

การศึกษาและพัฒนาแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดไม่เชิงเส้น  
สำหรับการไหลที่ซับซ้อนแบบหมุนวน

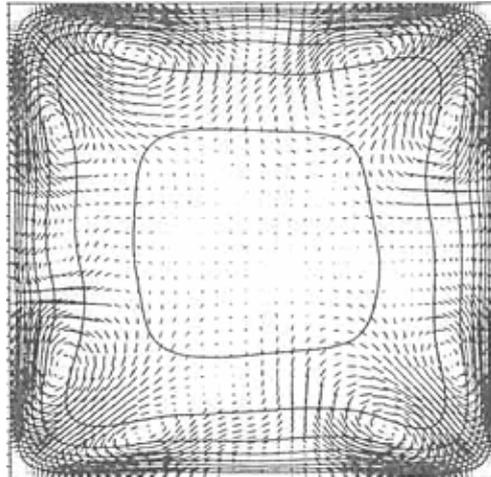
Study and Development of Non-Linear Turbulence Models  
for Complex Secondary Flows

คำนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในอุตสาหกรรมการบินนั้น มีอุปกรณ์ที่สำคัญอย่างหนึ่งนั่นก็คือ เครื่องยนต์กังหันก๊าซ ปัจจุบันได้มีการพัฒนาเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพแต่ก็ถูกจำกัดด้วยอุณหภูมิที่ออกมาจากห้องเผาไหม้ เพราะใบพัดของตัวกังหันจะทนอุณหภูมิที่สูงมากไม่ได้ จึงจำเป็นต้องมีใช้ระบบหล่อเย็นใบพัด (cooling turbine blade) มาช่วยในการลดอุณหภูมิที่สูงขึ้น โดยปรากฏการณ์การไหลในระบบหล่อเย็นใบพัดนี้มีลักษณะที่น่าสนใจ 2 สิ่งร่วมกันนั่นคือเกิดการไหลวน (secondary flows) และผลจากการหมุนของตัวใบพัด (rotating) ในระบบหล่อเย็นใบพัดนี้มีลักษณะเป็นรังสีเหลี่ยมเมื่อรวมกับผลจากการหมุนของตัวใบพัดจึงกลายเป็นกรณีศึกษาที่เรียกว่า ท่อตรงหน้าตัดสี่เหลี่ยมที่มีการหมุน

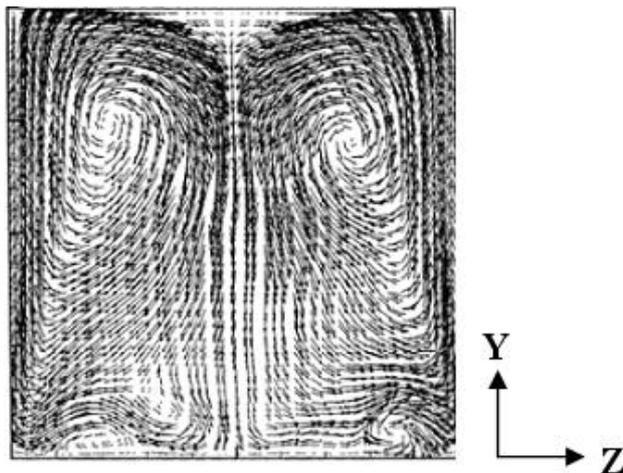
สำหรับการไหลวนนั้นเกิดมาจากกลไกอย่างใดอย่างหนึ่งใน 2 สิ่งนี้ได้แก่ แรงคอริโอลิส (Coriolis force) และ turbulence anisotropy (Prandtl 1952) สำหรับท่อตรงหน้าตัดสี่เหลี่ยมนี้ การไหลวนเกิดมาจาก turbulence anisotropy โดยเกิดการหมุนวน 2 วงการหมุนต่อ 1 มุมของท่อตั้งภาพที่ 1 Speziale (1982) ได้ทำการศึกษาพบว่า การไหลวนในท่อตรงนี้เกิดจากผลต่างของความเค้นเรย์โนลด์ตั้งฉากในระนาบที่ตั้งฉากกับการไหล นอกจากนี้ยังได้พบอีกว่าการไหลวนนี้มีปริมาณน้อยมากประมาณ 2 ถึง 3 เปอร์เซ็นต์เมื่อเทียบกับการไหลหลัก (primary flows)



ภาพที่ 1 แสดงการไหลวนที่มุมของท่อตรงหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัสจำลองการไหล  
โดยการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรง

ที่มา : Gavrilakis (1992)

สำหรับท่อตรงหน้าตัดสี่เหลี่ยมที่มีการหมุนนั้น โครงสร้างของการไหลวนได้ถูกรบกวนจากแรงคอริโอลิสที่เกิดจากการหมุนส่งผลให้จำนวนวงการหมุนของการไหลวนเปลี่ยนไปเหลือ 4 วง การหมุนดังภาพที่ 2 โดยประกอบด้วยวงการหมุนขนาดเล็ก และวงการหมุนขนาดใหญ่ Martensson et al. (2005) ได้พบว่าเมื่อความเร็วเชิงมุม เพิ่มมากขึ้นวงการหมุนขนาดใหญ่จะโตขึ้นเรื่อยๆเป็นความสัมพันธ์เชิงเส้นต่อกัน



ภาพที่ 2 แสดงการไหลวนภายในท่อตรงหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เกิดการหมุนรอบ  
แกน  $z$  จำลองการไหลโดยการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรง

ที่มา : Belhoucine et al. (2004)

ในการจำลองการไหลในปัจจุบันพบว่า large eddy simulation (LES) ได้รับความนิยมในการจำลองการไหลมากกว่า วิธีเฉลี่ยของเรย์โนลด์ (Reynolds averaged Navier-Stokes, RANS) ที่ใช้ร่วมกับแบบจำลองความปั่นป่วน (turbulence model) แต่ในงานออกแบบทางวิศวกรรมนั้น RANS มีความเหมาะสมมากกว่าเนื่องจากใช้เวลาคำนวณน้อยกว่า และไม่กินกำลังของเครื่องคอมพิวเตอร์มากเกินไป สำหรับประเภทของ RANS นั้นมี 2 ประเภทนั่นคือแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดความหนืดหมุนวนเชิงเส้น (linear eddy viscosity turbulence models) ซึ่งแบบจำลองความปั่นป่วนเชิงเส้นนี้ไม่สามารถจำลองการเกิดการไหลวนในท่อตรงได้ และแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดความหนืดหมุนวนไม่เชิงเส้น (non linear eddy viscosity turbulence models) ที่มีความถูกต้องสูงกว่าแบบเชิงเส้น ซึ่งมีความเหมาะสมกว่าในการจำลองลักษณะและปริมาณของการไหลวน

สำหรับค่าความคลาดเคลื่อนหลักในแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดความหนืดหมุนวนไม่เชิงเส้นมีมาจาก 3 ปัจจัยนั่นคือ ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากสมการความเค้นเรย์โนลด์ ความคลาดเคลื่อนเนื่องจากแบบจำลองความปั่นป่วน และความคลาดเคลื่อนเนื่องจากค่าคงที่ต่างในสมการ เพื่อเป็นการกำจัดความคลาดเคลื่อนเนื่องจากระเบียบวิธีเชิงตัวเลขโดยเหลือเพียงความสามารถของตัวสมการความเค้นเรย์โนลด์เอง งานวิจัยนี้ใช้วิธี *อะไพร์เออร์รี่* (*a priori*) เพื่อหาสมการความเค้นเรย์โนลด์ที่ดีที่สุดในการจำลองความปั่นป่วนชนิดไม่เชิงเส้น

จากนั้นได้ทำการหาแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดเชิงเส้นที่ดีที่สุด แต่เนื่องจากแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดเชิงเส้นในซอฟต์แวร์สำเร็จรูปทางพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ (computational fluid dynamic, CFD) ทั่วไปมีหลายแบบจำลอง งานวิจัยนี้จึงได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบเพื่อหาแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดเชิงเส้นที่ดีที่สุดในการจำลองการไหลวนก่อนที่จะนำไปปรับปรุงเป็นแบบไม่เชิงเส้น โดยการจำลองการไหลผ่านท่อตรงหน้าตัดสี่เหลี่ยมที่มีการหมุนแล้วดูผลของแบบจำลองที่ดีที่สุดก่อนที่จะเลือกไปพัฒนาต่อไป ซึ่งการจำลองการไหลกับกรณีศึกษาต่างๆนี้เรียกว่าวิธี *อะโพสเทอริเออร์รี่* (*a posteriori*)

สุดท้ายเมื่อได้สมการความเค้นเรย์โนลด์ และแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดเชิงเส้นที่เหมาะสมกับการไหลวนแล้ว จึงนำสมการความเค้นเรย์โนลด์ที่ได้ติดตั้งในแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดเชิงเส้นเพื่อแปลงเป็นแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดไม่เชิงเส้นโดยใช้ฟังก์ชันยูดีเอฟ (user defined function, UDF) ในซอฟต์แวร์ Fluent ซึ่งเป็นซอฟต์แวร์สำเร็จรูปทางพลศาสตร์

ของไหลเชิงคำนวณ จากนั้นจึงทำการจำลองการไหลผ่านท่อตรงที่มีการหมุนเพื่อดูผลของแบบจำลองชนิดไม่เชิงเส้น ซึ่งผลที่ได้จากงานวิจัยนี้สามารถช่วยในการพัฒนาและออกแบบการไหลภายในระบบหล่อเย็นใบพัดได้อย่างมีประสิทธิภาพมากขึ้น

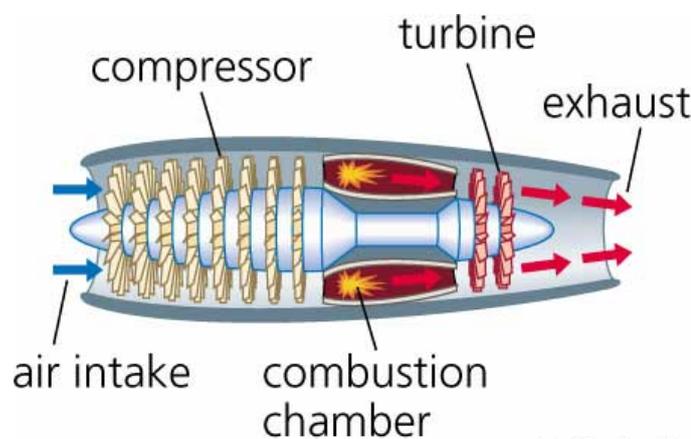
### วัตถุประสงค์

1. เพื่อพัฒนาแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดไม่เชิงเส้นสำหรับการไหลในท่อตรงที่มีการหมุนได้ถูกต้องมากขึ้น
2. เพื่อที่จะหาสมการความสัมพันธ์ของพจน์ความเค้นเรย์โนลด์์ที่เหมาะสมที่สุดสำหรับจำลองการไหลที่เกิดการไหลวน
3. เพื่อที่จะหาแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดเชิงเส้นที่เหมาะสมที่สุดสำหรับจำลองการไหลผ่านท่อตรงที่มีการหมุน
4. เพื่อที่จะวิเคราะห์และเปรียบเทียบเพื่อหาแบบจำลองใกล้พื้นผิวที่ดีที่สุดสำหรับแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดไม่เชิงเส้น
5. เพื่อที่จะวิเคราะห์และเปรียบเทียบวิธี *อะไพโรเออร์รี่* และวิธี *อะโพสเทอร์รี่เออร์รี่* ในการพัฒนาแบบจำลองความปั่นป่วน

## การตรวจเอกสาร

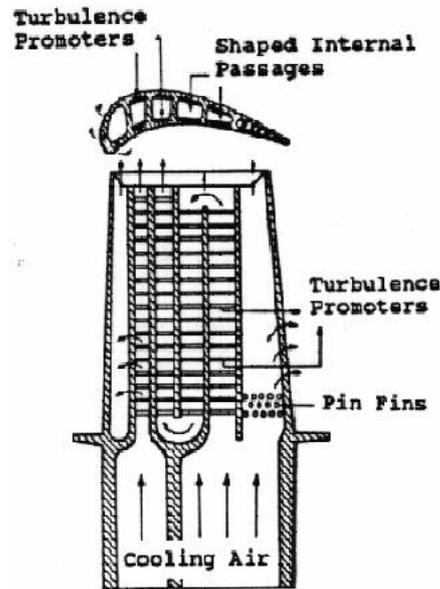
### ระบบหล่อเย็นใบพัดภายในเครื่องยนต์กังหันก๊าซ

