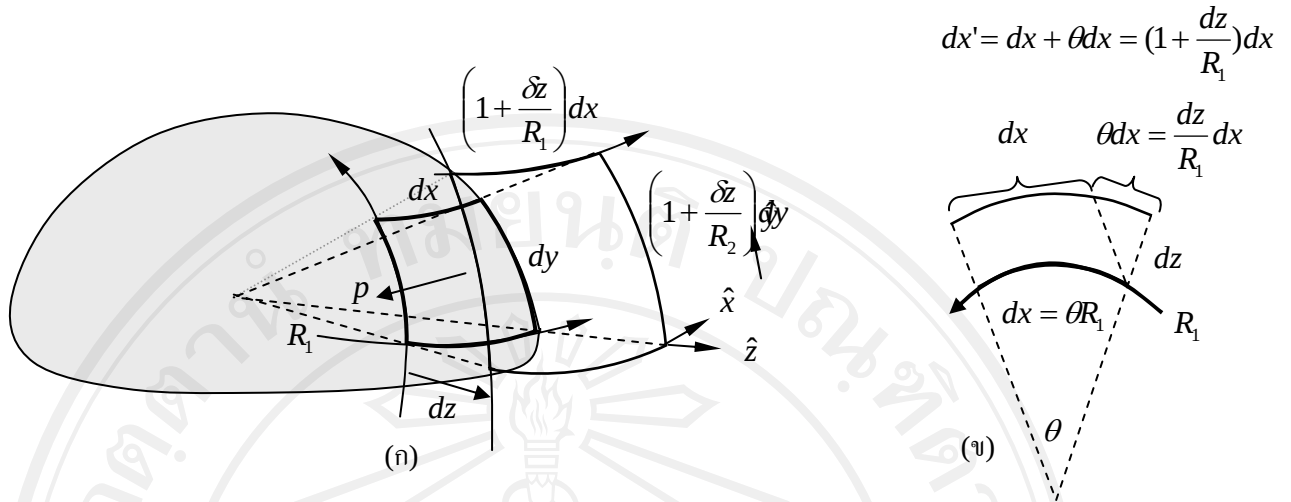
หลักสำหรับการอธิบายเกี่ยวกับแรงบนพื้นผิวคือความตึงผิว ซึ่งความตึงผิวนี้นับกับสภาพพื้นผิวของวัสดุที่สัมผัสกับของไหลนั้น ณ อุณหภูมิ T และความดัน p คงที่ ความตึงผิวบนพื้นผิว A จะนิยามได้ดังนี้

$$\gamma \equiv \left(\frac{\partial G}{\partial A} \right)_{p,T} \quad (2.159)$$

โดยความตึงผิวจะสามารถแปรความว่าเป็นแรงต่อหน่วยความยาว ได้เมื่อพิจารณาพื้นผิวรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ากว้าง w ยาว L ถ้ายืดผิวนี้ออกเป็นความยาว ΔL จาก L ไปเป็น $L + \Delta L$ แรงภายนอกที่ทำให้เกิดงานคือ $\Delta G = F\Delta L$ และทำให้พื้นผิวมีขนาดเพิ่มขึ้นอีก $w\Delta L$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\gamma = \frac{\Delta G}{\Delta A} = \frac{F\Delta L}{w\Delta L} \quad (2.160)$$

ผลของความตึงผิวมีผลทำให้ระบบมีความดันเพิ่มขึ้น เมื่อพื้นที่ผิวต่อปริมาตรมีค่าเพิ่มมากขึ้น ซึ่งแสดงให้เห็นเมื่อพิจารณาผลของแรงตึงผิวกับความดันภายในของไหลดังรูปที่ 2.16



รูปที่ 2.16 (ก) แสดงความดันภายในที่เกิดจากแรงตึงผิวที่โค้งพื้นผิว $dx dy$ ของหยดของไหล ซึ่งต่อต้านการขยายออกของพื้นผิวที่ยืดออกเป็นระยะ dz ทำให้พื้นที่ผิวของของไหล เปลี่ยนเป็น $(1 + dz/R_1)(1 + dz/R_2)$

(ข) ภาพมองจากด้านบนแสดงระยะ dx ของผิวโค้งตามแนว R_1 ที่ขยายเพิ่มขึ้นตามทิศ θ เป็น $(1 + dz/R_1)dx$

จากรูปที่ 2.16 (ก) และ 2.16 (ข) พื้นที่ที่เพิ่มขึ้น

$$dA \approx \left(\frac{dz}{R_1} + \frac{dz}{R_2} \right) dx dy \equiv \left(\frac{dz}{R_1} + \frac{dz}{R_2} \right) dA \quad (2.161)$$

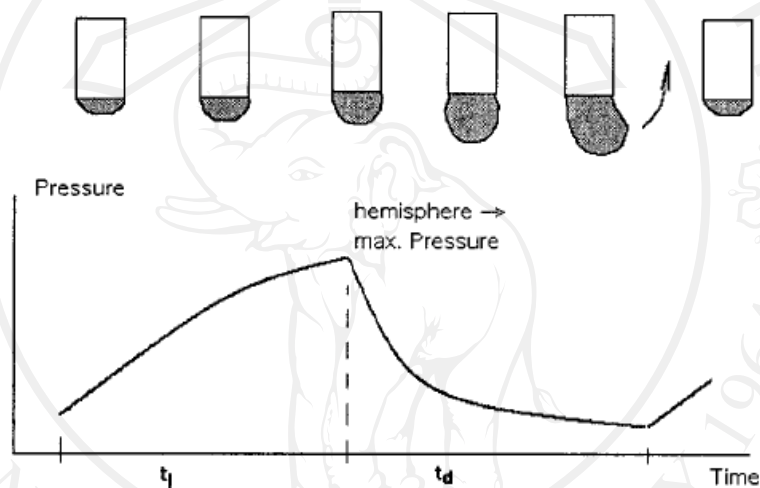
เมื่อไม่พิจารณาถึงผลของแรงโน้มถ่วง ซึ่งระบบมีเพียงการเปลี่ยนแปลงพลังงานอิสระในรูปของ ความดันที่ทำกับปริมาตรของไหล G_{pV} และ แรงตึงผิวบริเวณขอบเขต G_{surf} ดังรูปที่ 2.16 เนื่องจากพื้นที่เพิ่มขึ้นพลังงานอิสระบนพื้นผิว G_{surf} จึงเพิ่มขึ้น เมื่อระบบต้องการพลังงานรวมน้อยที่สุด พลังงานอิสระที่เกิดจากความดันในปริมาตร (pressure-volume energy) จะต้องมีค่าลดลง และเมื่อระบบอยู่ในสมดุลพื้นผิวไม่มีการเคลื่อนที่ อัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานเสรีในที่นี้ต้องเป็นศูนย์ ดังนั้นจะได้ว่า

