

บทที่ 5

ผลเฉลยเชิงตัวเลข

ในบทที่ 5 ของวิทยานิพนธ์จะนำเสนอผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับปัญหาค่าของสมการลาปลาซ โดยใช้วิธีสมาชิกกำลังสอง ที่ใช้โปรแกรมเมทแลบในการคำนวณ (MQBEM) เปรียบเทียบกับวิธีสมาชิกเชิงเส้นที่ใช้โปรแกรมเมทแลบในการคำนวณ (MLBEM) และผลเฉลยแม่นยำ (Exact)

ตัวอย่างที่ 1 พิจารณาปัญหาค่า

$$\nabla^2 u = 0$$

ในสี่เหลี่ยมจัตุรัส

$$0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

มีเงื่อนไขขอบดังนี้

$$q = -2 \quad \text{บน } y = 0$$

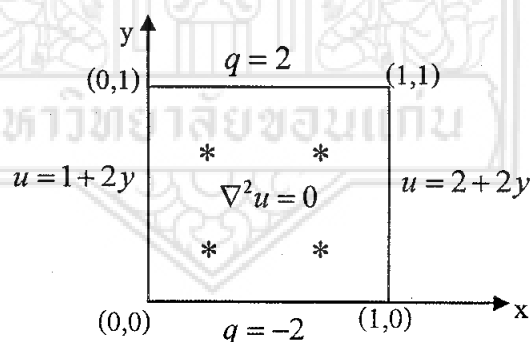
$$u = 2 + 2y \quad \text{บน } x = 1$$

$$q = 2 \quad \text{บน } y = 1$$

$$u = 1 + 2y \quad \text{บน } x = 0$$

ผลเฉลยแม่นยำ คือ $u = 1 + x + 2y$

ในการคำนวณจะใช้จุดขอบ 16 จุดและจุดภายใน 4 จุด ดังภาพที่ 5.1

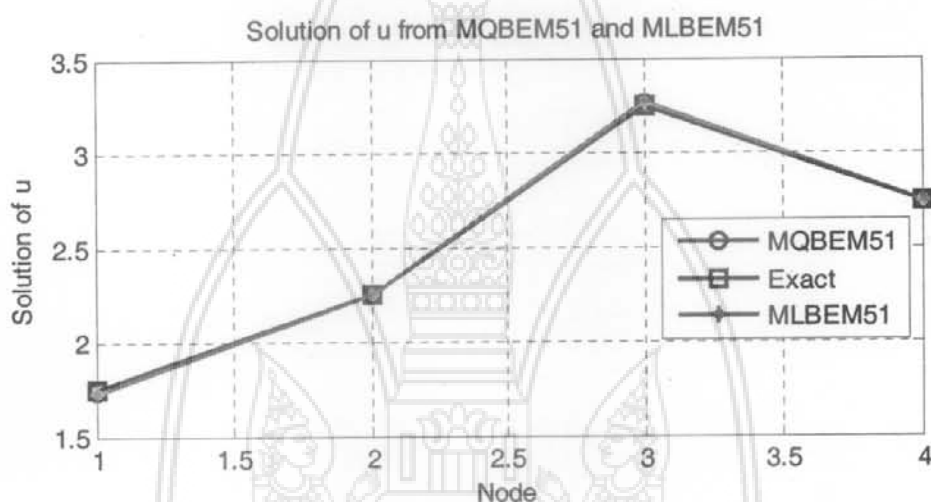


ภาพที่ 5.1 การประมาณค่าจุดภายใน 4 จุด ของปัญหาค่า เมื่อ * เป็นตำแหน่งจุดภายใน

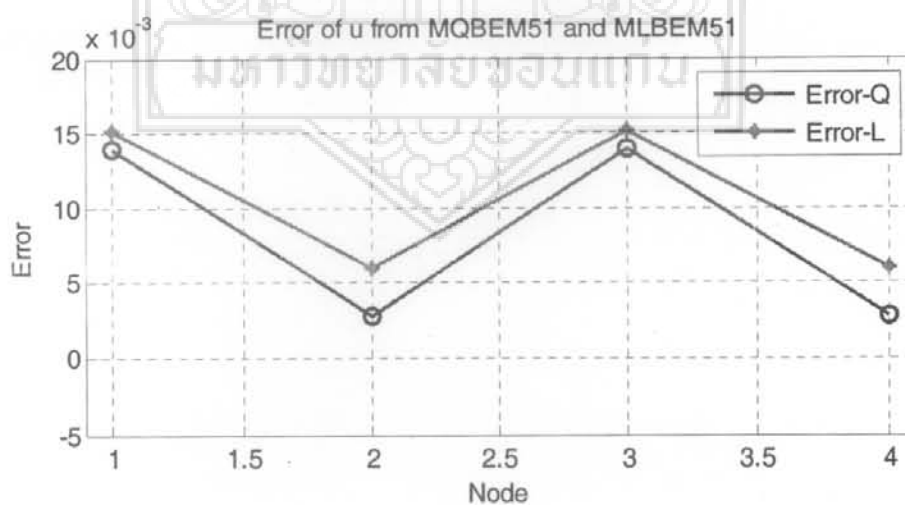
ผลเฉลยของจุดภายในที่คำนวณจาก MQBEM51 จะเปรียบเทียบกับผลเฉลยจาก MLBEM51 ที่คำนวณโดยวิธีสมาชิกเชิงเส้น และผลเฉลยแม่นยำ