ในเครื่องบินนั้นอุปกรณ์ที่สำคัญที่สุดชิ้นหนึ่งนั่นคือเครื่องยนต์กังหันก๊าซภาพที่ 3 สำหรับส่วนประกอบของเครื่องยนต์กังหันก๊าซประกอบด้วย 3 ส่วนใหญ่คือ คอมเพรสเซอร์ ห้องเผาไหม้ และเทอร์ไบน์ โดยชิ้นส่วนใบพัดในเทอร์ไบน์นี้จะมีการติดตั้งระบบหล่อเย็นใบพัดเนื่องจากผลจากการพัฒนาเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพเครื่องยนต์กังหันก๊าซทำให้ความร้อนของแก๊สร้อนที่ออกมาจากห้องเผาไหม้มีอุณหภูมิสูงเกินกว่าที่ใบพัดจะทนได้ ส่งผลให้ใบพัดเกิดการเสียหาย ระบบหล่อเย็นใบพัดนี้จะถูกติดตั้งภายในใบพัดของกังหันก๊าซชุดแรกที่ออกมาจากห้องเผาไหม้ (high pressure turbine) เพื่อลดอุณหภูมิที่ใบพัดไม่ให้เกิดการเสียหาย ส่วนประกอบที่ติดตั้งในระบบหล่อเย็นใบพัดมีหลายส่วนได้แก่ rib turbulators pin fins และ internal passage เป็นต้นดังภาพที่ 4 เป็นต้นในงานวิจัยนี้สนใจส่วน internal passage ส่วนนี้เป็นช่องที่อยู่ภายในตัวของใบพัดสำหรับ internal passage นี้มีลักษณะเป็นช่องสี่เหลี่ยม ซึ่งอากาศเย็นสำหรับระบายความร้อนในตัวใบพัดจะถูกส่งผ่านอยู่ภายในช่องตัว การไหลของอากาศและการเปลี่ยนแปลงของความร้อนภายใน internal passage นี้ขึ้นอยู่กับปัจจัยหลายอย่างเช่น การหมุนของตัวใบพัด การเปลี่ยนแปลงบริเวณหน้าตัดของ internal passage เป็นต้น โดยงานวิจัยนี้จะสนใจลักษณะการไหลภายใน internal passage ที่เกิดการหมุนของตัวใบพัดร่วมด้วยเป็นกรณีศึกษาที่เรียกว่า การไหลผ่านท่อตรงหน้าตัดสี่เหลี่ยมที่มีการหมุน



ภาพที่ 3 แสดงภาพเครื่องยนต์กังหันก๊าซ

ที่มา : <http://www.yourdictionary.com/images/ahd/jpg/A4gastrb.jpg> (2005)



ภาพที่ 4 แสดงส่วนประกอบต่างๆในระบบหล่อเย็นใบพัด  
ที่มา : Iacovides (2004)

### ลักษณะทางกายภาพของการไหลภายในท่อตรงที่ไม่มีการหมุน

การไหลภายในท่อเป็นการไหลที่พบได้ทั่วไปในงานทางวิศวกรรมเช่น การไหลของอากาศในท่อลมระบบปรับอากาศ การไหลของอากาศผ่านท่อดูดอากาศของเครื่องบินขับไล่ การไหลของของไหลในเครื่องแลกเปลี่ยนความร้อนชนิดต่างๆ โดยการไหลภายในท่อสามารถแบ่งชนิดตามการวางตัวของท่อ คือ ท่อวางตัวตามยาวไม่มีการโค้งงอ และ ท่อวางตัวโค้งงอ ด้านปรากฏการณ์การไหลของของไหลภายในท่อตรง มี 2 รูปแบบคือ การไหลของของไหลไปในทิศที่ต้องการโดยไม่เกิดการหมุนวน หรือการไหลในทิศทางหลัก และการไหลวนที่มุมทั้งสองหน้าตัดทรงสี่เหลี่ยมดังภาพที่ 1 สำหรับการไหลในทิศทางหลักนั้นพบได้ในการไหลภายในท่อทั้งท่อวางตัวตามยาวไม่มีการโค้งงอ และ ท่อวางตัวโค้งงอ ส่วนการไหลวนนั้นพบได้ในท่อวางตัวโค้งงอและท่อวางตัวตามยาวไม่มีการโค้งงอที่หน้าตัดของท่อต้องไม่เป็นท่อนหน้าตัดทรงกลม ลักษณะทางกายภาพของการไหลวนคือจะมีการหมุนวนในทิศทางตั้งฉากกับการไหลในทิศทางหลักดังภาพที่ 1 โดยการหมุนที่มุมทั้ง 4 นั้นเกิด 2 วงการหมุนต่อ 1 มุม (Speziale 1982) โดยที่ Speziale (1982) ได้แสดงให้เห็นว่าการไหลวนมีปริมาณที่น้อยมากประมาณ 3-2 เปอร์เซ็นต์ เมื่อเปรียบเทียบกับปริมาณการไหลหลัก กลไกของการเกิดการไหลวนที่มุมของท่อนั้นถูกสร้างโดยกลไกอย่างใดอย่างหนึ่งใน 2 อย่างนี้ได้แก่ แรงคอริออลิส และ turbulence anisotropy (Prandtl 1952) ในท่อตรงหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัส

Speziale (1982) พบว่าการไหลวนที่มุมของท่อเกิดจากผลต่างของความเค้นเรย์โนลด์ตั้งฉากในระนาบที่ตั้งฉากกับการไหลหรือ turbulence anisotropy นั่นเอง ลักษณะการไหลวนนี้จะถ่ายโอนโมเมนตัมของของไหลจากแกนกลางของท่อไปสู่มุมของท่อตามแนวเส้นทแยงมุมของหน้าตัดท่อ

### ลักษณะทางกายภาพของการไหลภายในท่อตรงที่มีการหมุน

สำหรับท่อตรงภายใต้สภาวะการหมุนปรากฏการณ์การไหลที่เกิดภายในท่อนั้นมีลักษณะคล้ายคลึงกับการไหลผ่านท่อตรงปกติ นั่นคือ เกิดทั้งการไหลหลัก และการไหลวนที่มุมทั้งสี่ของท่อน้ำตัดทรงสี่เหลี่ยม ซึ่งโครงสร้างของการไหลวนที่มุมของท่อตรงที่เกิดการหมุนนี้จะถูกรบกวนจากแรงคอริโอลิสทำให้โครงสร้างเปลี่ยนไปโดยที่ วงการหมุนการไหลวนทั้ง 8 วง จะเหลือเพียง 4 วงการหมุน โดยที่ขนาดของการไหลวนทั้ง 4 วงนั้นจะมีขนาดใหญ่ 2 วง และเล็ก 2 วง และเมื่อท่อหมุนด้วยความเร็วเชิงมุมที่สูงขึ้นวงที่มีขนาดใหญ่ขึ้นจะมีขนาดใหญ่ขึ้นเป็นเชิงเส้นกับค่าความเร็วเชิงมุมที่เพิ่มขึ้น (Martensson et al. 2005) ส่วนตำแหน่งวงการหมุนทั้งขนาดเล็กและขนาดใหญ่จะขึ้นอยู่กับค่าการตั้งแกนที่ใช้หมุนดังภาพที่ 2

### แบบจำลองความปั่นป่วน

การจำลองการไหลในปัจจุบันนั้นมีหลายวิธี เริ่มจากวิธีที่มีความถูกต้องมากที่สุดคือการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรง วิธีนี้ค่าที่ได้จะถือว่ามีความถูกต้องสูงในระดับเดียวกับค่าที่ได้จากการทดลองแต่วิธีนี้ก็มีความเสี่ยงคือต้องใช้เวลาในการคำนวณนาน สิ้นเปลืองกำลังของเครื่องคอมพิวเตอร์มากและสามารถใช้ได้กับรูปร่างที่ไม่ซับซ้อนเท่านั้น วิธีต่อมาคือวิธี large eddy simulation (LES) วิธีนี้มีความถูกต้องต่ำกว่าการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรง แต่ก็มีข้อเสียเหมือนการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรง คือต้องใช้เวลาในการคำนวณและสิ้นเปลืองกำลังของเครื่องคอมพิวเตอร์มาก ถัดมาเป็นวิธีที่ใช้ Reynolds stress model (RSM) วิธีนี้ให้ความถูกต้องรองลงมาจากวิธีการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรง และ LES แต่สมการในการจำลองการไหลของ RSM มีความซับซ้อนค่อนข้างสูง และใช้เวลาในการคำนวณมากเช่นเดียวกัน โดยในงานวิจัยนี้จะนำผลการจำลองการไหลจากทั้ง การจำลองเชิงตัวเลขโดยตรง และ LES มาเป็นค่าอ้างอิงในการเปรียบเทียบผลอีกด้วย

วิธีที่งานวิจัยนี้ใช้ทำการศึกษาและพัฒนาคือ วิธีการเฉลี่ยของเรย์โนลด์ ซึ่งวิธีการเฉลี่ยของเรย์โนลด์ (RANS) มีข้อได้เปรียบกว่าวิธีการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรง และ LES คือสามารถจำลอง

การไหลผ่านคอมพิวเตอร์เพียงเครื่องเดียว ไม่สิ้นเปลืองกำลังของเครื่องคอมพิวเตอร์มากเกินไป สามารถจำลองรูปแบบการไหลที่ซับซ้อนได้ และเหมาะสมกับการออกแบบเพื่อให้ได้ประโยชน์ที่สุด แต่ข้อเสียของ วิธีการเฉลี่ยของเรย์โนลด์ คือความถูกต้องยังน้อยกว่าการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรง และ LES วิธีการเฉลี่ยของเรย์โนลด์นี้จะทำการแปลงสมการการเคลื่อนที่ของของไหลจากค่า ณ ระยะเวลาใดเวลาหนึ่ง ให้อยู่ในรูปค่าเฉลี่ย เนื่องจากการไหลในงานวิศวกรรมส่วนใหญ่เป็นการไหลแบบปั่นป่วน (turbulent flow) หลังจากทำการเฉลี่ยแล้วได้เกิดพจน์พิเศษเนื่องจากความปั่นป่วนเกิดขึ้นในพจน์การพา (convection term) ของสมการโมเมนตัม โดยพจน์นี้เรียกว่าสมการความเค้นเรย์โนลด์ นอกจากนี้การไหลแบบปั่นป่วนนี้ได้มีการใช้แบบจำลองความปั่นป่วน (Turbulence Models) ในการแก้ปัญหาร่วมด้วย แบบจำลองความปั่นป่วนที่นิยมใช้อยู่ในปัจจุบันนี้คือ แบบจำลองความปั่นป่วนชนิดความหนืดหมุนวน (eddy viscosity turbulence models) แบบจำลองชนิดนี้จะจำลองการไหลผ่านพจน์ความหนืดหมุนวน (eddy viscosity,  $\mu_t$ ) ซึ่งแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดความหนืดหมุนวนนี้ยังมีแบบย่อยๆอีกหลายแบบ เช่น แบบจำลองชนิด  $k-\epsilon$  แบบจำลองชนิด  $k-\omega$  SST เป็นต้น แบบจำลองที่นิยมใช้ในซอฟต์แวร์ด้านพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณทั่วไปนั้นเป็นแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดเชิงเส้น ซึ่งแบบจำลองชนิดเชิงเส้นนี้สมการความเค้นเรย์โนลด์ มีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้นกับอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียด แบบจำลองชนิดนี้เสนอโดย Boussinesq (1877) ต่อมานักวิจัยได้ทำการพัฒนาแบบจำลองให้มีความถูกต้องมากขึ้นโดยพัฒนาพจน์ความเค้นเรย์โนลด์ให้มีความสัมพันธ์แบบไม่เชิงเส้นกับอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียด ผลที่ได้จากการใช้แบบจำลองแบบไม่เชิงเส้นนี้ให้ผลเป็นที่น่าพอใจ