$$dG = dG_{surf} + dG_{pV} = \gamma dA - [Adz] \Delta p_{surf} = 0 \quad (2.162)$$

จาก (1.162) จะได้สมการ Young-Laplace equation

$$\Delta p_{surf} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \gamma \quad (2.163)$$

สำหรับการไหลด้วยความเร็วต่ำด้วยอัตราการไหลคงที่เช่นหยดน้ำที่ไหลออกจากภาชนะขนาดเล็กที่รั่วสู่อากาศ เช่นการค่อยๆดันกระบอกฉีดยาบรรจุน้ำที่ต่อกับเข็มฉีดยาปลายเล็กจนกระทั่งหยดน้ำหลุดออก ความตึงผิวจะมีผลทำให้ความดันในระบบเปลี่ยนแปลงโดยมีลักษณะเปลี่ยนแปลงไปดังรูปที่ 2.17 ค่าความดันในระบบจะมีค่ามากที่สุดเมื่อรัศมีความโค้งพื้นผิวของเหลวมีค่าเท่ากับรัศมีของท่อซึ่งเป็นค่ารัศมีความโค้งที่น้อยที่สุดที่เกิดขึ้นได้กับระบบ (กรณีที่ท่อมีระนาบหน้าตัดตั้งฉากกับความยาว) หลักการนี้ยังถูกนำไปใช้กับการวัดแรงตึงผิวของของไหลวิธีหนึ่งซึ่งเรียกว่า Maximum bubble pressure tensiometry (Fainerman *et. al.*, 2004) ซึ่งระบบจะมีความดันมากที่สุดเมื่อรัศมีความโค้งของหยดของไหล เท่ากับรัศมีของท่อ



รูปที่ 2.17 แสดงรูปแบบของค่าความดันในแต่ละขณะที่เกิดหยดของเหลวบริเวณปลายท่อที่เวลาต่างๆ (ลูกศรในรูปที่แสดงว่าหยดของเหลวได้หลุดออกจากท่อไป)
(Fainerman *et. al.*, 2004)

สำหรับการพิจารณาการละทิ้งผลของแรงตึงผิวในการไหลในท่อจะพิจารณาจาก ตัวแปรไร้หน่วยคือเลขแคพิลลารี (capillary number) ซึ่งบ่งถึงสัดส่วนของแรงหนืดที่กระทำกับของไหลต่อ แรงตึงผิว (surface tension forces) โดยนิยามดังนี้

$$C_a = \frac{\eta V_0}{\gamma} \quad (2.164)$$

บทบาทของแรงตึงผิวในสมการ นาเวียร์-สโตกส์ สำหรับการวิเคราะห์การไหลของของไหลบริเวณรอยต่อของของไหลสองชนิด สมการ Young-Laplace จะถูกใช้กำหนด เงื่อนไขขอบเขตบริเวณรอยต่อของของไหลทั้งสองชนิด ในทิศทางที่ตั้งฉากกับพื้นผิว $\hat{n}$ ซึ่งในกรณีนี้ความดันใน (2.163) จะถูกแทนด้วย ผลต่างความดันจากภายนอก $-(p^{(1)} - p^{(2)})$ และผลต่างความเค้นที่เกิดจาก

แรงเค้นในเนื้อของของไหลทั้งสองชนิด $\sigma_{ik}^{(1)} - \sigma_{ik}^{(2)}$ ตามลำดับ เมื่อพิจารณาทิศทางในองค์ประกอบใดองค์ประกอบหนึ่งตามทิศทางตั้งฉากกับพื้นผิวที่องค์ประกอบ n_i หนึ่งๆ จะได้ว่า

$$-(p^{(1)} - p^{(2)})n_i + (\sigma_{ik}^{(1)} - \sigma_{ik}^{(2)})n_k = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\gamma \quad (2.165)$$

แต่ทว่ารัศมีความโค้งสำหรับแต่ละปัญหามีลักษณะแตกต่างกันไป และยังมีความสำคัญกับทฤษฎีความตึงผิวเป็นอย่างมาก จึงนิยามผิวโค้งเฉลี่ย

$$\kappa(\bar{r}) \equiv \kappa_1(\bar{r}) + \kappa_2(\bar{r}) = \frac{1}{R_1(\bar{r})} + \frac{1}{R_2(\bar{r})} \quad (2.166)$$

เมื่อ $\kappa_1(\bar{r}), \kappa_2(\bar{r})$ เป็นรัศมีความโค้งที่มาทับและตัดกันเป็นมุมฉากที่จุด $\bar{r}$ ส่วน $R_1(\bar{r})$ และ $R_2(\bar{r})$ เป็นรัศมีความโค้งบนพื้นผิว เมื่อเส้นโค้งบนผิว $\bar{r}(s)$ ซึ่งตำแหน่ง $\bar{r}$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับตัวแปร s ใดๆ เช่น พิกัด x, y, z หรือ เวลา t รัศมีความโค้งเฉลี่ยเขียนให้อยู่ในรูปการเปลี่ยนแปลงของ s ได้ดังนี้

$$\kappa(s) = \frac{1}{\left|\frac{d\bar{r}(s)}{ds}\right|^3} \left| \frac{d\bar{r}(s)}{ds} \times \frac{d^2\bar{r}(s)}{ds^2} \right| \quad (2.167)$$