ตารางที่ 5.1 การเปรียบเทียบผลเฉลยภายในจากตัวอย่างที่ 1

จุดภายใน	ML BEM51	MQ BEM51	ผลเฉลย แม่นยำ	ความคลาดเคลื่อน MLBEM51	ความคลาดเคลื่อน QLBEM51
(0.25,0.25)	1.7348	1.7360	1.7500	0.0152	0.0140
(0.75,0.25)	2.2559	2.2527	2.2500	0.0059	0.0027
(0.75,0.75)	3.2652	3.2640	3.2500	0.0152	0.0140
(0.25,0.75)	2.7441	2.7473	2.7500	0.0059	0.0027



ภาพที่ 5.2 แสดงการเปรียบเทียบของผลเฉลยจากตัวอย่างที่ 1



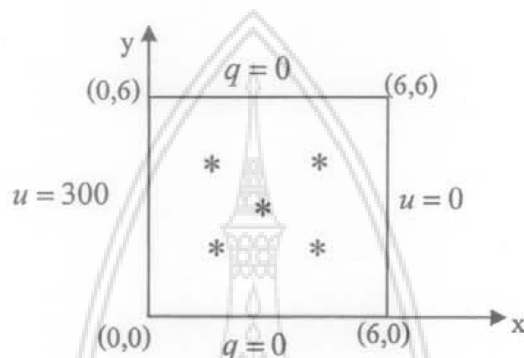
ภาพที่ 5.3 แสดงการเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนสมบูรณ์จากตัวอย่างที่ 1

ตัวอย่างที่ 2 พิจารณาปัญหาคัทช์

$$\nabla^2 u = 0$$

ในสี่เหลี่ยมจัตุรัส $0 < x < 6$, $0 < y < 6$ ซึ่งมีเงื่อนไขขอบตามภาพที่ 5.4

ผลเฉลยแม่นยำตรง คือ $u = 300 - 50x$

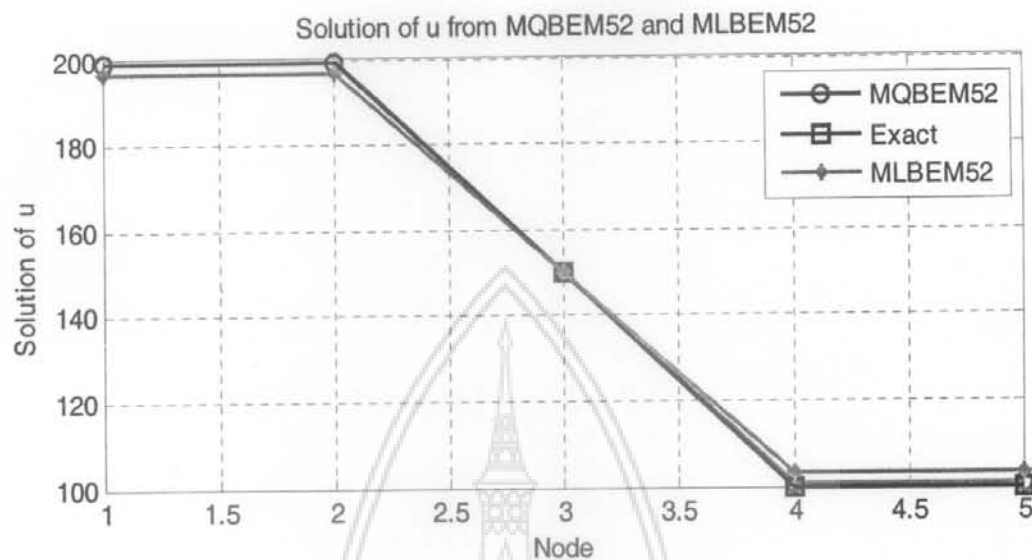


ภาพที่ 5.4 การประมาณค่าจุดภายใน 5 จุด ของปัญหาคัทช์ เมื่อ * เป็นตำแหน่งจุดภายใน

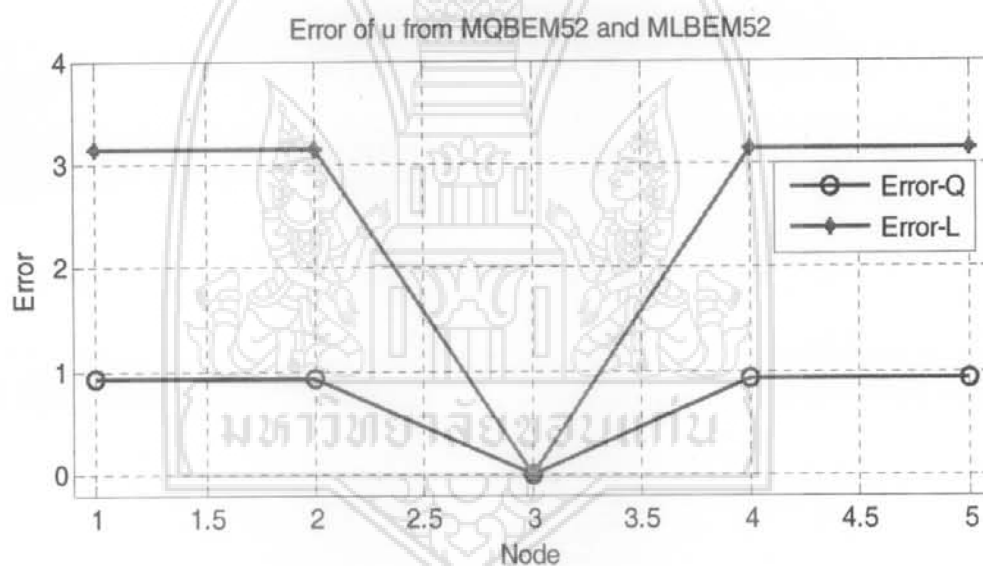
การคำนวณจะใช้จุดขอบ 4 จุดและจุดภายใน 4 จุด ผลเฉลยของจุดภายในจะเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง และผลเฉลยจาก MLBEM52 ที่คำนวณโดยระเบียบวิธีสมาชิกเชิงเส้น