ในงานวิจัยนี้ต้องการใช้แบบจำลองเพื่อใช้ในการทำนายการเกิดการไหลวนใน internal passage เนื่องจากการไหลวนเกิดจากผลต่างของค่าความเค้นเรย์โนลด์ตั้งฉาก แต่แบบจำลองชนิดเชิงเส้นของ Boussinesq (1877) ให้ผลของค่าความเค้นเรย์โนลด์ตั้งฉากที่เท่ากันใน 3 แกน ส่งผลให้แบบจำลองเชิงเส้นไม่สามารถจำลองการเกิดการไหลวนได้ แบบจำลองความปั่นป่วนชนิดไม่เชิงเส้นจึงเป็นทางเลือกในการใช้จำลองการไหลวนในกรณีศึกษาต่างๆ จากการตรวจเอกสารพบว่า Belhocine et al. (2004) ได้ใช้แบบจำลองความปั่นป่วนชนิดไม่เชิงเส้นชนิด explicit algebraic Reynolds stress model (EARSM) ในการจำลองการไหลภายใน internal passage พบว่าผลการศึกษาอย่างไม่ดีเท่าที่ควร เนื่องจากค่าความเร็วเฉลี่ย ค่าความเค้นเรย์โนลด์ตั้งฉาก และค่าความเค้นเรย์โนลด์เฉือนที่ได้ก็ยังไม่ห่างจากค่าอ้างอิงอยู่ ด้วยเหตุนี้งานวิจัยนี้จึงทำการหาแบบจำลองความปั่นป่วนที่เหมาะสมที่สุดสำหรับการไหลที่เกิดการไหลวน และเกิดสภาวะการหมุนภายใน internal

passage จากการตรวจเอกสารพบว่าแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดไม่เชิงเส้นถูกเสนอครั้งแรกโดย Pope (1975) สำหรับการไหลในสองมิติ หลังจากนั้นได้มีกลุ่มวิจัยอื่นได้พัฒนาและเสนอแบบจำลองชนิดไม่เชิงเส้นอีกหลายกลุ่มวิจัย โดยมีกลุ่มวิจัยที่เสนอดังนี้ Nisizima and Yoshizawa (1987), Myong and Kasagi (1990), Rubinstein and Barton (1990), Shih et al. (1993), Craft et al. (1996), Lien et al. (1996), Apsley and Leschziner (1998) และ Abe et al. (2003) ในงานวิจัยนี้ได้ทำการเปรียบเทียบแบบจำลองชนิดไม่เชิงเส้นโดยวิธี *อะไพร์ออริ* (*a priori*) ของกลุ่มวิจัยข้างต้นนี้ รวมถึงแบบจำลองชนิดเชิงเส้นของ Boussinesq (1877) สำหรับการไหลผ่านระนาบคู่ขนานในหนึ่งมิติ และท่อตรงหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัส ต่อมาได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบแบบจำลองชนิดเชิงเส้นผ่านท่อตรงหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีการหมุน สุดท้ายจึงนำแบบจำลองและสมการความเค้นเรย์โนลด์มาติดตั้งใน ซอฟต์แวร์ Fluent ที่หาได้มาทำการทดสอบผ่านท่อตรงหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีการหมุน

### ทฤษฎีและหลักการ

#### สมการควบคุมการไหลโดยทั่วไป

สมการควบคุมการไหล (governing equation) สำหรับการไหลแบบราบเรียบอัดตัวไม่ได้ในระบบพิกัดฉากที่สถานะคงตัว ไม่เกิดการหมุน ที่ทำการเฉลี่ยโดยวิธีของเรย์โนลด์แล้วมีสมการดังนี้

สมการความต่อเนื่อง (continuity equation)

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \quad (1)$$

สมการโมเมนตัม (momentun equation)

$$\rho u_i \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j) = -\frac{\partial p_i}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\overline{\rho u_i' u_j'} \right) \quad (2)$$

โดยค่า  $\rho$  คือความหนาแน่น,  $u_i$  คือค่าความเร็วเฉลี่ยแต่ละแกน,  $P$  คือค่าความดัน และ

$x_i$  คือค่าพิกัดแกน และ  $\overline{-\rho u'_i u'_j}$  คือ ค่าพจน์ความเค้นเรย์โนลด์ สามารถเขียนในรูปสมการความเค้นเรย์โนลด์ได้ตามสมมุติฐานของ Boussinesq (1877) ได้ดังนี้

$$\overline{-\rho u'_i u'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} (\rho k \delta_{ij}) \quad (3)$$

โดย  $\mu_t$  คือ ค่าความหนืดหมุนวน,  $\delta_{ij}$  คือค่า Kronecker's delta, และ  $k$  คือค่าพลังงานจลน์ความปั่นป่วน ซึ่ง Boussinesq (1877) ใช้หลักความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นเรย์โนลด์ กับอัตราของความเครียดในรูปเชิงเส้น สมการของ Boussinesq (1877) นี้นิยมใช้ในซอฟต์แวร์ทางพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณทั่วไป เนื่องจากไม่มีความซับซ้อนของสมการ สามารถเขียนโปรแกรมติดตั้งได้ง่าย และให้ผลการศึกษาที่คืบหน้าพอใจในปัญหาการไหลที่ไม่ซับซ้อนเช่น การไหลผ่านระนาบคู่ขนาน เป็นต้น ส่วนการไหลที่ซับซ้อนเช่น การไหลภายใต้สภาวะการหมุน การไหลที่มีอนุภาค เป็นต้น นั้นสมการของ Boussinesq (1877) ให้ผลการศึกษาที่ยังไม่ดีเท่าที่ควร

#### สมการควบคุมการไหลเมื่อมีการหมุน

เมื่อระบบเกิดการหมุน การแก้สมการสามารถคำนวณได้ทั้งจากความเร็วสัมบูรณ์ ( $v$ ) และความเร็วสัมพัทธ์ ( $v_r$ ) โดยค่าความเร็วทั้งสองตัวมีความสัมพันธ์ดังนี้ จากสมการโมเมนตัม

$$v_r = v - \Omega \times r \quad (4)$$

โดยที่  $\Omega$  คือ ความเร็วเชิงมุม,  $r$  คือ position vector in the rotating frame สำหรับสมการ โมเมนตัมพจน์ทางซ้ายมือสามารถเขียนได้เป็น

$$\nabla \cdot (\rho v v) \quad (5)$$

เมื่อระบบเกิดการหมุน พจน์นี้สามารถแทนค่าความเร็วสัมบูรณ์ได้ดังนี้

$$\nabla \cdot (\rho v_r v) + \Omega \times v \quad (6)$$

จากนั้นสามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปความเร็วสัมพัทธ์ได้ดังนี้

$$\nabla \cdot (\rho v_r v_r) + 2\rho\Omega \times v_r + \rho\Omega \times \Omega \times r + \rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} \times r \quad (7)$$

โดยที่  $2\Omega \times v_r$  คือ แรงคอริออลิส,  $\Omega \times \Omega \times r$  คือ Centrifugal force ส่วน  $\rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} \times r$  ในงานวิจัยนี้ ถือว่ามีค่าน้อยมากจนไม่นำมาคิดในสมการ สำหรับสมการความต่อเนื่องสามารถเขียนอยู่ในรูปความเร็วสัมพัทธ์ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_r) = 0 \quad (8)$$

สมการความสัมพันธ์ของพจน์ความเค้นเรย์โนลด์ในแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดไม่เชิงเส้น

สมการความสัมพันธ์ของพจน์ความเค้นเรย์โนลด์ที่นำมาศึกษาเปรียบเทียบกับในงานวิจัยนี้ มีดังนี้

1. สมการความสัมพันธ์ของพจน์ความเค้นเรย์โนลด์ในแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดไม่เชิงเส้นของ Craft et al. (1996)

$$a_{ij} \equiv \frac{\overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k}{k} \quad (9)$$

$$\overline{u'_i u'_j} = k a_{ij} + \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad (10)$$

โดยค่า  $a_{ij}$  (Reynolds stress anisotropy tensor) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
a_{ij} = & -\frac{v_t}{k} S_{ij} \\
& + c_1 \frac{v_t}{\varepsilon} \left( S_{ik} S_{jk} - \frac{1}{3} S_{kl} S_{kl} \delta_{ij} \right) \\
& + c_2 \frac{v_t}{\varepsilon} \left( \Omega_{ik} S_{jk} + \Omega_{jk} S_{ik} \right) \\
& + c_3 \frac{v_t}{\varepsilon} \left( \Omega_{ik} \Omega_{jk} - \frac{1}{3} \Omega_{kl} \Omega_{kl} \delta_{ij} \right) \\
& + c_4 \frac{v_t k}{\varepsilon^2} \left( S_{ki} \Omega_{lj} + S_{kj} \Omega_{li} \right) S_{kl} \\
& + c_5 \frac{v_t k}{\varepsilon^2} \left( \Omega_{il} \Omega_{lm} S_{mj} + S_{il} \Omega_{lm} \Omega_{mj} - \frac{2}{3} S_{lm} \Omega_{mn} \Omega_{nl} \delta_{ij} \right) \\
& + c_6 \frac{v_t k}{\varepsilon^2} S_{ij} S_{kl} S_{kl} + c_7 \frac{v_t k}{\varepsilon^2} S_{ij} \Omega_{kl} \Omega_{kl}
\end{aligned} \tag{11}$$

โดยค่าความหนืดทวนวน ( $v_t$ ) เขียนได้ดังนี้

$$v_t = c_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{12}$$

ค่า  $c_\mu$  และค่า damping function ( $f_\mu$ ) ของ Craft et al. (1996) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
C_\mu = & \frac{0.3}{1 + 0.35 \left( \max(\tilde{S}, \tilde{\Omega}) \right)^{1.5}} \\
& \times \left( 1 - \exp \left( \frac{-0.36}{\exp(-0.75 \max(\tilde{S}, \tilde{\Omega}))} \right) \right)
\end{aligned} \tag{13}$$

$$f_\mu = 1 - \exp \left[ - \left( Re_t / 90 \right)^{1/2} - \left( Re_t / 400 \right)^2 \right] \tag{14}$$

โดยค่า  $Re_t$  คือค่า turbulent Reynolds number

$$Re_t = \frac{k^2}{v\varepsilon} \tag{15}$$

$$\tilde{S} \equiv \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{1/2 S_{ij} S_{ij}} \quad (16)$$

$$\tilde{\Omega} \equiv \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{1/2 \Omega_{ij} \Omega_{ij}} \quad (17)$$

$$S_{ij} = \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (18)$$

$$\Omega_{ij} = \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \varepsilon_{ijk} \Omega_k \quad (19)$$

โดยที่ค่า  $\Omega_k$  คือ rotation rate of the coordinate system และ  $\varepsilon_{ijk}$  คือค่า alternating tensor ค่าคงที่ต่างๆในสมการเขียนได้ดังนี้

$$c_2 = 0.1, \quad c_3 = 0.26, \quad c_4 = -10C_\mu^2, \quad c_5 = 0, \quad c_6 = -5C_\mu^2 \quad \text{และ} \quad c_7 = 5C_\mu^2.$$

ค่า damping function ของ Gibson and Dafa'Alla (1994) ที่นำมาใช้ในงานวิจัยนี้

$$f_\mu = \exp \left[ -6 / \left( 1 + \frac{Re_t}{50} \right)^2 \right] \left[ 1 + 3 \exp \left( -\frac{Re_t}{10} \right) \right] \quad (20)$$

2. สมการความสัมพันธ์ของพจน์ความเค้นเรย์โนลด์ในแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดไม่เชิงเส้นของPope (1975)

$$a_{ij} \equiv \frac{\overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k}{k} \quad (21)$$

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} \delta_{ij} k + k a_{ij} \quad (22)$$

โดยค่า  $a_{ij}$  สามารถเขียนได้ดังนี้

$$a_{ij} = \sum_{\lambda} G^{\lambda} T^{\lambda} \quad ; 0 \leq \lambda \leq 2 \quad (23)$$