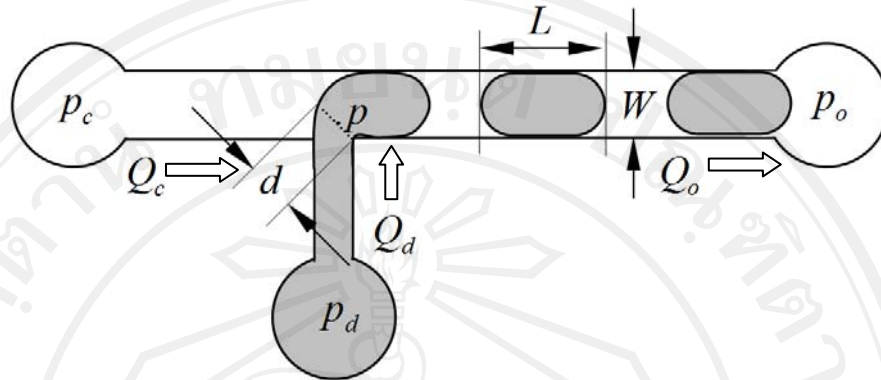
หรืออีกรูปแบบหนึ่ง

$$\kappa(s) = \bar{\nabla}_s \cdot \hat{n} \quad (2.168)$$

โดย $\bar{\nabla}_s$ คือเกรเดียนต์โอเปอเรเตอร์ตามผิวโค้งที่อยู่บนพิกัด s

จากธรรมชาติของความตึงผิวที่ระบบพยายามปรับพื้นผิวให้มีพลังงานอิสระน้อยที่สุด สำหรับระบบขนาดจิ๋วการทำให้ของไหลเป็นหยดด้วยแรงเฉือน นั้นทำได้ง่ายโดยพิจารณาจากระบบขนาดจิ๋ว ซึ่งส่วนใหญ่จะมีตัวเลขเคพิลลารีที่มีค่าน้อยกว่า 1 ซึ่งตัวอย่างหนึ่งในการประยุกต์ใช้ระบบนี้คือ การสร้างหยดสารเคมี (droplet) ที่อาจประกอบด้วยสารเคมีมากกว่า 1 ชนิด ที่ไม่ผสมกับของเหลวอีกชนิดหนึ่งซึ่งทำหน้าที่เป็นตัวพา(carrier) ซึ่ง droplet นี้เองถือเป็นภาชนะใส่สารทดลองทางเคมี หรือที่เรียกกันว่า micro reactor เมื่อทั้งหมดนี้เกิดขึ้นในระบบขนาดเล็กที่สามารถควบคุมอัตราการไหลได้อย่างแม่นยำ จึงส่งผลให้ผลการทดลองที่ได้มีความถูกต้องแม่นยำ และสามารถทำการทดลองซ้ำได้ง่ายโดยใช้ปริมาณสารในการทดลองน้อย เช่นการประยุกต์ใช้ในการสังเคราะห์อนุภาคนาโน ของแคดเมียมซัลไฟด์ (CdS) (Hung *et. al.*, 2006) ซึ่งเป็นส่วนประกอบที่พัฒนาขึ้นมาใช้ในเซลล์แสงอาทิตย์บางชนิด

การสร้าง droplets ในระบบไมโครฟลูอิดิกส์ที่นิยมใช้ งานกัน คือการสร้าง droplets แบบ
จุดต่อรูปตัว T (T-junction method)



รูปที่ 2.18 แผนภาพการเกิด droplet ในระบบไมโครฟลูอิดิกส์ของไหลต่างชนิดซึ่งไม่ผสมกันจะ
ถูกผลักดัน ด้วยความดัน p_c และ p_d มีอัตราการไหล Q_c และ Q_d ตามลำดับไปยัง
บริเวณที่มีความดันต่ำกว่า คือ p_o และมีอัตราการไหล Q_o

จากรูปที่ 2.18 เขียนสมการความดันที่จุด p โดยอาศัย EC theory ที่จะกล่าวในหัวข้อ
ต่อไป ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} p &= p_d - Q_d R_d + \gamma \kappa_d \\ p &= p_c - Q_c R_c + \gamma \kappa_c \\ p &= p_o + Q_o R_o + \gamma \kappa_o \end{aligned} \quad (2.169)$$

จากนั้นหาร (2.168) ด้วย ความต้านทานการไหลของไมโครแชนแนลในแต่ละส่วน คือ R_d , R_c
และ R_o ตามลำดับ แล้วนำทั้งสามสมการมารวมกันจะได้ว่า

$$p \left(\frac{1}{R_d} + \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_o} \right) = \left(\frac{p_d}{R_d} + \frac{p_c}{R_c} + \frac{p_o}{R_o} \right) + \gamma \left(\frac{\kappa_d}{R_d} + \frac{\kappa_c}{R_c} + \frac{\kappa_o}{R_o} \right) + Q_o - Q_d - Q_c \quad (2.170)$$

จากนั้นใช้สมการ อนุรักษ์มวล

$$Q_o = Q_d + Q_c \quad (2.171)$$

จะได้ว่า

$$p \left(\frac{1}{R_d} + \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_o} \right) = \left(\frac{p_d}{R_d} + \frac{p_c}{R_c} + \frac{p_o}{R_o} \right) + \gamma \left(\frac{\kappa_d}{R_d} + \frac{\kappa_c}{R_c} + \frac{\kappa_o}{R_o} \right) \quad (2.172)$$

เมื่อพิจารณาสมการ (2.171) พจน์แรกทางซ้ายมือ จะพบว่าพจน์นี้เป็นตัวแทนของอัตรา
การไหลรวมในระบบที่จุด p ซึ่งเกิดจาก ผลรวมการไหลจากส่วนทั้งสามของไมโครแชนแนล และ