ตารางที่ 5.2 การเปรียบเทียบผลเฉลยภายในจากตัวอย่างที่ 2

จุดภายใน	ML	MQ	ผลเฉลย	ความคลาดเคลื่อน	ความคลาดเคลื่อน
	BEM52	BEM52	แม่นยำตรง	MLBEM52	QLBEM52
(2,2)	196.8527	199.0656	200.0000	3.1473	0.9344
(2,4)	196.8527	199.0656	200.0000	3.1473	0.9344
(3,3)	150.0000	150.0004	150.0000	0.0000	0.0004
(4,2)	103.1466	100.9228	100.0000	3.1466	0.9228
(4,4)	103.1466	100.9228	100.0000	3.1466	0.9228

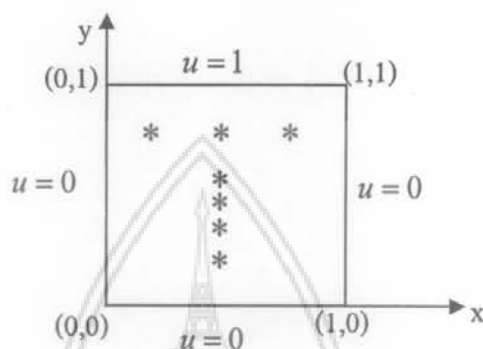


ภาพที่ 5.5 แสดงการเปรียบเทียบของผลเฉลยจากตัวอย่างที่ 2



ภาพที่ 5.6 แสดงการเปรียบเทียบค่าคาดเคลื่อนสมบูรณ์จากตัวอย่างที่ 2

ตัวอย่างที่ 3 พิจารณาปัญหาศักย์ โดยมีเงื่อนไขคิริเคล อยู่ในลักษณะสี่เหลี่ยมจัตุรัส และมีเงื่อนไขขอบตามภาพที่ 5.7



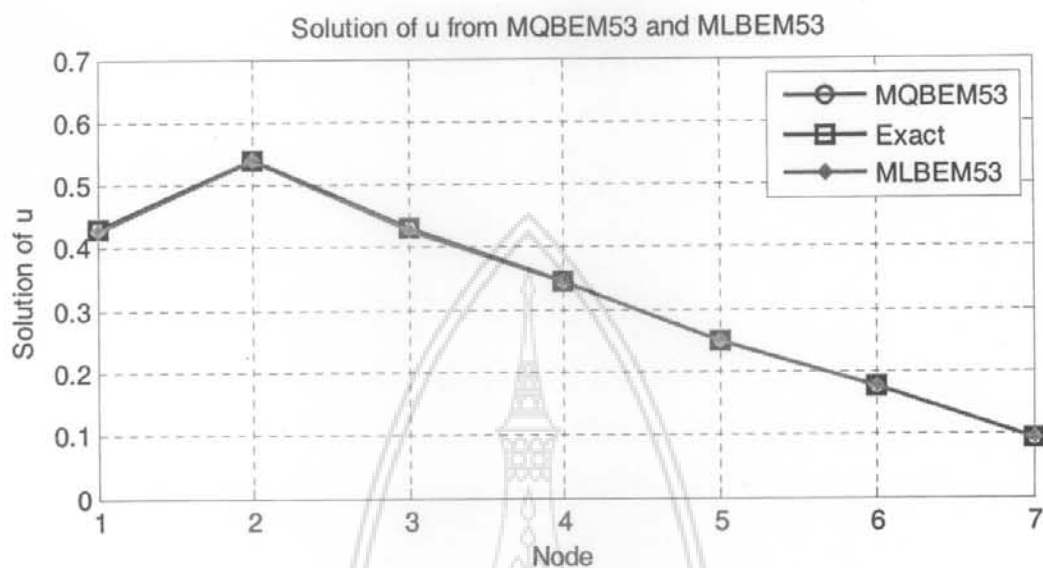
ภาพที่ 5.7 การประมาณค่าจุดภายใน 7 จุด ของปัญหาศักย์ เมื่อ * เป็นตำแหน่งจุดภายใน

ผลเฉลยแม่นยำตรง คือ
$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^n)(\sin(n\pi x)) \sinh(n\pi y)}{n(\sinh(n\pi y))}$$

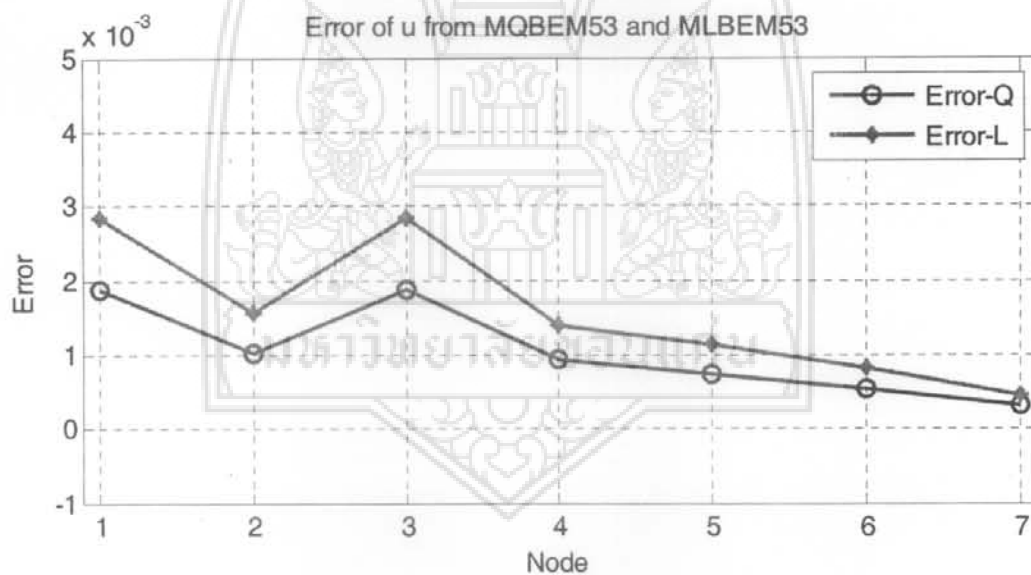
โดยกำหนดจุดขอบ 64 จุด และจุดภายใน 7 จุด ดังภาพที่ 5.7