โดย

$$\underline{T}^0 = \frac{1}{3} \underline{I}_3 - \frac{1}{2} \underline{I}_2 \quad (24)$$

$$\underline{T}^1 = \underline{S} \quad (25)$$

$$\underline{T}^2 = \underline{S} \underline{W} - \underline{W} \underline{S} \quad (26)$$

$$\underline{I}_3 = \delta_{ij}^{(3)} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \quad (27)$$

$$\underline{I}_2 = \delta_{ij}^{(2)} = \begin{cases} 1, i = j \neq 3 \\ 0, i \neq j : i = j = 3 \end{cases} \quad (28)$$

$$\underline{S} \underline{W} = S_{ik} W_{kj} \quad (29)$$

$$\underline{W} \underline{S} = W_{ik} S_{kj} \quad (30)$$

$$G^0 = 4C_{\mu} g b_2 \{ \underline{S}^2 \} \quad (31)$$

$$G^1 = -2C_{\mu} \quad (32)$$

$$G^2 = -2C_{\mu} g b_3 \quad (33)$$

$$C_{\mu} = \frac{1}{2} b_1 g \left( 1 - 2 \{ \underline{W}^2 \} b_3^2 g^2 - \frac{2}{3} b_2^2 g^2 \{ \underline{S}^2 \} \right)^{-1} \quad (34)$$

$$g = (C_1 + p / \varepsilon - 1)^{-1} \quad (35)$$

โดยค่า  $p$  คือค่า production rate of turbulence kinetic energy,  $C_1 = 1.5$  และ  $C_2 = 0.4$

$$b_1 = 0.533 \quad (36)$$

$$b_2 = \frac{1}{11} (5 - 9C_2) \quad (37)$$

$$b_3 = \frac{1}{11} (1 + 7C_2) \quad (38)$$

$$\{ \underline{S}^2 \} = S_{ik} S_{kj} \quad (39)$$

$$\{ \underline{W}^2 \} = W_{ik} W_{kj} \quad (40)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{k}{\varepsilon} \right) (U_{i,j} + U_{j,i}) \quad (41)$$

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{k}{\varepsilon} \right) (U_{i,j} - U_{j,i}) \quad (42)$$

3. สมการความสัมพันธ์ของพจน์ความเค้นเรย์โนลด์ในแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดไม่เชิงเส้นของ Nisizima and Yoshizawa (1996)

$$\begin{aligned} \overline{v'_\alpha v'_\beta} = R_{\alpha\beta} = & -\frac{2}{3} k \delta_{\alpha\beta} + \nu_e \left( \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \\ & + \frac{1}{3} \left( \sum_{m=1}^3 \tau_m S_{maa} \right) \delta_{\alpha\beta} + R'_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (43)$$

โดยค่า

$$v_e = C_v \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (44)$$

$$\tau_m = C_{\tau m} \frac{k^3}{\varepsilon^2} \quad (45)$$

$$S_{1\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} \quad (46)$$

$$S_{2\alpha\beta} = 0.5 \left( \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) \quad (47)$$

$$S_{3\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} \quad (48)$$

$$R'_{\alpha\beta} = \left( -\sum_{m=1}^3 \tau_m S_{m\alpha\beta} \right) \quad (49)$$

ค่าคงที่ต่างๆในสมการเขียนได้ดังนี้

$$C_{\tau 1} = 0.07, C_{\tau 2} = -0.167 \text{ และ } C_{\tau 3} = -0.067$$

4. สมการความสัมพันธ์ของพจน์ความเค้นเรย์โนลด์ในแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดไม่เชิงเส้นของ Myong and Kasagi (1998)

$$\begin{aligned} \overline{u'_i u'_j} &= \frac{2}{3} \delta_{ij} k + v_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \\ &+ \frac{k}{\varepsilon} v_t \sum_{\beta=1}^3 C_\beta \left( S_{\beta ij} - \frac{1}{3} S_{\beta \alpha \alpha} \delta_{ij} \right) \\ &+ \frac{2}{3} \frac{k}{\varepsilon} v_t W_{ij}(n, m) \left( \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_n} \right)^2 \end{aligned} \quad (50)$$

โดย

$$S_{1ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial U_j}{\partial x_\gamma} \quad (51)$$

$$S_{2ij} = 0.5 \left( \frac{\partial U_\gamma}{\partial x_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial U_\gamma}{\partial x_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_\gamma} \right) \quad (52)$$

$$S_{3ij} = \frac{\partial U_\gamma}{\partial x_i} + \frac{\partial U_\gamma}{\partial x_j} \quad (53)$$

$$v_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (54)$$

$$f_\mu = \left( 1 + \frac{3.45}{\sqrt{Re_t}} \right) \left[ 1 - \exp\left( \frac{-y^+}{70} \right) \right] \quad (55)$$

สำหรับค่าคงที่ต่างๆในสมการเขียนได้ดังนี้

$$C_\mu = 0.09, C_1 = 0.8, C_2 = 0.45 \text{ และ } C_3 = -0.15$$

5. สมการความสัมพันธ์ของพจน์ความเค้นเรย์โนลด์ในแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดไม่เชิงเส้นของ Rubenstein and Barton (1990)

$$\begin{aligned}
-\overline{u'_i u'_j} = & -\frac{2}{3} \delta_{ij} k + v_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \\
& \left[ \begin{aligned} & 0.4 \left( v_t \frac{\partial U_i}{\partial x_\mu} \frac{\partial U_j}{\partial x_\mu} \right) \\ & -\frac{k}{\varepsilon} + 1.24 \left( v_t \frac{\partial U_i}{\partial x_\mu} \frac{\partial U_\mu}{\partial x_j} + v_t \frac{\partial U_j}{\partial x_\mu} \frac{\partial U_\mu}{\partial x_i} \right) \\ & -0.16 \left( v_t \frac{\partial U_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial U_\mu}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \right] \quad (56)
\end{aligned}$$

โดย

$$v_t = 0.0845 \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (57)$$

6. สมการความสัมพันธ์ของพจน์ความเค้นเฉือนในแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดไม่เชิงเส้นของ Shih et al. (1993)

$$\begin{aligned}
\overline{u'_i u'_j} = & \frac{2}{3} \delta_{ij} k + 2a_2 \frac{k^2}{\varepsilon} \left( U_{i,j} + U_{j,i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} U_{i,i} \right) \\
& 2a_4 \frac{k^3}{\varepsilon^2} \left( U_{i,k} U_{k,j} + U_{j,k} U_{k,i} - \frac{2}{3} \Pi \delta_{ij} \right) \\
& 2a_6 \frac{k^3}{\varepsilon^2} \left( U_{i,k} U_{j,k} - \frac{1}{3} \tilde{\Pi} \delta_{ij} \right) \\
& 2a_7 \frac{k^3}{\varepsilon^2} \left( U_{k,i} U_{k,j} - \frac{1}{3} \tilde{\Pi} \delta_{ij} \right) \quad (58)
\end{aligned}$$

โดย

$$\Pi = U_{i,j} U_{j,i} \quad (59)$$

$$\tilde{\Pi} = U_{i,j} U_{i,j} \quad (60)$$

โดย

$$2a_2 = -\frac{2/3}{A_1 + \eta + \alpha\zeta} \quad (61)$$

$$2a_4 = \frac{C_{\tau 1}}{f(\eta)} \quad (62)$$

$$2a_6 = \frac{C_{\tau 2}}{f(\eta)} \quad (63)$$

$$2a_7 = \frac{C_{\tau 3}}{f(\eta)} \quad (64)$$

โดย

$$f(\eta) = A_2 + \eta^3 \quad (65)$$

$$\eta = \frac{kS}{\varepsilon} \quad (66)$$

$$S = (2S_{ij}S_{ij})^{0.5} \quad (67)$$

$$S_{ij} = (2S_{ij}S_{ij})^{0.5} \quad (68)$$

สำหรับ  $\zeta$  คือ effect of mean rotation rate

$$\zeta = \frac{k\Omega}{\varepsilon} \quad (69)$$

$$\Omega = (2\Omega_{ij}^*\Omega_{ij}^*)^{0.5} \quad (70)$$

$$\Omega_{ij}^* = 0.5(\Omega_{i,j} + \Omega_{j,i}) + 4\varepsilon_{mij}\omega_m \quad (71)$$

โดยค่า  $\omega_m$  คือ rotation of the frame  
สำหรับค่าคงที่ต่างๆในสมการเขียนได้ดังนี้

$$A_1 = 1.25, A_2 = 1000, C_{\tau 1} = -4, C_{\tau 2} = 13, C_{\tau 3} = -2 \text{ และ } \alpha = 0.9$$

7. สมการความสัมพันธ์ของพจน์ความเค้นเรย์โนลด์ในแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดไม่เชิงเส้นของ Lien et al. (1996)

$$\begin{aligned} \overline{\frac{u'_i u'_j}{k}} &= \frac{2}{3} \delta_{ij} - \frac{v_t}{k} S_{ij} + C_1 \frac{v_t}{\varepsilon} \left[ S_{ik} S_{kj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} S_{kl} S_{kl} \right] \\ & C_2 \frac{v_t}{\varepsilon} \left[ \Omega_{ik} S_{kj} - \Omega_{jk} S_{ki} \right] \\ & C_3 \frac{v_t}{\varepsilon} \left[ \Omega_{ik} \Omega_{kj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \Omega_{kl} \Omega_{kl} \right] \end{aligned} \quad (72)$$

โดยค่าความหนืดหมุนวน ( $v_t$ ) เขียนได้ดังนี้

$$v_t = c_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (73)$$

ค่า  $c_\mu$  และค่า damping function ( $f_\mu$ ) ของ Craft et al. (1996) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$C_\mu = \frac{0.667}{A_1 + S + 0.9\Omega} \quad (74)$$

$$A_1 = 1.25 \quad (75)$$

$$S = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{0.5 S_{ij} S_{ij}} \quad (76)$$

$$\Omega = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{0.5 \Omega_{ij} \Omega_{ij}} \quad (77)$$

$$S_{ij} = \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (78)$$

$$\Omega_{ij} = \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (79)$$

$$f_{\mu} = \left[ 1 - \exp(-0.0198y^*) \right] \left( 1 + \frac{5.29}{y^*} \right) \quad (80)$$

$$y^* = \frac{y\sqrt{k}}{v} \quad (81)$$

สำหรับค่า  $C_1, C_2$  และ  $C_3$  เขียนได้ดังนี้

$$C_1 = \frac{3/4}{(100 + S^3)} \quad (82)$$

$$C_2 = \frac{15/4}{(100 + S^3)} \quad (83)$$

$$C_{13} = \frac{19/4}{(100 + S^3)} \quad (84)$$

8. สมการความสัมพันธ์ของพจน์ความเค้นเรย์โนลด์ในแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดไม่เชิงเส้นของ Apsley and Leschiner (1998)

$$a_{ij} \equiv \frac{\overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k}{k} \quad (85)$$

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} \delta_{ij} k + k a_{ij} \quad (86)$$

โดยค่า  $a_{ij}$  สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} a_{ij} = & -\alpha \underline{S} + 2\alpha\beta \left( \underline{S}^2 - \frac{1}{3} S_2 \underline{I} \right) \\ & + \alpha\gamma (\underline{W} \underline{S} - \underline{S} \underline{W}) - \frac{2}{3} \alpha\beta^2 S_2 \underline{S} \\ & - 2\alpha\gamma^2 W_2 \underline{S} - 3\alpha\gamma^2 \left( \underline{W}^2 \underline{S} - \underline{S}^2 \underline{W} - W_2 \underline{S} - \frac{2}{3} \{ \underline{W} \underline{S} \underline{W} \} \underline{I} \right) \\ & - 2\alpha\beta\gamma (\underline{W}^2 \underline{S} - \underline{S}^2 \underline{W}) \end{aligned} \quad (87)$$

โดย

$$S_2 = \overline{S}^2 / 2 \quad (88)$$

$$W_2 = -\overline{W}^2 / 2 \quad (89)$$

$$\overline{S} = \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}} \quad (90)$$

$$\overline{W} = \sqrt{2 W_{ij} W_{ij}} \quad (91)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \frac{k}{\varepsilon} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (92)$$