ส่วนที่เกิดจาก แรงตึงผิว แต่กระนั้นก็ตาม การวัด การอธิบายการเกิด droplet และการเคลื่อนที่ของ ผิวโค้งเฉลี่ยทั้งสามคือ κ_d , κ_c และ κ_o นั้นเป็นการยาก และจากความซับซ้อนของพื้นผิว ทำให้ อธิบายการเกิดขึ้นของ droplet ด้วยการแก้หาคำตอบของปัญหาที่ได้จากสมการนาเวียร์-สโตกส์ ทำ ได้โดยใช้การจำลองทางคอมพิวเตอร์เช่น (Harada *et. al.*, 2006) ซึ่งใช้ Moving Particle Semi-implicit (MPS) method (Schönfeld and Rensink, 2003) ฯลฯ การแก้สมการนาเวียร์-สโตกส์ โดยประมาณเงื่อนไข ให้ระบบมีความสมมาตรของรูปร่าง เช่นการหยดออกของของไหลจากท่อ กลมทางทฤษฎีสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จาก (Eggers, 1994) ส่วนการศึกษาโดยการทดลอง ของ (Garstecki *et. al.* , 2006) โดยใช้รากฐานจากกฎการเทียบสัดส่วน (scaling law) ซึ่งอธิบายว่าเมื่อเลข แคนเพลทาร์ของระบบมีค่าน้อย แรงระหว่างผิวจะมีค่ามากกว่า แรงจากความเค้น ดังนั้นการเหวี่ยง ของเหลวให้เป็น droplet บริเวณจุดเชื่อมต่อรูปตัว T จะเป็นผลส่วนใหญ่จากความดันที่ลดลงของ droplet เนื่องจาก droplet มีขนาดใหญ่ขึ้นขณะที่มันกำลังเกิดเป็น droplet และจากผลการทดลองยัง ได้สรุปว่า การหาขนาดของ droplet ที่สร้างจากไมโครแชนแนลรูป ตัว T ซึ่งส่วนใหญ่ใช้ในงานไมโครฟลูอิดิกส์นั้น อาจไม่จำเป็นต้องหาจาก Laplace pressure และ shear stress แต่สามารถหาจาก วิธีการเทียบสัดส่วนซึ่งสอดคล้องกับ สมการอนุรักษ์มวลแทน โดยมีการประมาณดังรูปที่ 2.18 เมื่อ กำหนดให้ ความเร็วในการเหวี่ยง droplet ออกในไมโครแชนแนลสูง h คือ $u_s = \frac{Q_c}{hW}$ และใน ขณะเดียวกันขนาด droplet จะยืดยาวตามยาวไปทาง p_o ด้วยความเร็ว $u_g = \frac{Q_d}{hW}$ เมื่อพิจารณา ผลรวมเวลาในการเกิด droplet ซึ่งจะแบ่งได้เป็น 2 ช่วง คือช่วงที่ droplet ขยายตัวออก และช่วงเวลา ที่ droplet ถูกตัด โดยระยะเวลาที่ droplet ขยายตัวออกจะประมาณว่าของไหลไหลจากไมโคร แชนแนล ที่ต่อกับความดัน p_d ไปเป็นระยะทางเกือบเต็มท่อหรือประมาณด้วยระยะทาง W ดังนั้น ระยะเวลาที่ของไหลขยายตัวออกสู่ไมโครแชนแนลที่มีของไหลอีกชนิดไหลอยู่ คือ W / u_g ใน ขณะเดียวกันนั้น ของไหลก็จะถูกผลักไปตามแนว $p_c - p_o$ ด้วยความเร็ว u_s ส่วนระยะเวลาอีกส่วน หนึ่งที่ใช้ตัดของเหลวให้เป็น droplet จะหาได้จาก d / u_s ซึ่ง d จะขึ้นกับลักษณะหรือขนาดของไมโครแชนแนลและความยาวแปรผกผันกับเวลา ดังนั้นถ้า droplet มีความยาวทั้งหมด L จะได้ว่า

$$\frac{L}{u_g} \approx \frac{W}{u_g} + \frac{d}{u_s} \quad (2.173)$$

เมื่อเทียบสัดส่วนกับอัตราการไหลจะได้ว่า

$$\frac{L}{W} \approx 1 + \frac{du_g}{Wu_s} = 1 + \alpha \frac{Q_d}{Q_c} \quad (2.174)$$

โดย $\alpha = d / W$ เป็นค่าคงที่ของแต่ละระบบ

ซึ่ง (2.174) ใช้หาขนาดของ droplet ซึ่งขนาด ของ droplet สามารถหาได้โดยสัดส่วนของอัตราการไหล ได้ในช่วง ตัวเลขแกปิลลารีที่ใช้ในระบบไมโครฟลูอิดิกส์โดยทั่วไป ซึ่งน้อยกว่า 0.01 โดยขนาดความยาวของ droplet ขึ้นกับลักษณะของท่อและอัตราส่วนอัตราการไหลของของไหลทั้งสองชนิด ซึ่งไม่ขึ้นกับความตึงผิว แต่การเพิ่มขึ้นของความดันยังขึ้นกับความตึงผิว ดังสมการ (2.172)