ตารางที่ 5.3 การเปรียบเทียบผลเฉลยภายในจากตัวอย่างที่ 3

จุดภายใน	ML BEM53	MQ BEM53	ผลเฉลย แม่นยำตรง	ความคลาดเคลื่อน MLBEM53	ความคลาดเคลื่อน QLBEM53
(0.25,0.75)	0.4292	0.4302	0.4320	0.0028	0.0019
(0.50,0.75)	0.5390	0.5395	0.5405	0.0016	0.0010
(0.75,0.75)	0.4292	0.4302	0.4320	0.0028	0.0019
(0.50,0.60)	0.3439	0.3444	0.3453	0.0014	0.0009
(0.50,0.50)	0.2489	0.2493	0.2500	0.0011	0.0007
(0.50,0.40)	0.1757	0.1760	0.1765	0.0008	0.0006
(0.50,0.25)	0.0949	0.0951	0.0954	0.0005	0.0003

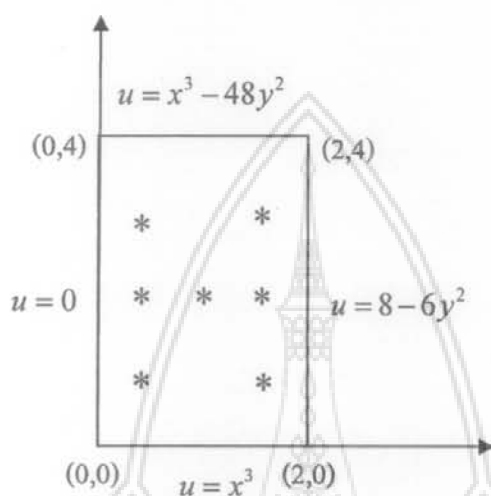


ภาพที่ 5.8 แสดงการเปรียบเทียบของผลเฉลยจากตัวอย่างที่ 3



ภาพที่ 5.9 แสดงการเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนสมบูรณ์จากตัวอย่างที่ 3

ตัวอย่างที่ 4 พิจารณาปัญหาคัทช์ โดยมีเงื่อนไขคิริเคล ที่เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งมีเงื่อนไขขอบดัง
ภาพที่ 5.10 ผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหาคัทช์คือ $u = x^3 - 3xy^2$