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \frac{k}{\varepsilon} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (93)$$

$$\{ \underline{W} \underline{S} \underline{W} \} = W_{ij} S_{ij} W_{ij} \quad (94)$$

$$\alpha = \frac{4/3 - C_{01}}{C_1 + p/\varepsilon - 1} \quad (95)$$

$$\beta = \frac{1 - C_{11}}{C_1 + p/\varepsilon - 1} \quad (96)$$

$$\gamma = \frac{1 - C_{12}}{C_1 + p/\varepsilon - 1} \quad (97)$$

$$\underline{I} = \delta_{ij} \quad (98)$$

$$\underline{S} = S_{ij} \quad (99)$$

$$\underline{S}^2 = S_{ik} S_{kj} \quad (100)$$

$$\underline{WS} = W_{ik} S_{kj} \quad (101)$$

$$\underline{SW} = S_{ik} W_{kj} \quad (102)$$

$$\underline{W}^2 \underline{S} = W_{ik} W_{kl} S_{lj} \quad (103)$$

$$\underline{SW}^2 = S_{ik} W_{kl} W_{lj} \quad (104)$$

$$\underline{WS}^2 = W_{ik} S_{kl} S_{lj} \quad (105)$$

$$\underline{S}^2 \underline{W} = S_{ik} S_{kl} W_{lj} \quad (106)$$

โดยค่าคงที่ต่างๆเขียนได้ดังนี้

$$C_1 = 1.8, C_{01} = 0.8 \text{ และ } C_{11} = C_{12} = 0.6$$

9. สมการความสัมพันธ์ของพจน์ความเค้นเรย์โนลด์์ในแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดไม่เชิงเส้นของ Abe et al. (2003)

$$b_{ij} \equiv \frac{\overline{u'_i u'_j}}{2k} - \frac{\delta_{ij}}{3} \quad (107)$$

$$\overline{u'_i u'_j} = 2kb_{ij} + \frac{2}{3}\delta_{ij}k \quad (108)$$

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3}\delta_{ij}k + 2k \left( \frac{b_{ij}^*}{C_D} \right) \quad (109)$$

โดยค่า  $b_{ij}^*$  สามารถเขียนได้ดังนี้

$$b_{ij}^* = {}^1b_{ij}^* + \{1 - f_w(26)\} \{ {}^2b_{ij}^* + {}^s b_{ij}^* \} + {}^w b_{ij}^* \quad (110)$$

โดย

$${}^1b_{ij}^* = -C_B S_{ij}^* \quad (111)$$

$${}^2b_{ij}^* = C_B \left\{ -2 \left( S_{ik}^* \Omega_{kj}^* - \Omega_{ik}^* S_{kj}^* \right) + 2 \left( S_{ik}^* S_{kj}^* - \frac{\delta_{ij}}{3} S^{*2} \right) \right\} \quad (112)$$

$${}^s b_{ij}^* = -C f_{s1} S_{ij}^* + 2C_B f_{s2} \left( S_{ik}^* S_{kj}^* - \frac{\delta_{ij}}{3} S^{*2} \right) \quad (113)$$

$${}^w b_{ij}^* = C_D f_w(26) {}^w b_{ij} \quad (114)$$

โดย

$$\begin{aligned}
{}^w b_{ij} = & -\alpha_w \frac{1}{2} \left( d_i d_j - \frac{\delta_{ij}}{3} d_k d_k \right) + (1 - f_{r1}^2) \\
& \times \left\{ \begin{aligned} & \frac{\beta_w C_w}{1 + C_w \sqrt{S^{**2} \Omega^{**2}}} \left( S_{ik}^{**} \Omega_{kj}^{**} - \Omega_{ik}^{**} S_{kj}^{**} \right) \\ & + \frac{\gamma_w C_w}{1 + C_w S^{**2}} \left( S_{ik}^{**} S_{kj}^{**} - \frac{\delta_{ij}}{3} S^{**2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (115)
\end{aligned}$$

โดย

$$C_D = 0.8 \quad (116)$$

$$f_w(26) = \exp \left\{ - \left( \frac{n^*}{26} \right)^2 \right\} \quad (117)$$

$$n^* = \frac{U_\varepsilon n}{v} \quad (118)$$

โดยที่  $U_\varepsilon$  คือ Kolmogorov velocity scale  $\left( (v\varepsilon)^{1/4} \right)$  และ  $n$  คือระยะจากผิวที่ใกล้ที่สุด

$$C_B = \frac{1}{1 + \frac{22}{3} \Omega^{*2} + \frac{2}{3} (\Omega^{*2} - S^{*2}) f_B} \quad (119)$$

$$f_B = 1 + C_\eta (\Omega^* - S^*) \quad (120)$$

โดย

$$C_\eta = 100 \quad (121)$$

$$f_{s1} = f_{r1} f_{r2} C_{s1} (\Omega^{*2} - S^{*2}) \quad (122)$$

$$f_{s2} = -f_{r1}f_{r2} \{1 + C_{s1} (\Omega^* - S^*)\} \quad (123)$$

$$f_{r1} = \frac{\Omega^2 - S^2}{\Omega^2 + S^2} \quad (124)$$

$$f_{r2} = \frac{S^2}{\Omega^2 + S^2} \quad (125)$$

$$C_{s1} = 0.15C_\eta \quad (126)$$

$$C_{s2} = 0.07C_\eta \quad (127)$$

$$d_i = \frac{N_i}{\sqrt{N_k N_k}} \quad (128)$$

$$N_i = \frac{\partial l_d}{\partial x_i} \quad (129)$$

$$l_d = n \quad (130)$$

โดยที่  $n$  เป็นระยะห่างจากผิว  
ค่าคงที่ต่างๆในสมการเขียนได้ดังนี้

$$\alpha_w = 0, \beta_w = 1/4, \gamma_w = 1.5 \text{ และ } C_w = 0.5$$

โดย

$$S_{ij}^* = C_D \tau S_{ij} \quad (131)$$

$$\tau = \frac{v_t}{k} \quad (132)$$

$$v_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (133)$$

$$C_\mu = 0.12 \quad (134)$$

$$f_\mu = \left[ 1 + \frac{35}{R_t^{3/4}} \exp \left\{ - \left( \frac{R_t}{30} \right)^{3/4} \right\} \right] \{1 - f_w(26)\} \quad (135)$$

$$R_t = \frac{k^2}{v\varepsilon} \quad (136)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (137)$$

$$\Omega_{ij}^* = C_D \tau \Omega_{ij} \quad (138)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (139)$$

$$S^{*2} = S_{mn}^* S_{mn}^* \quad (140)$$

$$S^{**2} = S_{mn}^{**} S_{mn}^{**} \quad (141)$$

$$S_{ij}^* = \tau_d S_{ij} \quad (142)$$

$$\tau_d = \{1 - f_w(15)\} \frac{k}{\varepsilon} + f_w(15) \sqrt{\frac{v}{\varepsilon}} \quad (143)$$

$$f_w(15) = \exp \left\{ - \left( \frac{n^*}{15} \right)^2 \right\} \quad (144)$$

$$\Omega^{**2} = \Omega_{mn}^{**} \Omega_{mn}^{**} \quad (145)$$

$$\Omega_{ij}^* = \tau_d \Omega_{ij} \quad (146)$$

$$\Omega^{*2} = \Omega_{mn}^* \Omega_{mn}^* \quad (147)$$

$$\Omega^* = \sqrt{\Omega^{*2}} \quad (148)$$

$$S^* = \sqrt{S^{*2}} \quad (149)$$

$$\Omega^2 = \Omega_{mn} \Omega_{mn} \quad (150)$$

$$S^2 = S_{mn} S_{mn} \quad (151)$$

### แบบจำลองความปั่นป่วน

แบบจำลองความปั่นป่วน ในงานวิจัยนี้มีแบบจำลองที่ใช้ดังนี้

1. แบบจำลองความปั่นป่วนชนิดเชิงเส้น  $k-\omega$  SST (Shear Stress Transport) (Menter 1994) แบบจำลองความปั่นป่วนชนิด  $k-\omega$  SST นี้ไม่ได้ใช้ทั้ง wall function และ damping function ในการแก้ปัญหาที่บริเวณใกล้ผิว แบบจำลองที่เกิดจากการรวมกันระหว่างแบบจำลองความปั่นป่วนชนิด  $k-\varepsilon$  ที่อยู่ในรูปค่าอัตราการผลิตของพลังงานจลน์ของความปั่นป่วนจำเพาะ และแบบจำลองความปั่นป่วนชนิด  $k-\omega$  ของ (Wilcox 1998) โดยแบบจำลองความปั่นป่วนชนิด  $k-\omega$  SST นี้ประกอบด้วย 2 สมการคือ สมการพลังงานจลน์ของความปั่นป่วน และสมการอัตราการลดลงของพลังงานจลน์ของความปั่นป่วนจำเพาะ

สมการสมการพลังงานจลน์ของความปั่นป่วน ( $k$ )

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k - Y_k \quad (152)$$

และสมการอัตราการลดลงของพลังงานจลน์ของความปั่นป่วนจำเพาะ ( $\omega$ )

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \omega u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + G_\omega - Y_\omega + D_\omega \quad (152)$$

ในสมการทั้งสองประกอบด้วยพจน์ที่สำคัญดังนี้  $G_k$  คือค่าพจน์การผลิตของพลังงานจลน์ของความปั่นป่วน,  $G_\omega$  คือค่าพจน์การผลิตของอัตราการลดลงของพลังงานจลน์ความปั่นป่วนจำเพาะ,  $Y_k$  และ  $Y_\omega$  คือพจน์การสลายตัวของ พลังงานจลน์ความปั่นป่วน และอัตราการลดลงของพลังงานจลน์ความปั่นป่วนจำเพาะตามลำดับ,  $D_\omega$  คือพจน์ cross-diffusion โดยค่า  $\sigma_k$  และ  $\sigma_\omega$  คือค่า turbulent Prandtl number ของ พลังงานจลน์ความปั่นป่วน และอัตราการลดลงของพลังงานจลน์ความปั่นป่วนจำเพาะ

ค่าความหนืดหมุนวนสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\mu_t = \rho \frac{k}{\omega} \frac{1}{\max \left[ \frac{1}{\alpha^*}, \frac{\Omega F_2}{a_1 \omega} \right]} \quad (153)$$

โดยค่าต่างๆหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\alpha^* = 1.0 \quad (154)$$

$$\Omega = \sqrt{\Omega_{ij} \Omega_{ij}} \quad (155)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (156)$$

$$\sigma_k = \frac{1}{F_1 / \sigma_{k,1} + (1 + F_1) / \sigma_{k,2}} \quad (157)$$

$$\sigma_{\omega} = \frac{1}{F_1 / \sigma_{\omega,1} + (1 + F_1) / \sigma_{\omega,2}} \quad (158)$$

โดยค่า  $\Omega_{ij}$  คือค่า mean rate of rotation tensor เนื่องจากแบบจำลองชนิด  $k-\omega$  SST นั้น เกิดจากการรวมกันระหว่างแบบจำลองชนิด  $k-\omega$  และ  $k-\varepsilon$  ผลจากการรวมกันนั้นได้เกิดพจน์พิเศษขึ้นมาคือ blending function  $F_1$  และ  $F_2$  ซึ่งงานวิจัยนี้ใช้ค่า  $F_1$  และ  $F_2$  ของ Menter (1994)

โดยค่าคงที่ภายในแบบจำลองมีดังนี้

$$\sigma_{k,1} = 1.176, \sigma_{\omega,1} = 2.0, \sigma_{k,2} = 1.0 \text{ และ } \sigma_{\omega,2} = 1.168$$

2. แบบจำลองความปั่นป่วนชนิดเชิงเส้น  $k-\varepsilon$  แบบ high Reynolds number (Launder and Spalding 1972) แบบจำลองความปั่นป่วนชนิด  $k-\varepsilon$  นี้ประกอบด้วย 2 สมการคือ สมการพลังงานจลน์ของความปั่นป่วน ( $k$ ) และสมการอัตราการลดลงของพลังงานจลน์ของความปั่นป่วน ( $\varepsilon$ )

สมการพลังงานจลน์ของความปั่นป่วน

$$\frac{\partial}{\partial t}(pk) + \frac{\partial}{\partial x_i}(pk u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k - \rho \varepsilon \quad (159)$$