2.6 ทฤษฎีวงจรสมมูลของไหล

สมการทางฟิสิกส์หลายสาขา มักประกอบด้วยระบบสมการที่แสดงถึงลักษณะของสนามเวกเตอร์ เช่นระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์ ระบบสมการการส่งถ่ายความร้อน ระบบสมการของแมกซ์เวลล์ (Maxwell equations) ซึ่งการพัฒนาแบบคอมพิวเตอร์เพื่อการคำนวณประสิทธิภาพสูงสามารถแก้ปัญหาเพื่อหาคำตอบโดยประมาณของปัญหาเหล่านี้ได้อย่างละเอียดใกล้เคียงความเป็นจริง แต่ในบางครั้ง การคำนวณด้วยระบบดังกล่าวซึ่งใช้ทรัพยากรประกอบมาก ก็ไม่จำเป็น จึงมีการคิดค้นวิธีการประมาณหลายแบบ ซึ่งให้ความถูกต้องตามอันดับการประมาณของแต่ละวิธีการประมาณโดยใช้ พารามิเตอร์แบบลัมปี (Lump-parameter) เป็นอีกวิธีการหนึ่งที่สามารถใช้กับระบบ วงจรไฟฟ้า และของไหลโดยที่แต่ละส่วนประกอบในระบบถูกแทนที่ด้วย คุณสมบัติเพียงอย่างเดียว เช่นความต้านทาน ความจุ ความเหนียวใน ลักษณะที่เหมือนกัน และทำให้ระบบสมการทางคณิตศาสตร์มีความง่ายขึ้น และสามารถใช้ประโยชน์ในการประมาณได้เป็นอย่างดี โดยการประมาณสำหรับงานในระบบไมโครฟลูอิดิกส์ จะใช้ได้ในช่วงที่ เลขเรย์โนลด์ มีค่าน้อยกว่าหนึ่ง ตัวอย่างหนึ่งของการนำวิธีการนี้ไปใช้ในการศึกษาระบบไมโครฟลูอิดิกส์สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จาก Nakata *et. al.* (2008)

2.6.1 แหล่งจ่ายของไหล

แหล่งจ่ายความดันของไหล

สำหรับแหล่งจ่ายความดันให้กับของไหล ในระบบไมโครฟลูอิดิกส์ สามารถเลือกใช้ได้หลากหลายรูปแบบซึ่งมีรูปแบบที่นิยมใช้ในระบบไมโครฟลูอิดิกส์มีดังนี้

แหล่งจ่ายความดันจากแรงโน้มถ่วง เป็นวิธีการที่ง่ายที่สุดโดยใช้ภาชนะใส่ของไหลแล้วต่อท่อความดันจากก้นภาชนะหรือหลักการ กาลักน้ำ (siphon) ซึ่งความดันในระดับที่ต้องการจะปรับได้จากระดับความสูง แต่มีข้อเสียคือไม่สามารถทำให้ระบบมีความดันคงที่ตลอดเวลาได้เพราะระดับของเหลวในแหล่งจ่ายจะลดลง ตลอดเวลา และหากต้องการให้ความดันมีค่าคงที่ต้องใช้ของไหลในปริมาณที่มาก ภาชนะหน้ากว้าง และขนาดของท่อต้องมีขนาดเล็กเพื่อที่จะประมาณได้ว่าความดันที่จ่ายออกมามีค่าคงที่

แหล่งจ่ายความดันจากปรากฏการณ์ไหลออสโมติก เป็นแหล่งจ่ายความดันที่อาศัยแรงตึงผิวในการดึงของไหลให้เคลื่อนที่ไปตามแนวของท่อ ซึ่งค่าความดันแสดงไว้ใน Bruss (2008) ซึ่งอัตราเร็วการไหล $Q \propto 1/\sqrt{t}$ ซึ่งปั๊มชนิดนี้จะใช้งานได้เมื่อมุมสัมผัสของของไหลกับผิวท่อในบรรยากาศมีค่าน้อยกว่า 90 องศา หรือมีแรงดึงดูดระหว่างโมเลกุลของไหลกับผนังท่อหรือของไหลต้องเปียกบนวัสดุที่เป็นท่อเช่นน้ำกับท่อแคปิลลารี หากของไหลไม่เปียกท่อก็จะไม่เกิดการไหลเข้ามาในท่อ เช่นปรอทที่ไม่ยอมไหลเข้าไปในท่อแคปิลลารีโดยง่าย

แหล่งจ่ายกระแสของไหล (fluid current source)

แหล่งจ่ายกระแสของไหลอาจเป็นแหล่งจ่ายมวลหรือเป็นแหล่งจ่ายปริมาตร ที่มีอัตราการไหลหรือไม่ก็ได้ ซึ่งเปรียบได้กับ (current source) ในวงจรไฟฟ้า ตัวอย่างแหล่งจ่ายกระแสของไหลที่นิยมใช้ในระบบ ไมโครฟลูอิดิกส์ เพื่อผลักก้อนมวลเช่น

แหล่งจ่ายกระแสโดยการผลักดันกระบอกสูบ การจ่ายของไหลเข้าสู่ระบบนี้เป็นระบบที่สามารถควบคุมอัตราการไหลของของไหลได้อย่างเป็นเชิงเส้นกับอัตราเร็วของการเคลื่อนที่ของกระบอกสูบ เป็นผลทำให้วิธีการนี้นิยมใช้ในระบบที่ต้องการให้ของไหลมีอัตราการไหลที่คงที่ เช่น syringe pump

แหล่งจ่ายกระแสจากปรากฏการณ์ electro osmosis ระบบนี้เป็นลักษณะการจ่ายกระแสของไหล โดยที่ต้องมีของไหลอยู่ในระบบเครือข่าย ไมโครแชนแนลอยู่ก่อนแล้ว โดยใช้แรงจากสนามไฟฟ้าภายนอกทำให้ของไหลมีประจุชนิดหนึ่ง เคลื่อนที่สัมผัสกับพื้นผิวท่อขนาดจิวหรือไมโครแชนแนลที่มีประจุต่างชนิดกัน สำหรับผลการศึกษาเพิ่มเติมหาได้จาก Yao *et. al.* (2003)

2.6.2 ความต้านทานการไหล (hydraulic resistance)