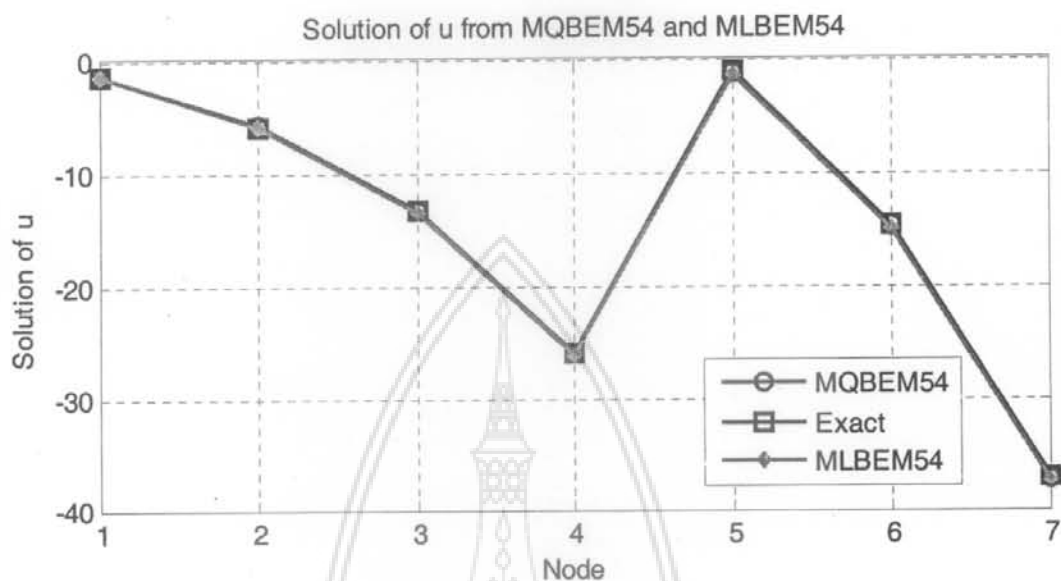


ภาพที่ 5.10 การประมาณค่าจุดภายใน 7 จุด ของปัญหาคัทช์ เมื่อ * เป็นตำแหน่งจุดภายใน

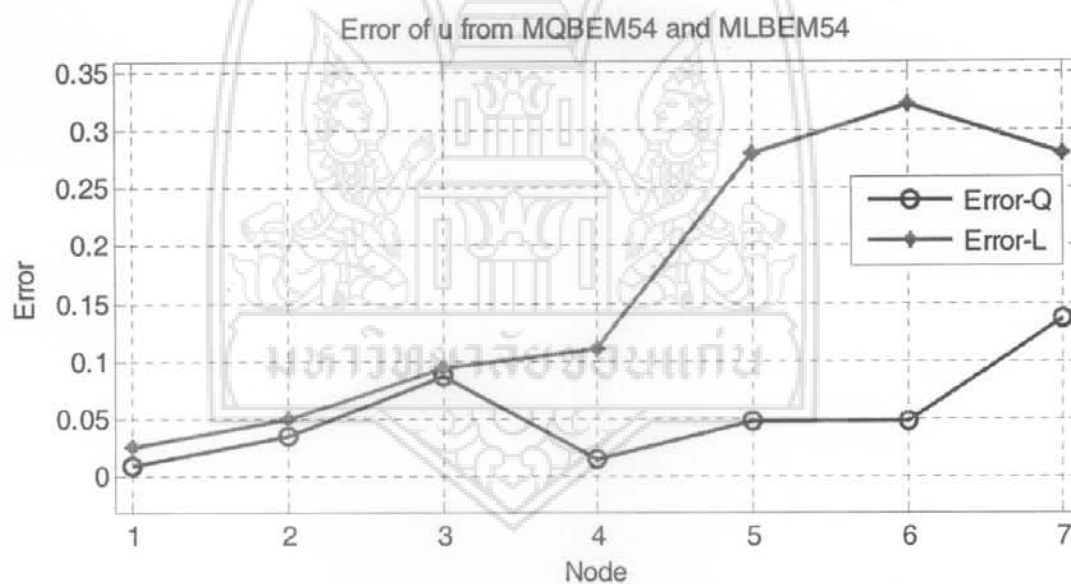
โดยกำหนดจุดขอบ 12 จุด และจุดภายใน 7 จุด ดังภาพที่ 5.10

ตารางที่ 5.4 การเปรียบเทียบผลเฉลยภายในจากตัวอย่างที่ 4

จุดภายใน	MLBEM54	MQBEM54	ผลเฉลย แม่นยำตรง	ความคลาดเคลื่อน MLBEM54	ความคลาดเคลื่อน QLBEM54
(0.5,1.0)	-1.4016	-1.3837	-1.3750	0.0266	0.0087
(0.5,2.0)	-5.9257	-5.8406	-5.8750	0.0507	0.0344
(0.5,3.0)	-13.4689	-13.2886	-13.3750	0.0939	0.0864
(1.0,3.0)	-26.1107	-25.9848	-26.0000	0.1107	0.0152
(1.5,1.0)	-1.4043	-1.1733	-1.1250	0.2793	0.0483
(1.5,2.0)	-14.9475	-14.5773	-14.6250	0.3225	0.0477
(1.5,3.0)	-37.4047	-37.2615	-37.1250	0.2797	0.1365

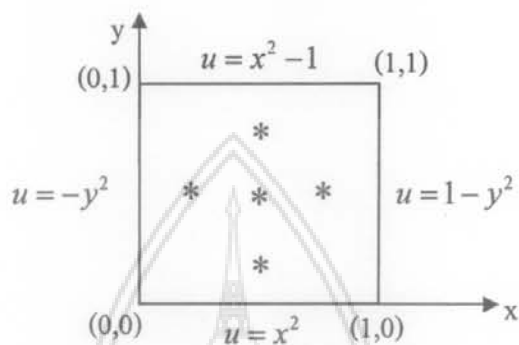


ภาพที่ 5.11 แสดงการเปรียบเทียบของผลเฉลยจากตัวอย่างที่ 4



ภาพที่ 5.12 แสดงการเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนสมบูรณ์จากตัวอย่างที่ 4

ตัวอย่างที่ 5 พิจารณาปัญหาศักย์ โดยมีเงื่อนไขซีรีเคิล อยู่ในลักษณะสี่เหลี่ยมจัตุรัส และมีเงื่อนไขขอบตามภาพที่ 5.13



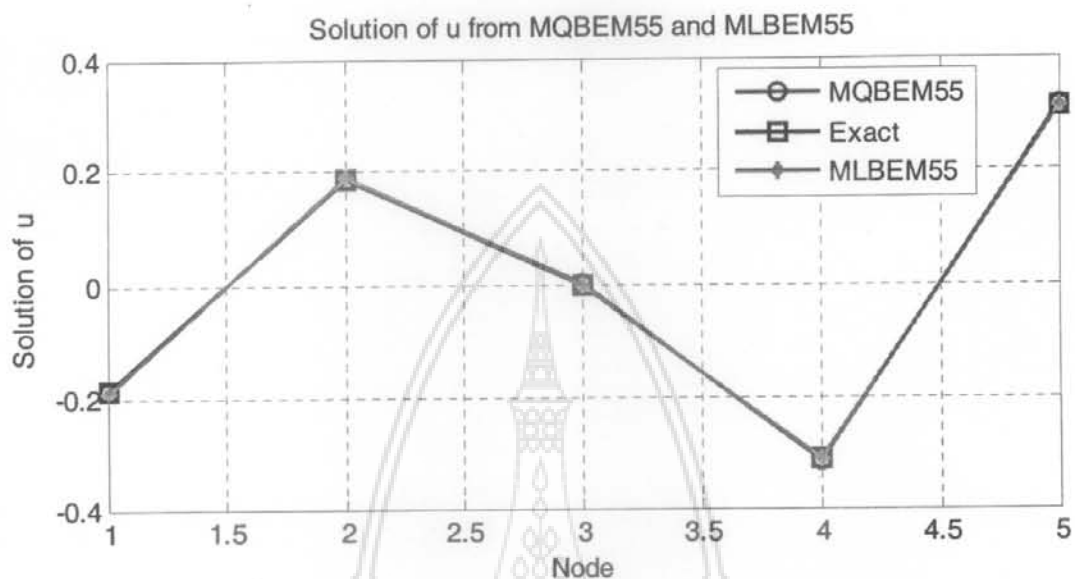
ภาพที่ 5.13 การประมาณค่าจุดภายใน 5 จุด ของปัญหาศักย์ เมื่อ * เป็นตำแหน่งจุดภายใน