และสมการอัตราการลดลงของพลังงานจลน์ของความปั่นป่วน

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \varepsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} G_k - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (160)$$

โดยที่ค่า  $k$  คือ พลังงานจลน์ของความปั่นป่วน,  $\varepsilon$  คือ อัตราการลดลงของพลังงานจลน์ของความปั่นป่วน,  $G_k$  คือ ค่าพจน์การผลิตของพลังงานจลน์ของความปั่นป่วน

โดยค่าพจน์การผลิตของพลังงานจลน์ของความปั่นป่วนสามารถเขียนได้ดังนี้

$$G_k = -\overline{\rho u_i u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (161)$$

ซึ่ง  $\overline{u_i u_j}$  คือค่าความเค้นเรย์โนลด์ในแบบจำลองเชิงเส้นนี้จะใช้ค่าความสัมพันธ์ที่เป็นเชิงเส้นของ Boussinesq (1877) และ ค่าความหนืดหมุนวน (eddy viscosity) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (162)$$

ค่าคงที่ต่างๆภายในสมการมีค่าดังนี้

$$C_\mu = 0.09, C_{1\varepsilon} = 1.44, C_{2\varepsilon} = 1.92, \sigma_k = 1 \text{ และ } \sigma_\varepsilon = 1.3$$

ในการคำนวณแบบ high Reynolds number การคำนวณแบบนี้จะใช้สมการ wall function ในการแก้ปัญหาในช่วงบริเวณใกล้ผิวของการไหล ที่บริเวณใกล้ผิวนั้นใช้จำนวนกริดน้อยกว่าแบบ low Reynolds number สำหรับสมการ wall function สำหรับแบบจำลองความปั่นป่วนชนิด  $k-\varepsilon$  แบบ high Reynolds number มีในงานวิจัยนี้เลือกใช้ 3 สมการจากซอฟต์แวร์ Fluent ดังนี้

สมการ standard wall function (Launder and Spalding 1974) สมการ standard wall function นี้ใช้สมการของ Launder and Spalding (1974) สมการนี้จะใช้หลักของ law of the wall ในการทำนายค่าความเร็วที่ช่วง  $y^+$  อยู่ระหว่าง 30 ถึง 60 ซึ่งค่า  $y^+ = \rho u_\tau y / \mu$  โดยที่  $u_\tau$  คือ ค่าความเร็วเสียดทาน และ  $\mu$  คือ ค่าความหนืด ส่วนช่วงที่  $y^+$  น้อยกว่า 30 ลงไปถึงผนังนั้น จะใช้ความสัมพันธ์ของความเร็วและตำแหน่งที่เป็นเชิงเส้นกัน

สมการ non-equilibrium wall function (Kim and Choudhury 1995) สมการนี้จะใช้สมการของ law of the wall ของ Launder and Spalding (1974) ที่เพิ่มผลกระทบของ pressure gradients เข้าในสมการด้วย นอกจากนี้ยังใช้แนวคิดของ two layer based เข้ามาใช้เพื่อคำนวณหาค่าของพลังงานจลน์ของความปั่นป่วนอีกด้วย

สมการ enhanced wall function (Kader 1993) สมการนี้จะทำการหาค่าความเร็วโดยการแบ่งชั้นของการไหลเป็น 2 ส่วนคือส่วน laminar และส่วน turbulent ความสัมพันธ์ของสมการ

ความเร็วในในส่วน laminar นั้น จะใช้ความสัมพันธ์ที่เป็นเชิงเส้น ในส่วน turbulent นั้นจะใช้ความสัมพันธ์ที่เป็น logarithmic จากนั้นจะนำสมการความเร็วของทั้งสองส่วนมารวมกัน แล้วทำการใส่ค่า blending function ลงในค่าสมการความเร็วที่เกิดจากการรวมนี้ กลายเป็น สมการ enhanced wall function

3. แบบจำลองความปั่นป่วนชนิดไม่เชิงเส้น  $k-\varepsilon$  แบบ high Reynolds number สำหรับสมการนี้จะแตกต่างจากแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดเชิงเส้น  $k-\varepsilon$  ของ Launder and Spalding (1972) คือ ในค่าพจน์การผลิตของพลังงานจลน์ของความปั่นป่วนนั้นค่าสมการความเค้นเรย์โนลด์จะอยู่ในรูปไม่เชิงเส้น ส่วนการคำนวณบริเวณใกล้ผิวนั้นจะใช้ wall function เหมือนเดิม

4. แบบจำลองความปั่นป่วนชนิดไม่เชิงเส้น  $k-\varepsilon$  แบบ low Reynolds number (Launder and Sharma 1974) สำหรับการคำนวณแบบ low Reynolds number นั้นจะใช้ค่า damping function ในการแก้ปัญหาในช่วงบริเวณใกล้ผิวของการไหล ซึ่งค่า damping function นี้อยู่ในส่วนของค่าความหนืดหมุนวน สำหรับแบบจำลองชนิดนี้มีลักษณะคล้ายกับของ Launder and Spalding (1972) ในส่วนสมการพลังงานจลน์ของความปั่นป่วนจะใช้สมการที่ (160) แต่ในส่วนของสมการอัตราการลดลงของพลังงานจลน์ของความปั่นป่วนมีการเปลี่ยนให้อยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\varepsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \\ + f_{\varepsilon 1} C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} G_k - f_{\varepsilon 2} C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (163)$$

โดยค่า  $f_{\varepsilon 1} = 1$  และ  $f_{\varepsilon 2} = 1 - 0.3 \exp(-Re_t^2)$  ซึ่งค่า  $Re_t$  สามารถเขียนได้เป็น  $\frac{k^2}{\nu\varepsilon}$  นอกจากนี้ในส่วนของค่าความหนืดหมุนวนมีการปรับปรุงโดยมีการเพิ่มค่า damping function เข้าไป ซึ่งค่าความหนืดหมุนวนมีค่าดังนี้

$$\mu_t = \rho f_\mu C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (162)$$

โดยค่า  $f_\mu$  คือค่า damping function ซึ่งค่านี้จะขึ้นอยู่กับแบบจำลองที่ต้องการในงานวิจัยนี้ใช้ของ

Craft et al. (1996) ตั้งสมการที่ (14) และ Gibson and Dafa'Alla (1994) ตั้งสมการที่ (20) เนื่องจากในซอฟต์แวร์ Fluent ไม่มีการกำหนดแบบ low Reynolds number จึงจำเป็นต้องสร้างฟังก์ชันยูดีเอฟ (user defined function, UDF) ของ  $f_{\epsilon 1}$  และ  $f_{\epsilon 2}$  ขึ้นมาแล้วจึงนำไปติดตั้งเพิ่มในสมการอัตราการลดลงของพลังงานจลน์ของความปั่นป่วน

## อุปกรณ์และวิธีการศึกษา

### อุปกรณ์ที่ใช้ในการศึกษา

1. เครื่องคอมพิวเตอร์คลัสเตอร์ชื่อ Helios บนระบบปฏิบัติการ LINUX ของห้องปฏิบัติการ Asia Pacific Science & Techonology Facility (APSTF lab.) ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ประกอบด้วย เครื่องคอมพิวเตอร์รุ่น Sun Fire W 2100 จำนวน 1 เครื่อง ประกอบด้วย หน่วยประมวลผลกลาง (CPU) AMD Opteron processor 250 ความเร็ว 2393 MHz จำนวน 2 processors หน่วยความจำ (RAM) 2 GB หน่วยความจำสำรอง (hard disk) SCSI 74 GB จำนวน 2 ตัว และเครื่องคอมพิวเตอร์รุ่น Sun Fire V 20 จำนวน 4 เครื่อง แต่ละเครื่องประกอบด้วย หน่วยประมวลผลกลาง (CPU) AMD Opteron processor 250 ความเร็ว 1793 MHz จำนวน 2 processors หน่วยความจำ (RAM) 2 GB หน่วยความจำสำรอง (hard disk) สกัสซี (SCSI) 74 GB จำนวน 2 ตัว กิกะบิตอีเทอร์เน็ตสวิตช์ (Gigabit Ethernet switch) จำนวน 16 พอร์ต (port)
2. เครื่องคอมพิวเตอร์คลัสเตอร์ชื่อ Passion บนระบบปฏิบัติการ Windows ของห้องวิจัยและปฏิบัติการ Microsoft HPC & Grid computing ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ประกอบด้วย เครื่องคอมพิวเตอร์จำนวน 1 เครื่อง ประกอบด้วย หน่วยประมวลผลกลาง (CPU) AMD opteron processor 64 บิต ความเร็ว 1800 MHz จำนวน 2 processors หน่วยความจำ (RAM) 2 GB หน่วยความจำสำรอง (hard disk) 80 GB จำนวน 2 ตัว เครื่องคอมพิวเตอร์จำนวน 4 เครื่อง แต่ละเครื่องประกอบด้วย หน่วยประมวลผลกลาง (CPU) Athlon 64 บิต ความเร็ว 2000 MHz หน่วยความจำ (RAM) 1 GB หน่วยความจำสำรอง (hard disk) 40 GB
3. ซอฟต์แวร์ Gambit และ Fluent สำหรับระบบปฏิบัติการ Windows และ LINUX
4. ซอฟต์แวร์ภาษา Microsoft visual C++ สำหรับระบบปฏิบัติการ Windows

### ขั้นตอนการศึกษาโดยรวม

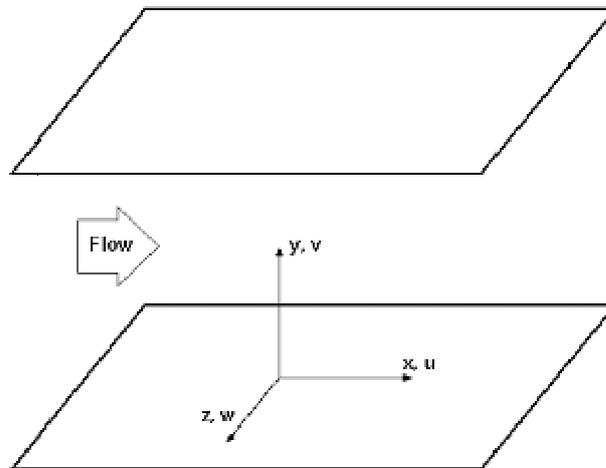
1. ศึกษาและรวบรวมทฤษฎี ข้อมูล เอกสารต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับแบบจำลองของการไหลชนิดไม่เชิงเส้น และลักษณะของการไหลแบบวนในท่อหน้าตัดสี่เหลี่ยมภายใต้สภาวะปกติ และที่มีการหมุน
2. ทำการศึกษาเปรียบเทียบหาสมการความเค้นเรย์โนลด์ของนักวิจัยกลุ่มต่างๆ ในแบบจำลองความปั่นป่วนแบบไม่เชิงเส้น โดยใช้วิธี *อะไพร์เออร์รี่* จากนั้นทำการปรับปรุงค่า damping function และทดสอบโดยวิธี *อะไพร์เออร์รี่* กับกรณีศึกษาที่เกิดการไหลวน จนได้ผลที่ดีที่สุด
3. ในการศึกษาขั้นต่อมาได้ทำการประเมินแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดเชิงเส้น สำหรับการไหลผ่านท่อตรงที่มีการหมุน จากแบบจำลองปั่นป่วนชนิดเชิงเส้นที่นิยมใช้อยู่ในปัจจุบัน
4. การศึกษาขั้นสุดท้ายทำการนำแบบจำลองความปั่นป่วนและสมการความเค้นเรย์โนลด์ที่ดีที่สุดแล้วมาสร้างเป็นแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดไม่เชิงเส้น แล้วทำการติดตั้งในซอฟต์แวร์ Fluent และใช้ฟังก์ชันยูดีเอฟในการสร้างสมการความเค้นเรย์โนลด์แบบไม่เชิงเส้น แล้วประเมินผ่านกรณีศึกษาต่างๆ
5. จัดทำบทความเพื่อนำเสนอให้ตีพิมพ์ในวารสารวิชาการระดับนานาชาติอย่างน้อย 1 ฉบับและนำเสนอในที่ประชุมวิชาการระดับประเทศอย่างน้อย 2 ครั้ง
6. สรุปผลการดำเนินงาน โครงการวิจัยและจัดทำรายงานฉบับสมบูรณ์