เช่นเดียวกับวงจรไฟฟ้าที่มีการสูญเสียพลังงานจากการไหลในรูปแบบของความร้อน Joule heating ระบบของไหลก็เช่นเดียวกันเมื่อมีความหนืดซึ่งเกิดจากความเสียดทานภายในของไหล พลังงานกลในการเคลื่อนที่ จะถูกเปลี่ยนเป็นพลังงานความร้อน และหยุดเคลื่อนที่ในที่สุดเมื่อนำแรงผลักดันออกจากระบบ ดังที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 2.4 สำหรับการไหลที่สภาวะคงตัวของของไหลนิวโทเนียน บีบอัดไม่ได้ แบบลามินาหรือไหลแบบราบเรียบ จะสอดคล้องกับ Poiseuille law ซึ่งเป็นไปตามสมการและนิยามความต้านทานการไหลดังนี้

$$R_h = \Delta p / Q \quad (2.175)$$

เมื่อ R_h คือความต้านทานการไหล มีหน่วยคือ $\text{Pa} \cdot \text{s} / \text{m}^3$

ซึ่งสมมูลกับวงจรไฟฟ้า คล้ายความสัมพันธ์ ตามกฎของโอห์ม โดย $R_{elec} = V_{elec} / I_{elec}$

สำหรับทฤษฎีของไหลแบบฉบับสำหรับระบบขนาดใหญ่การสูญเสียความดันหรือความต้านทานการไหลจะพิจารณาจากสมการพลังงาน ซึ่งนิยามผ่านเฮด (head) คือระยะทางหรือความสูงที่ของไหลจะเคลื่อนที่ไปได้ตามแนวดิ่ง ซึ่งจะแสดงดังต่อไปนี้

สมการอนุรักษ์พลังงานกับเฮดสูญเสียจากความต้านทานการไหล

เมื่อพิจารณาสมการอนุรักษ์พลังงาน (2.41) เมื่อระบบอยู่ในสภาวะสมดุลที่จุด 2 จุด ใน 1 มิติเมื่อรวมผลของแรงโน้มถ่วง สำหรับการไหลที่สภาวะคงตัว ที่รวมผลจากการสูญเสียพลังงานในกระบวนการผันกลับไม่ได้ จะได้สมการอัตราการส่งถ่ายพลังงานที่ไหลผ่านพื้นที่หน้าตัดในท่อ 2 จุดใดๆ โดยกำหนดให้เป็นจุดที่ 1 และ 2 ในปริมาตรที่พิจารณา ดังนี้ (Fox, et al., 2010)

$$\frac{\partial m}{\partial t} \left[(U_2 - U_1) + \left(\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{p_1}{\rho_1} \right) + \frac{1}{2} (V_2^2 - V_1^2) + g(z_2 - z_1) \right] = \frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} - \frac{\partial W}{\partial t} \quad (2.176)$$

เมื่อ $\bar{Q}$ แทนปริมาณความร้อนที่ไหลเข้าหรือออกจากระบบ

W แทนผลรวมงานที่เกิดจากการไหลและความเค้นเฉือน

U คือพลังงานภายในของไหลของแต่ละจุด

p คือความดันที่จุดแต่ละจุด

V คือความเร็วในการไหลที่จุดแต่ละจุด

z คือระดับความสูงของแต่ละจุด

g คือความเร่งจากแรงโน้มถ่วง

เมื่อไม่มีการเปลี่ยนแปลงพลังงานภายใน ไม่คำนึงถึงผลของความหนืด ของไหลบีบอัดไม่ได้ ของไหลมีความเร็วสม่ำเสมอตลอดพื้นที่หน้าตัดการไหล และพิจารณาปริมาตรไปตามแนวเส้นกระแสการไหล สมการนี้จะกลายเป็น สมการแบร์นูลลี (Bernoulli equation) นั่นเอง

แต่สำหรับของไหลขุ่นตัวไม่ได้ โดยเมื่อคำนึงถึงความเสียดทานในของไหลในสภาวะคงตัว

$$\text{จะได้ว่า} \quad U_2 - U_1 - \bar{Q} = E_{\text{loss}} > 0 \quad (2.177)$$

โดยที่ E_{loss} คือพลังงานสูญเสียต่อหนึ่งหน่วยมวลของไหล

ดังนั้นจากสมการพลังงานของระบบจะได้ว่า

$$\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} V_2^2 + gz_2 = \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} V_1^2 + gz_1 + E_{\text{loss},1,2} \quad (2.178)$$

แต่เมื่อความเร็วบนพื้นที่หน้าตัดมีความเร็วไม่สม่ำเสมอ เช่นการไหลแบบ Poiseuille ที่มีลักษณะการกระจายความเร็วเป็นรูปพาราโบลา พจน์ของพลังงานจลน์จะพิจารณาในรูป

$$\int \frac{V^2}{2} \rho \bar{V}(\bar{r}) \cdot \hat{n} dA = \frac{\partial m}{\partial t} \left(\frac{\alpha_2 \bar{V}_2^2}{2} - \frac{\alpha_1 \bar{V}_1^2}{2} \right) \quad (2.179)$$

เมื่อ α เป็นสัมประสิทธิ์พลังงานจลน์ ตรงทางเข้าหรือออก 1 และ 2

และ $\bar{V}$ เป็นความเร็วเฉลี่ยตลอดการไหล

นิยาม เหนื่อยสูญเสีย (h_{loss}) คือระยะความสูงที่สูญเสียไปในการส่งของไหลผ่านท่อ E_{loss} / g เป็นเหนื่อยสูญเสียทั้งหมดในท่อส่งของไหล มีหน่วยเป็นเมตรเช่นเดียวกัน เมื่อระบบถูกขับเคลื่อนด้วยปั๊ม ซึ่งทำงาน E_p ต่อหน่วยมวล เหนื่อยของปั๊ม $h_p = E_p / g$ จะได้สมการดังนี้

$$\frac{P_2}{\rho_2 g} + \frac{\alpha_2}{2g} V_2^2 + z_2 + h_p = \frac{P_1}{\rho_1 g} + \frac{\alpha_1}{2g} V_1^2 + z_1 + h_{loss,1,2} \quad (2.180)$$