ผลเฉลยแม่นยำตรง คือ $u = x^2 - y^2$

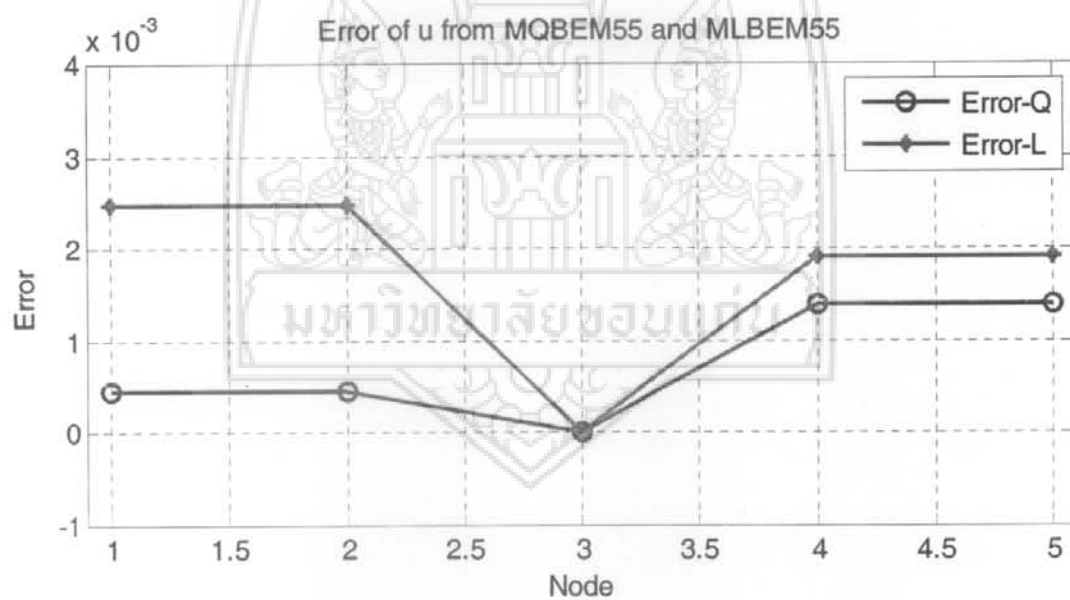
โดยกำหนดจุดขอบ 12 จุด และจุดภายใน 5 จุด ดังภาพที่ 5.13

ตารางที่ 5.5 การเปรียบเทียบผลเฉลยภายในจากตัวอย่างที่ 5

จุดภายใน	MLBEM54	MQBEM54	ผลเฉลย แม่นยำตรง	ความคลาดเคลื่อน MLBEM54	ความคลาดเคลื่อน QLBEM54
(0.25,0.50)	-0.1900	-0.1871	-0.1875	0.0025	0.0004
(0.50,0.25)	0.1900	0.1871	0.1875	0.0025	0.0004
(0.50,0.50)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
(0.50,0.75)	-0.3106	-0.3139	-0.3125	0.0019	0.0014
(0.75,0.50)	0.3106	0.3139	0.3125	0.0019	0.0014

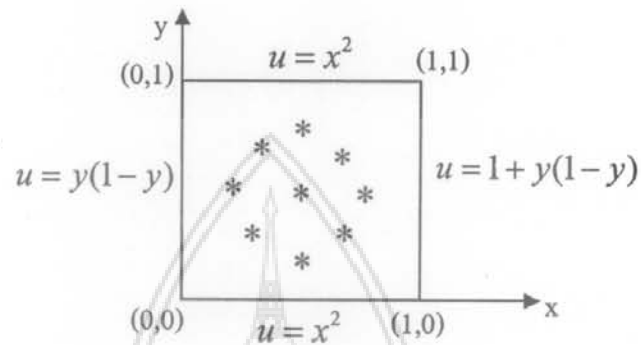


ภาพที่ 5.14 แสดงการเปรียบเทียบของผลเฉลยจากตัวอย่างที่ 5



ภาพที่ 5.15 แสดงการเปรียบเทียบค่าคาดเคลื่อนสมบูรณ์จากตัวอย่างที่ 5

ตัวอย่างที่ 6 พิจารณาปัญหาศักย์ โดยมีเงื่อนไขคิริเคล อยู่ในลักษณะสี่เหลี่ยมจัตุรัส และมีเงื่อนไขขอบตามภาพที่ 5.16



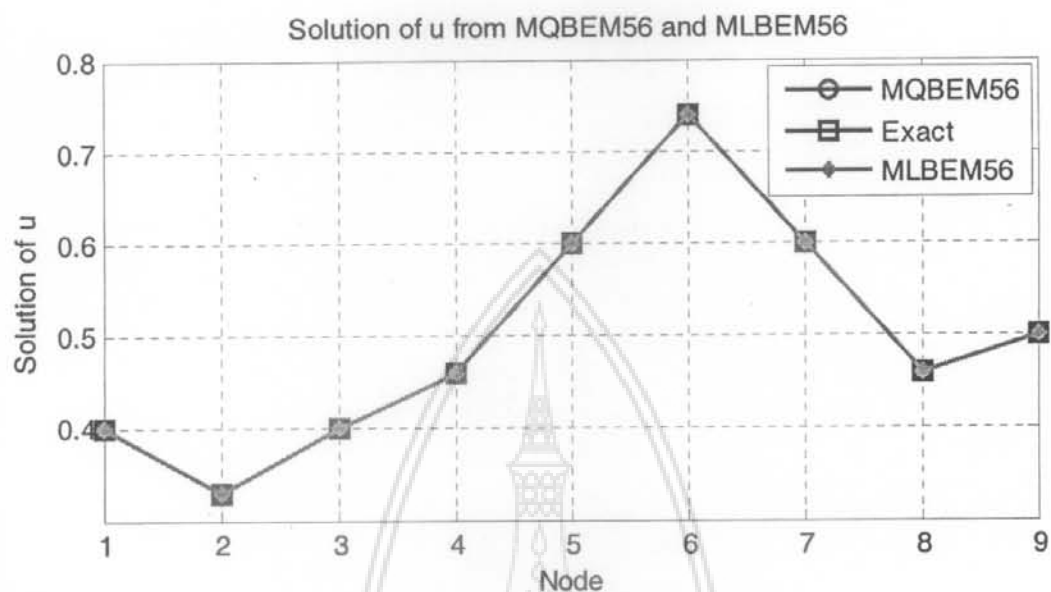
ภาพที่ 5.16 การประมาณค่าจุดภายใน 9 จุด ของปัญหาศักย์ เมื่อ * เป็นตำแหน่งจุดภายใน