### วิธี *อะไพร์เออร์รี่* สำหรับการหาสมการความเค้นเรย์โนลด์

#### ในแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดไม่เชิงเส้น

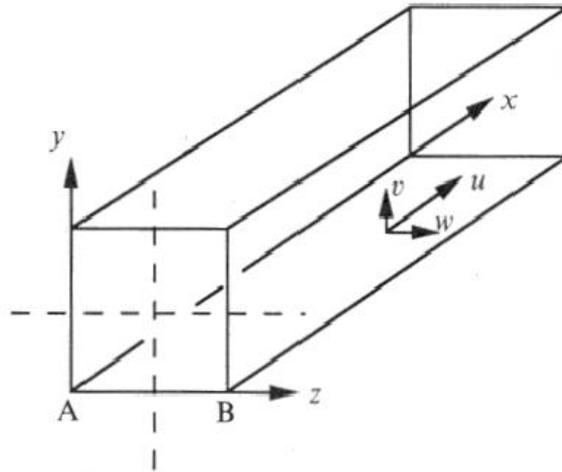
ในงานวิจัยส่วนนี้จะทำการหาสมการความเค้นเรย์โนลด์ในแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดไม่เชิงเส้นโดยใช้วิธี *อะไพร์เออร์รี่* (*a priori*) เริ่มต้นจะต้องลดรูปของสมการความเค้นเรย์โนลด์ทั้งหมดให้อยู่ในรูปการไหลผ่านระนาบคู่ขนาน และท่อตรงหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัส จากนั้นจะแทนค่าความเร็วเฉลี่ย ค่าพลังงานจลน์ความปั่นป่วน และค่าอัตราการลดลงของพลังงานจลน์ความปั่นป่วนลงไป ซึ่งวิธีแทนค่าในส่วนนี้จะทำโดยการเขียนโปรแกรมในรูปภาษา C++ ของสมการความเค้นเรย์โนลด์ที่แปลงอยู่ในรูป finite difference แล้วจึงนำค่าของการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรง

ลงในสมการความเค้นเรย์โนลด์ที่อยู่ในรูปภาษา C++ หลังจากนั้นนำค่าความเค้นเรย์โนลด์และความเร็วที่ได้มาเปรียบเทียบกับค่าจากการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรง โดยค่าจากการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงที่จะนำมาแทนนั้น ในกรณีของการไหลผ่านระนาบคู่ขนานจะใช้ค่าของ Kim et al. (1987) ซึ่งมีขอบเขตและพิภพดังภาพที่ 5 ที่  $Re_\tau$  เท่ากับ 180 และ 395 โดยที่  $Re_\tau = u_\tau \delta / \nu$ ,  $u_\tau$  คือความเร็วเสียดทาน  $u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$ ,  $\nu$  คือ ความหนืดของของไหล,  $\tau_w$  คือความเค้นเฉือนที่ผิว และ  $\delta$  คือความสูงครึ่งหนึ่งระหว่างแผ่นระนาบ ในส่วนของการไหลผ่านท่อตรงหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัส ใช้ค่าของ Gavrilakis (1992) ซึ่งมีขอบเขตและพิภพดังภาพที่ 6 ที่  $Re_b$  เท่ากับ 4410 โดย  $Re_b = Du_0 / \nu$ ,  $D$  คือ ความสูงของหน้าตัดท่อ และ  $u_0$  คือ ความเร็วก่อนเข้าท่อ เพื่อหาสมการที่ให้ค่าความเค้นเรย์โนลด์ที่ใกล้เคียงกับการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงที่สุด สำหรับสมการที่นำมาเปรียบเทียบนั้นมีดังนี้ Pope (1975), Nisizima and Yoshizawa (1987), Myong and Kasagi (1990), Rubinstein and Barton (1990), Shih et al. (1993), Craft et al. (1996), Lien et al. (1996), Apsley and Leschziner (1998) และ Abe et al. (2003)



ภาพที่ 5 แสดงกรณีศึกษาการไหลผ่านแผ่นระนาบคู่ขนาน

ที่มา : Kim et al. (1987)



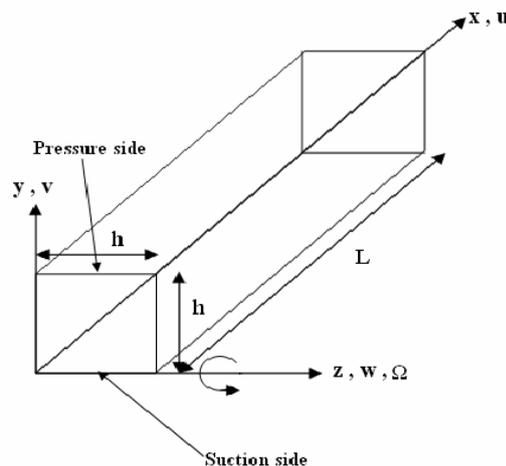
ภาพที่ 6 แสดงกรณีศึกษาการไหลผ่านท่อตรงหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัส  
ที่มา : Gavrilakis (1992)

### วิธีการหาแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดเชิงเส้น สำหรับการไหลผ่านท่อตรงที่มีการหมุน

ในซอฟต์แวร์สำเร็จรูปทางพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณทั่วไปนั้นแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดเชิงเส้นมีอยู่หลายแบบ แต่แบบจำลองที่นิยมใช้ได้แก่ แบบจำลองความปั่นป่วนชนิดเชิงเส้น  $k - \epsilon$  (Launder and Spalding 1972) แบบ high Reynolds number และ แบบจำลองความปั่นป่วนชนิดเชิงเส้น  $k - \omega$  SST (Menter 1994) แบบจำลองทั้งสองแบบนี้ให้ผลการศึกษาที่ดีในกรณีศึกษาต่างๆกัน ในบทนี้จึงมุ่งที่ทำการจำลองการไหลเปรียบเทียบเพื่อหาแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดเชิงเส้นที่ให้ประสิทธิภาพ และเหมาะสมกับลักษณะการไหลผ่านท่อตรงที่มีการหมุนที่สุด สำหรับแบบจำลองชนิดเชิงเส้น  $k - \epsilon$  นั้นจะนำ wall function จำนวน 3 ตัวมาใช้ในการศึกษาด้วยได้แก่ standard wall function ของ Launder and Spalding (1974), non-equilibrium wall function (NEWF) ของ Kim and Choudhury (1995) และ enhanced wall function (EWF) ของ Kader (1993) ในการทำการศึกษาเปรียบเทียบในส่วนนี้ทำการศึกษาโดยการสร้างกรณีศึกษาในซอฟต์แวร์สำเร็จรูปด้านพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ โดยเริ่มต้นทำการสร้างขอบเขตการคำนวณแบ่งกริด รวมถึงการกำหนดค่าขอบโดยใช้ซอฟต์แวร์ Gambit ซึ่งเป็นซอฟต์แวร์สำเร็จรูปด้านการแบ่งกริด และกำหนดค่าขอบเขต หลังจากนั้นจะทำการส่งผ่านข้อมูลไปทำการแทนค่าขอบเขต และทำการคำนวณ ยังซอฟต์แวร์ Fluent ซึ่งเป็นซอฟต์แวร์สำเร็จรูปด้านพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ แต่เนื่องจากขอบเขตของปัญหามีจำนวนกริดน้อยเป็นจำนวนมาก ในการคำนวณตามลำดับแบบปกติจึงใช้เวลาในการคำนวณมาก จึงได้มีการใช้การคำนวณแบบขนานเข้ามาช่วย ซึ่งการคำนวณ

แบบขนานนี้สามารถช่วยลดเวลาในการคำนวณได้มากถึง 40 เปอร์เซ็นต์ โดยวิธีการใช้ ซอฟต์แวร์ Gambit Fluent และการใช้การคำนวณแบบขนานอยู่ในภาคผนวกด้านหลัง

ด้านกรณีศึกษานี้จะใช้การไหลผ่านท่อตรงที่มีการหมุนของ Pallares and Davidson (2000) ดังภาพที่ 7 ที่  $Re_b$  เท่ากับ 48000 โดยที่  $Re_b = 2hU_b / \nu$ ,  $h$  คือความสูงของหน้าตัดท่อ และ  $U_b$  คือความเร็วก่อนเข้าท่อ ในรูปแบบการหมุนที่นำมาเปรียบเทียบนี้ทำการหมุนท่อรอบแกน  $z$  ที่ค่า rotating number ( $Ro = \Omega h / U_b$ ) จำนวน 3 ค่า ได้แก่ 0.0133, 0.0266 และ 0.12 ซึ่งค่า  $\Omega$  คือค่าความเร็วเชิงมุม โดยกำหนดให้ด้าน  $y/h = 0$  เป็นด้าน suction side ส่วนด้าน  $y/h = 1$  เป็นด้าน pressure side ในส่วนนี้นั้นจะทำการเปลี่ยนสมการควบคุมให้สมการไม่ต่อเนื่องโดยใช้วิธีไฟไนต์วอลุ่ม (finite volume method) ใช้กริดในการแบ่งขอบเขตย่อยเป็นชนิดที่มีโครงสร้างเป็นระเบียบ ด้านระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนั้นใช้ QUICK scheme ของ Leonard and Mokhtari (1990) ส่วนค่าการลู่เข้าของสมการนั้นใช้ค่า  $10^{-4}$  สำหรับทุกกรณีศึกษา และค่าตำแหน่งแรกของ  $y^+$  นั้นอยู่ในช่วงกำหนดของแบบจำลองแล้ว ส่วนสุดท้ายการพิจารณากริดอินดิเพนเด็นท์ (grid independent) กริดอินดิเพนเด็นท์หมายถึงค่ารูปแบบของความเร็วนั้นต้องไม่มีการเปลี่ยนแปลงเมื่อกริดละเอียดเพิ่มขึ้น งานวิจัยนี้ได้ทำการตรวจสอบแล้วพบว่าปริมาณกริดที่ใช้ในการคำนวณนั้นอินดิเพนเด็นท์แล้ว



ภาพที่ 7 แสดงกรณีศึกษาการไหลผ่านท่อตรงหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีการหมุน  
ที่มา : Pallares and Davidson (2000)

วิธีการพัฒนาแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดไม่เชิงเส้น  
สำหรับการไหลผ่านท่อตรงที่มีการหมุน

การศึกษาในส่วนนี้จะนำเสนอสมการความเค้นเรย์โนลด์ที่ดีที่สุดจากวิธี *อะไพโรเออร์รี่* มาทำการติดตั้งลงในแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดเชิงเส้นที่ดีที่สุดโดยใช้ฟังก์ชันยูติเอฟในซอฟต์แวร์ Fluent ซึ่งวิธีการใช้ฟังก์ชันยูติเอฟในซอฟต์แวร์ และตัวฟังก์ชันยูติเอฟของสมการความเค้นเรย์โนลด์อยู่ในภาคผนวกด้านหลัง สำหรับกรณีศึกษาที่ใช้ในการทดสอบแบบจำลองได้แก่ ไหลผ่านระนาบคู่ขนานของ Kim et al. (1987) การไหลผ่านท่อตรงของ Gavrilakis (1992) และการไหลผ่านท่อตรงที่มีการหมุนของ Martensson et al. (2005) ที่  $Re_b = 4400$  โดย  $Re_b = hU_b / \nu$ ,  $h$  คือความสูงของหน้าตัดท่อ และ  $U_b$  คือความเร็วก่อนเข้าท่อ สำหรับการหมุนที่นำมาเปรียบเทียบนี้ทำการหมุนท่อรอบแกน  $z$  ที่ค่า rotating number ( $Ro = \Omega h / U_b$ ) จำนวน 2 ค่า ได้แก่ 0.055 และ 0.11 ในส่วนของรูปร่างนั้นใช้รูปร่าง และฟังก์ชันแบบเดียวกับ Pallares and Davidson (2000) ดังภาพที่ 7 สำหรับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้นั้นใช้ second order upwind scheme ของ Barth and Jespersen (1989) การพิจารณากริดอินดิเพนเด็นท์นั้นงานวิจัยในส่วนนี้ยังไม่สามารถตรวจสอบกริดอินดิเพนเด็นท์ได้เนื่องจากขีดจำกัดของเครื่องคอมพิวเตอร์ทำให้ไม่สามารถแบ่งกริดได้จำนวนมากกว่านี้ ซึ่งผลที่นำมาแสดงในส่วนนี้เป็นจำนวนกริดที่มากที่สุดที่เครื่องจะแบ่งได้