สำหรับเหนื่อยสูญเสียในการไหลด้วยผลต่างความดันไม่มีปั๊มสำหรับขับเคลื่อน $h_p = 0$ ที่ระดับ $z_1 = z_2$ และที่สภาวะสมดุลลักษณะของความเร็วในท่อไม่เปลี่ยนแปลงไป จะได้ว่า $\alpha_1 = \alpha_2$ และใช้นิยามของความเค้นเฉือนของของไหลแบบนิวโทเนียน พิจารณาลักษณะความเร็วในท่อของไหล จะได้เป็นสมการของ Darcy-Weisbach ใช้คำนวณเหนื่อยสูญเสียสำหรับการไหลแบบยวตัวไม่ได้และมีการไหลเต็มท่อที่สภาวะคงตัว

$$h_{loss,1,2} = f \frac{L}{D_h} \frac{\bar{V}^2}{2g} \quad (2.181)$$

เมื่อ L คือความยาวของท่อ D_h คือ hydrodynamic diameter ตามนิยาม (2.70) และ f คือ ตัวประกอบความเสียดทาน (friction factor)

สำหรับการไหลในท่อแบบลามินาร์นั้นทฤษฎีของไหลแบบฉบับพบว่าตัวประกอบความเสียดทานไม่ขึ้นกับความขรุขระ โดย

$$f = 64 / \text{Re} \quad (2.182)$$

ดังที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 2.3.5 พบว่า ความขรุขระของท่อขนาดเล็กหรือไม่โครเซนแนลมีผลกับตัวประกอบความเสียดทานอย่างมีนัยสำคัญ แต่อย่างไรก็ตามผลการทดลองดังกล่าวก็ไม่ได้มีค่าแตกต่างจากทฤษฎีแบบฉบับไปมากนัก ดังนั้นจึงได้ยึดถือทฤษฎีแบบฉบับในการเปรียบเทียบผลการทดลอง เนื่องจากมีข้อมูลการทดลองที่เป็นมาตรฐานมายาวนานและระบบของไหลในไมโครฟลูอิดิกส์ ก็ควรสอดคล้องกับกฎอัตราส่วน

เหนื่อยสูญเสียในระบบท่อ

การไหลผ่านระบบท่อซึ่งประกอบด้วยท่อตรง ท่อต่อขนาดไม่เท่ากัน ท่องอ และวาล์ว การสูญเสียความดันหรือเหนื่อยสูญเสียความดันหรือเหนื่อยสูญเสียเนื่องจากความเสียดทานภายในท่อที่กระทำต่อของไหลขณะไหลเต็มท่อ จะกำหนดให้เป็น การสูญเสียหลัก (major loss : $h_{loss,f}$) ส่วนการสูญเสียจากการไหลผ่านท่อต่อขนาดไม่เท่ากัน ท่องอ และวาล์ว นั้นกำหนดให้เป็นเหนื่อยสูญเสียรอง (minor loss : $h_{loss,m}$) และเหนื่อยสูญเสียรวม (total head loss : $h_{loss,t}$) คือ

$$h_{loss,t} = h_{loss,f} + h_{loss,m} \quad (2.183 \text{ ก})$$

เมื่อ
$$h_{\text{loss},f} = f \frac{L}{D_h} \frac{\bar{V}^2}{2g} \quad (2.183 \text{ ข})$$

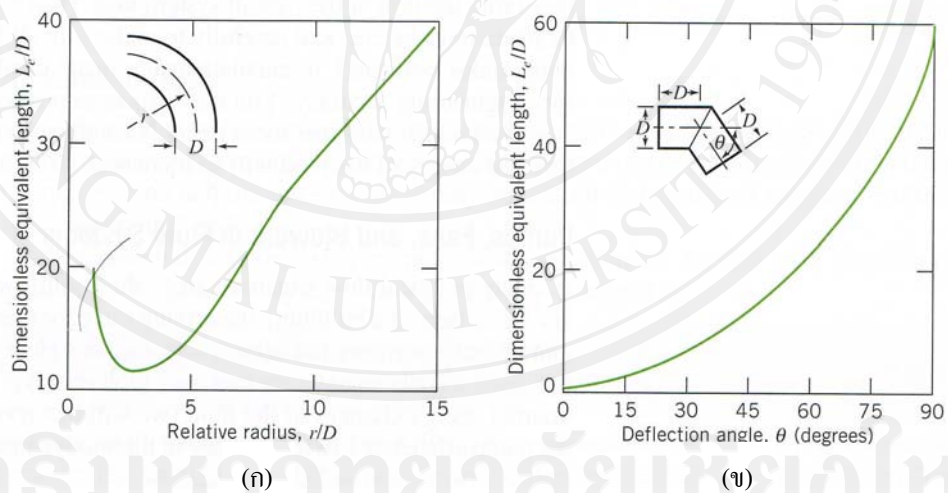
และ
$$h_{\text{loss},m} = K \frac{\bar{V}^2}{2g} = f \frac{L_e}{D_h} \frac{\bar{V}^2}{2g} \quad (2.183 \text{ ค})$$

เมื่อ K นิยามว่าเป็นสัมประสิทธิ์การสูญเสีย (loss coefficient) ซึ่งจะพิจารณาเสดสูญเสียให้เทียบเท่ากับการไหลในท่อตรง โดย กำหนด ความยาวสมมูล (equivalent length)

$$L_e = \frac{KD_h}{f} \quad (2.184)$$

อย่างไรก็ตามเมื่อ Re มีค่าสูงพบว่าความดันลดหรือเสดสูญเสียจะมีความสัมพันธ์กับความดันพลวัตโดยตรง ($\rho \bar{V}^2 / 2$) ไม่ขึ้นกับ Re ซึ่งจะพิจารณาได้ว่า $K = f$ (รูปทรงเรขาคณิตของอุปกรณ์ในระบบท่อ) แต่ระบบไมโครฟลูอิดิกส์ Re โดยส่วนใหญ่มีค่าน้อยจึงสามารถใช้ (2.182) ได้