ผลเฉลยแม่นยำตรง คือ $u = x^2 + y(1-y)$

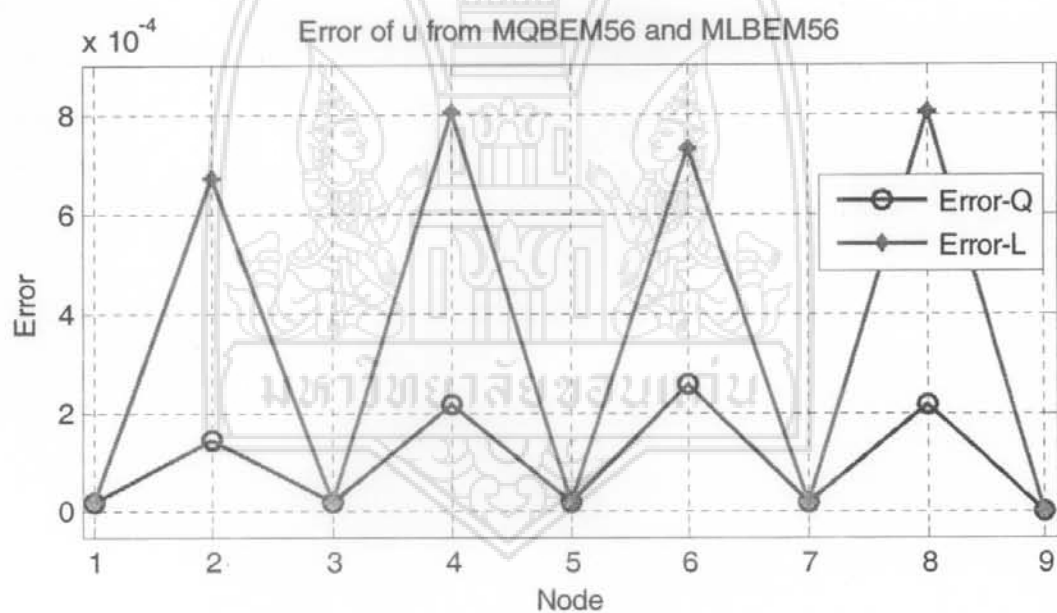
โดยกำหนดจุดขอบ 16 จุด และจุดภายใน 9 จุด ดังภาพที่ 5.16

ตารางที่ 5.6 การเปรียบเทียบผลเฉลยภายในจากตัวอย่างที่ 6

จุดภายใน	MLBEM56	MQBEM56	ผลเฉลย แม่นยำตรง	ความคลาดเคลื่อน MLBEM56	ความคลาดเคลื่อน QLBEM56
(0.4,0.6)	0.4000	0.4000	0.4000	0.0000	0.0000
(0.3,0.6)	0.3293	0.3301	0.3300	0.0007	0.0001
(0.4,0.4)	0.4000	0.4000	0.4000	0.0000	0.0000
(0.5,0.3)	0.4608	0.4598	0.4600	0.0008	0.0002
(0.6,0.4)	0.6000	0.6000	0.6000	0.0000	0.0000
(0.7,0.5)	0.7393	0.7403	0.7400	0.0007	0.0003
(0.6,0.6)	0.6000	0.6000	0.6000	0.0000	0.0000
(0.5,0.7)	0.4608	0.4598	0.4600	0.0008	0.0002
(0.5,0.5)	0.5000	0.5000	0.5000	0.0000	0.0000