## ผลการศึกษาและวิจารณ์

### ผลการใช้วิธี อะไพร์เออร์รี่ สำหรับการหาสมการความเค้นเรย์โนลด์์ใน แบบจำลองความปั่นป่วนชนิดไม่เชิงเส้น

จากการศึกษาโดยวิธี อะไพร์เออร์รี่ (*a priori*) เพื่อเปรียบเทียบสมการความสัมพันธ์ที่ใช้จำลองสมการความเค้นเรย์โนลด์์ในแบบจำลองความปั่นป่วนของการไหลชนิดไม่เชิงเส้นที่นำเสนอโดยกลุ่มวิจัยต่างๆ สำหรับการไหลระหว่างแผ่นระนาบที่คู่ขนานกันดังภาพที่ 5 ของ Kim et al. (1987) ที่  $Re_\tau$  เท่ากับ 180 และ 395 จากภาพที่ 8 ถึง 11 และภาพที่ 12 ถึง 15 แสดงค่าความเค้นเรย์โนลด์์ที่  $Re_\tau = 180$  และ 395 โดยค่าแกน  $x$  คือความสูงไร้มิติของระนาบ ( $Y^+$ ) และ ค่าแกน  $y$  คือความเค้นเรย์โนลด์์ในแนวตั้งฉาก และความเค้นเรย์โนลด์์เฉือนไร้มิติ โดยที่  $Y^+$ ,  $UU^+$ ,  $VV^+$ ,  $WW^+$  และ  $UV^+$  มีค่าเท่ากับ  $yu_\tau / \nu$ ,  $uu / u_\tau^2$ ,  $vv / u_\tau^2$ ,  $ww / u_\tau^2$  และ  $uv / u_\tau^2$  ตามลำดับ ซึ่ง  $y$  คือ ความสูงของระนาบคู่ขนานตั้งแต่ผิวด้านล่าง และ  $u_\tau$  คือค่าความเร็วเสียดทาน จากภาพของความเค้นเรย์โนลด์์ตั้งฉากไร้มิตินั้นทั้งที่  $Re_\tau = 180$  และ 395 ที่เห็นได้ว่าที่บริเวณใกล้ผิวของระนาบ ( $Y^+ = 0$ ) สมการความเค้นของ Craft et al. (1996) มีค่าใกล้เคียงกับค่าอ้างอิงมากที่สุด ส่วนในบริเวณที่พ้นจากผิวของระนาบออกมานั้น Craft et al. (1996), Myong and Kasagi (1990) และ Pope (1975) มีค่าค่อนข้างใกล้เคียงกัน เมื่อพิจารณาสมการโมเมนตัมที่ถูกลดรูปสำหรับการไหลผ่านระนาบคู่ขนานพบว่าค่าที่มีผลกระทบต่อค่าความเร็วที่คำนวณได้นั้นคือค่าความเค้นเรย์โนลด์์เฉือน จากภาพที่ 11 และ 15 เห็นได้ว่าที่บริเวณใกล้ผิวของระนาบนั้นค่าความเค้นเรย์โนลด์์เฉือนไร้มิติของ Craft et al. (1996) มีค่าใกล้เคียงกับค่าอ้างอิงมากที่สุดรวมถึงบริเวณที่พ้นจากผิวของระนาบมาแล้วด้วย

ต่อมาจากภาพที่ 16 ถึง 17 แสดงรูปแบบความเร็วเฉลี่ยไร้มิติตามแกน  $x$  ที่  $Re_\tau = 180$  และ  $Re_\tau = 395$  ตามลำดับ ค่าแกน  $x$  คือความเร็วเฉลี่ยไร้มิติตามแกน  $x$  ( $U^+$ ) โดย  $U^+ = U / u_\tau$  ค่า  $U$  คือความเร็วเฉลี่ยตามแกน  $x$  จากผลของค่าความเค้นเรย์โนลด์์เฉือนไร้มิติที่แสดงดังภาพที่ 11 และ 15 นั้นได้ส่งผลถึงรูปแบบของความเร็วภายในระนาบคู่ขนานดังภาพที่ 16 ถึง 17 เห็นได้ว่าที่บริเวณใกล้ผิว ( $\log Y^+ = 1$ ) ซึ่งค่าของ Craft et al. (1996) มีค่าความเค้นเรย์โนลด์์เฉือนที่ใกล้เคียงกับค่าอ้างอิงมากกว่าอื่นนั้น ได้มีรูปแบบความเร็วที่ดีกว่ารูปแบบความเร็วของสมการตัวอื่นทั้งที่  $Re_\tau = 180$  และ  $Re_\tau = 395$

หลังจากทำการศึกษาเปรียบเทียบโดยใช้กรณีศึกษาเป็นระนาบคู่ขนานแล้ว พบว่าสมการของ Craft et al. (1996) ให้ผลการศึกษาที่ดีกว่าสมการของกลุ่มวิจัยอื่นทั้งผลจากความเค้นเรย์โนลด์และรูปแบบความเร็ว จึงเลือกสมการของ Craft et al. (1996) มาทำการศึกษาต่อในปัญหาการไหลผ่านท่อตรงหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัส นอกจากนี้ในการตรวจสอบเอกสารพบว่าค่า damping function ( $f_{\mu}$ ) ของ Gibson and Dafa'Alla (1994) ให้ผลการศึกษาที่ดีในบริเวณใกล้ผิวจึงนำค่า damping function ของ Gibson and Dafa'Alla (1994) มารวมกับสมการของ Craft et al. (1996) อีกด้วย

สำหรับผลการหาสมการความเค้นเรย์โนลด์โดยวิธี อะไพโรเออร์รี่ สำหรับการไหลผ่านท่อตรงหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่นั่นจะใช้ค่า Reynolds number ( $Re_b$ ) เท่ากับ 4410 และใช้โดยนำข้อมูลจากการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงของ Gavrilakis (1992) มาเป็นค่าอ้างอิง จากภาพที่ 18 ถึง 29 แสดงค่าความเค้นเรย์โนลด์ ณ ตำแหน่ง  $z/h$  เท่ากับ 0.1 และ 0.5 ที่  $Re_b = 4800$  ค่าแกน  $x$  คือ ค่าความสูงของท่อ ( $z/h$ ) โดยที่  $h$  คือความสูงของท่อ และ  $z$  คือค่าความกว้างของท่อ สำหรับค่าแกน  $y$  คือ ความเค้นเรย์โนลด์ตั้งฉากและความเค้นเรย์โนลด์เลื่อนไรมิติ ณ ตำแหน่ง  $y/h = 0.1$  เป็นตำแหน่งที่อยู่ใกล้ผิวที่สุดและเป็นบริเวณที่ได้รับผลกระทบจากการไหลวน และตำแหน่งที่  $y/h = 0.5$  เป็นตำแหน่งบริเวณที่ห่างออกมาจากผิว และได้รับผลกระทบจากการไหลวนเช่นเดียวกับที่ตำแหน่ง  $z/h = 0.1$  โดยค่าความเค้นเรย์โนลด์ตั้งฉากไรมิติตามแกน  $x, y$  และ  $z$  คือ  $UU^+, VV^+$  และ  $WW^+$  ตามลำดับซึ่งเท่ากับ  $uu/u_{\tau}^2, vv/u_{\tau}^2$  และ  $ww/u_{\tau}^2$  อีกด้วย ส่วนค่าความเค้นเรย์โนลด์ตั้งฉากตามระนาบ  $xy, xz$  และ  $yz$  คือ  $UV^+, UW^+$  และ  $VW^+$  ตามลำดับซึ่งเท่ากับ  $uv/u_{\tau}^2, uw/u_{\tau}^2$  และ  $vw/u_{\tau}^2$  อีกด้วย จากภาพที่ 18 ถึง 23 นั้นเห็นได้ว่าค่าความเค้นเรย์โนลด์ตั้งฉาก ของ Craft et al. (1996) และ Craft et al. (1996) รวมกับ damping function ของ Gibson and Dafa'Alla (1994) นั้นมีรูปแบบที่มีลักษณะที่คล้ายคลึงกันทั้งสองแบบ ส่วนปริมาณของสมการทั้งสองมีค่าต่างกันเล็กน้อย ในบริเวณใกล้ผิวด้านล่างของท่อ ( $z/h = 0$ ) ค่าความเค้นเรย์โนลด์ของสมการทั้งสองตัวยังมีค่าค่อนข้างห่างจากค่าอ้างอิงอยู่ และบริเวณที่พ้นจากผิวขึ้นมาแล้วก็ยังมีค่าห่างจากค่าอ้างอิง ซึ่งในส่วนนี้สมการทั้งสองมีรูปแบบใกล้เคียงกันและมีค่าต่างกันเล็กน้อย และค่อนข้างห่างจากค่าอ้างอิง

ต่อมาในภาพที่ 30 ถึง 33 แสดงรูปแบบความเร็วเฉลี่ยไรมิติตามแกน  $x$  และแกน  $y$  ที่  $Re_b = 4410$  ค่าแกน  $x$  คือความเร็วเฉลี่ยไรมิติตามแกน  $x$  ( $u/u_0$ ) และ แกน  $y$  ( $v/u_0$ ) โดย  $u$  คือความเร็วเฉลี่ยตามแกน  $x$  และ  $v$  คือความเร็วเฉลี่ยตามแกน  $y$  จากภาพที่ 30 ถึง 31 เห็นได้ว่ารูปแบบความเร็วเฉลี่ยไรมิติตามแกน  $x$  จากสมการทั้งสองนั้นก็มีลักษณะและปริมาณที่

เหมือนกัน แต่มีค่าห่างจากค่าอ้างอิงพอสมควรเนื่องจากผลกระทบจากความเค้นเรย์โนลด์ตั้งฉาก และความเค้นเรย์โนลด์เฉือนที่ห่างจากค่าอ้างอิงเช่นกัน จากภาพที่ 32 ถึง 33 แสดงความเร็วเฉลี่ยไร้มิติตามแกน  $y$  ซึ่งความเร็วเฉลี่ยไร้มิติตามแกน  $y$  นี้เป็นความเร็วของการไหลวนที่เกิดขึ้นที่มุมของท่อ โดยรูปแบบของความเร็วจากสมการทั้งสองมีลักษณะคล้ายคลึงกัน ภาพที่ 32 บริเวณใกล้ผิวที่ตำแหน่ง  $z/h = 0.1$  นั้นค่าของ Craft et al. (1996) ร่วมกับ damping function ของ Gibson and Dafa'Alla (1994) มีค่าใกล้เคียงกับค่าอ้างอิงมากกว่า Craft et al. (1996) แต่ในภาพที่ 33 ทั้งสองมีทั้งรูปแบบและปริมาณที่เหมือนกัน จึงเห็นได้ว่าในบริเวณใกล้ผิวที่เกิดการไหลวนนั้นของ Craft et al. (1996) ร่วมกับ damping function ของ Gibson and Dafa'Alla (1994) ให้ผลการจำลองการไหลวนที่ดีกว่า ของ Craft et al. (1996)

หลังจากที่ทำการศึกษาโดยวิธี *อะไพพรเออร์รี่* ได้พิสูจน์ประสิทธิภาพให้เห็นความสามารถในการทำนายการไหลของสมการความเค้นเรย์โนลด์แล้ว ว่าสมการของ Craft et al. (1996) ร่วมกับ damping function ของ Gibson and Dafa'Alla (1994) มีความสามารถในการทำนายทั้งค่าความเค้นเรย์โนลด์ และความเร็วในการไหลผ่านระนาบคู่ขนาน ส่วนในกรณีการไหลผ่านท่อตรงหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัสสมการนี้ สามารถทำนายได้ใกล้เคียงกว่าค่าจากสมการของ Craft et al. (1996) ที่ยังไม่ได้ปรับปรุง ทั้งนี้เป็นเพราะค่า damping function ที่เหมาะสมที่ใช้ในการทำนายในช่วงใกล้ผิวนั่นเอง