สำหรับความยาวสมมูลในการคำนวณเสดสูญเสีย ของท่อกลมโค้งและหักมุม จะสามารถเทียบได้จากกราฟ ในรูปที่ 2.19 และสำหรับท่อรูปร่างอื่นสามารถคำนวณได้จาก D_h ในสมการ (2.49)



รูปที่ 2.19 (ก) ความยาวสมมูลของท่อโค้งรัศมีกับอัตราส่วน r/D

(ข) ขวความยาวสมมูลของท่อหักมุม กับองศา (Robert *et. al.*, 2010)

นอกจากนี้ยังมีการสูญเสียบริเวณปากทางเข้าของท่อและปลายท่อทางออกของท่อ ซึ่งขึ้นกับลักษณะทางเข้าและออก ตามเอกสารอ้างอิงของ มนตรี (2553)

ความสัมพันธ์ระหว่างตัวประกอบความเสียดทานกับความต้านทานการไหล (flow resistance)

เมื่อพิจารณาการไหลผ่านท่อกลม ที่ความดันทางเข้าและออกต่างกัน Δp การไหลอยู่ในระดับความสูงเดียวกัน มีสถานะสมมูลจาก (2.175) และ (2.180) จะได้ว่า

$$\frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{QR_{hyd}}{\rho g} = f \frac{L}{D_h} \frac{\bar{V}^2}{2g} \quad (2.185)$$

แทนค่า

$$f = 64 / \text{Re} = \frac{64\eta}{\rho \bar{V} D_h} \quad (2.186)$$

$$R_{hyd} = \frac{64\eta}{\rho \bar{V} D_h} \frac{\rho L}{D_h} \frac{\bar{V}^2}{2} \frac{4}{\pi D_h^2 \bar{V}} = \frac{128\eta L}{\pi D_h^4} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$$

ดังนั้นสำหรับกรณีของท่อโค้ง หรือท่ออหักมุม เมื่อเทียบความยาวสมมูลกับรูปที่ 2.17 จะสามารถหาความต้านทานการไหล ได้จาก (2.186)

2.6.3 ความจุการไหล (hydraulic compliance/capacitance)

จากการประมาณโดยใช้ Lump parameter ในระบบท่อการไหล ความจุการไหลหรือความยินยอมให้ไหลผ่านได้ จะใช้ในการอธิบาย ระบบที่แตกต่างไปจากการไหลของของไหลที่บีบอัดไม่ได้ เช่น การบีบอัดได้ของของไหลซึ่งพิจารณาในรูปของโมดูลัสความยืดหยุ่น (Bulk modulus) การติดของฟองอากาศในท่อ ซึ่งกีดขวางการไหล ทำให้ความดันด้านทางเข้าของระบบมีค่าเพิ่มขึ้น (H. Bruss, 2008) ความจุของไหลในระบบของไหล นิยามว่าเป็นอัตราส่วนการลดลงของปริมาตร dV_f ซึ่งก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงความดัน dp ดังนี้

$$C_{hyd} = -\frac{dV_f}{dp} \quad (2.187)$$

เช่นเดียวกับความจุของตัวเก็บประจุในวงจรไฟฟ้า $C_{elec} = \Delta Q_{elec} / \Delta V_{elec}$

2.6.4 ความเหนี่ยวนำการไหล (hydraulic inductance/ hydraulic inertia)

ความต้านทานการไหลเกิดจากความเสียดทานภายในเนื้อของไหลหรือ ความหนืด ซึ่งเปลี่ยนพลังงานกลไปเป็นพลังงานความร้อน เช่นเดียวกับความต้านทานตามกฎของโอห์ม ซึ่งพิจารณาที่ระบบในสถานะสมมูล ไม่สามารถอธิบายผลของแรงเฉื่อยได้ ค่าที่สามารถบ่งบอกถึงผลนี้ได้คือ ความเหนี่ยวนำการไหล

เมื่อพิจารณาปริมาตรของไหล V_f ซึ่งมีความหนาแน่น ρ อยู่ในท่อพื้นที่หน้าตัดสม่ำเสมอ A ความยาว l และมีความดันกระทำบนพื้นที่หน้าตัดนั้น Δp โดยไม่เกิดผลของความต้านทานการไหล เนื่องจากผลต่างความดันรวมสามารถ นำมารวมกันได้ (superposition) ในภายหลัง จากกฎข้อที่สองของนิวตัน (Newton's second law)

$$\Delta p A = \rho A l \frac{d\bar{V}}{dt} = \rho l \frac{d(A\bar{V})}{dt} \quad (2.187)$$

$$\Delta p = \frac{\rho l}{A} \frac{dQ}{dt} \equiv L_{hyd} \frac{dQ}{dt} \quad (2.188)$$

ซึ่ง (2.188) ยังคงสมมูลกับวงจรไฟฟ้าที่ $\Delta V_{elec} = L_{elec} \frac{dI_{elec}}{dt}$

2.6.5 การสร้างวงจรสมมูลของไหล (equivalent circuit modeling)

โครงข่ายไมโครเซนแนลแต่ละส่วนสามารถเขียน อุปกรณ์สมมูลได้เช่นเดียวกับวงจรไฟฟ้า สามารถใช้กฎของเคิร์ชฮอฟฟ์ (Kirchhoff law) หรือแม้แต่พิจารณาความต้านทานรวมของระบบ (impedance) ซึ่งขึ้นกับความถี่ ได้ดังรายงานของ Vedel (2009) นอกจากนั้นสามารถนำทฤษฎีนี้ไปออกแบบวงจรขยายสำหรับของไหล ซึ่งมีรายละเอียดใน Kirshner (1966) หรือการนำไปใช้ในการออกแบบระบบการไหลในไมโครเซนแนล ของ Noort และ Mccaskill (2004)