ภาพที่ 5.17 แสดงการเปรียบเทียบของผลเฉลยจากตัวอย่างที่ 6



ภาพที่ 5.18 แสดงการเปรียบเทียบค่าคาดเคลื่อนสมบูรณ์จากตัวอย่างที่ 6

ตัวอย่างที่ 7 พิจารณาปัญหาค่าที่ เป็นรูปวงกลม

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{ใน} \quad x^2 + y^2 < 4$$

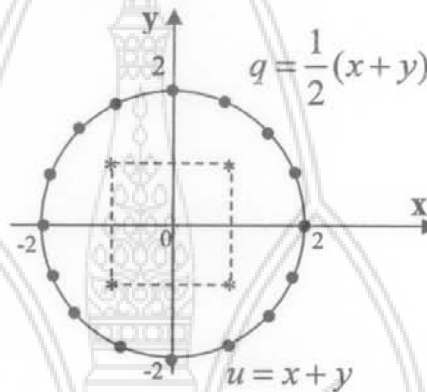
ซึ่งมีเงื่อนไขขอบ

$$u = x + y \quad \text{บน} \quad x^2 + y^2 = 4, x \leq 0$$

$$q = \frac{1}{2}(x + y) \quad \text{บน} \quad x^2 + y^2 = 4, x > 0$$

ผลเฉลยแน่นอนตรง คือ $u(x, y) = x + y$

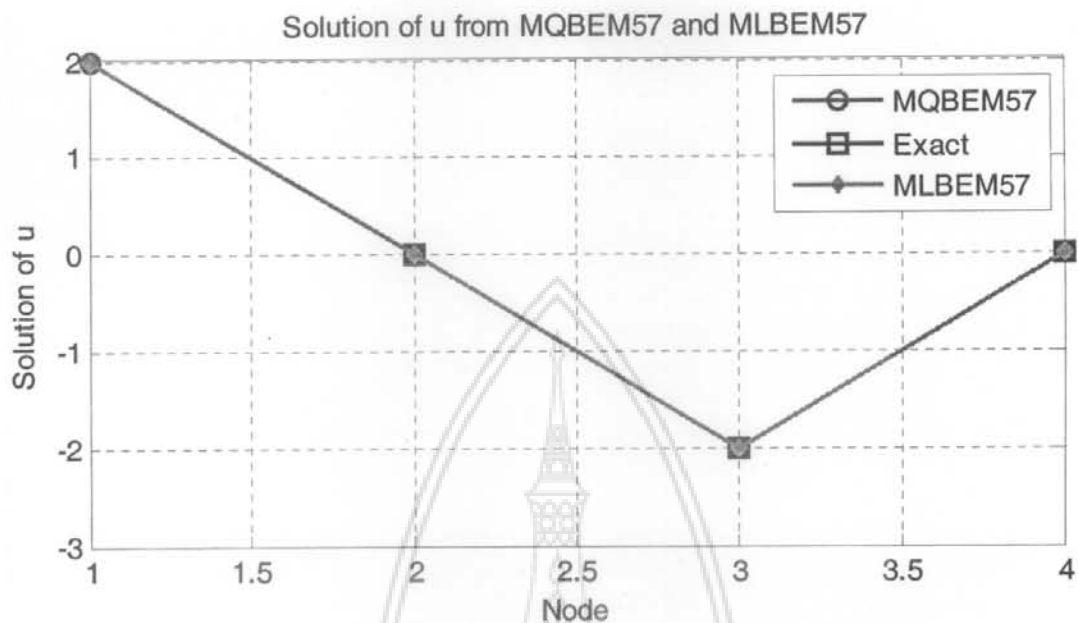
โดยกำหนดจุดขอบ 16 จุด และจุดภายใน 4 จุด ดังภาพที่ 5.19



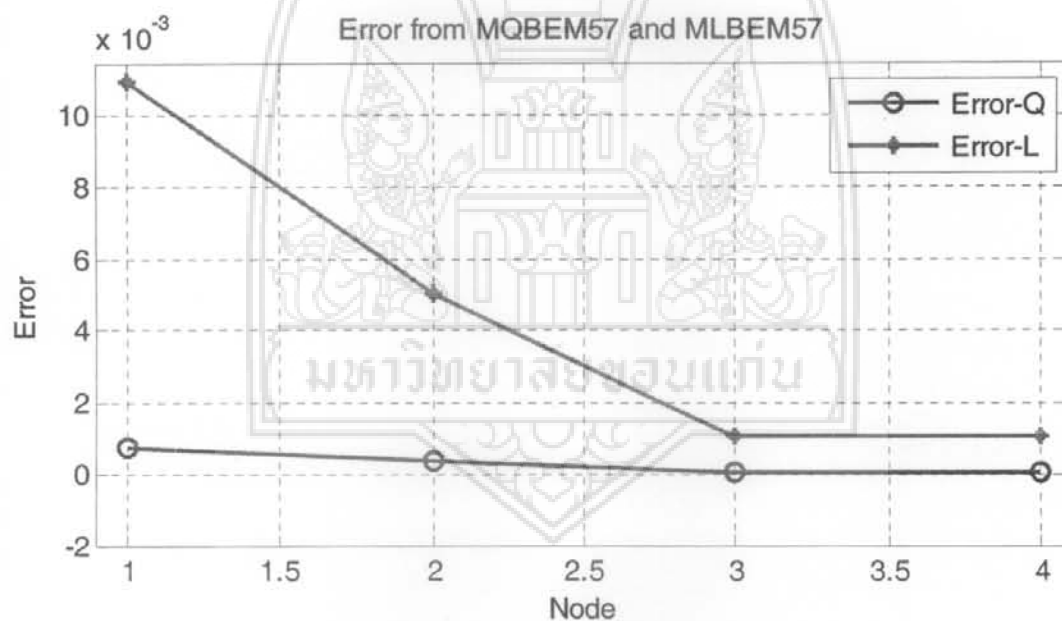
ภาพที่ 5.19 การประมาณค่าจุดภายใน 4 จุด ของปัญหาค่าที่ เมื่อ • เป็นตำแหน่งจุดขอบ และ * เป็นตำแหน่งจุดภายใน

ตารางที่ 5.7 การเปรียบเทียบผลเฉลยภายใน จากตัวอย่างที่ 7

จุดภายใน	MLBEM57	MQBEM57	ผลเฉลย แน่นอนตรง	ความคลาดเคลื่อน MLBEM57	ความคลาดเคลื่อน QLBEM57
(1,1)	1.9890	1.9993	2.0000	0.0110	0.0007
(-1,1)	-0.0050	-0.0004	0.0000	0.0050	0.0004
(-1,-1)	-1.9989	-2.0000	-2.0000	0.0011	0.0000
(1,-1)	-0.0011	-0.0001	0.0000	0.0011	0.0001



ภาพที่ 5.20 แสดงการเปรียบเทียบของผลเฉลยจากตัวอย่างที่ 7



ภาพที่ 5.21 แสดงการเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนสมบูรณจากตัวอย่างที่ 7

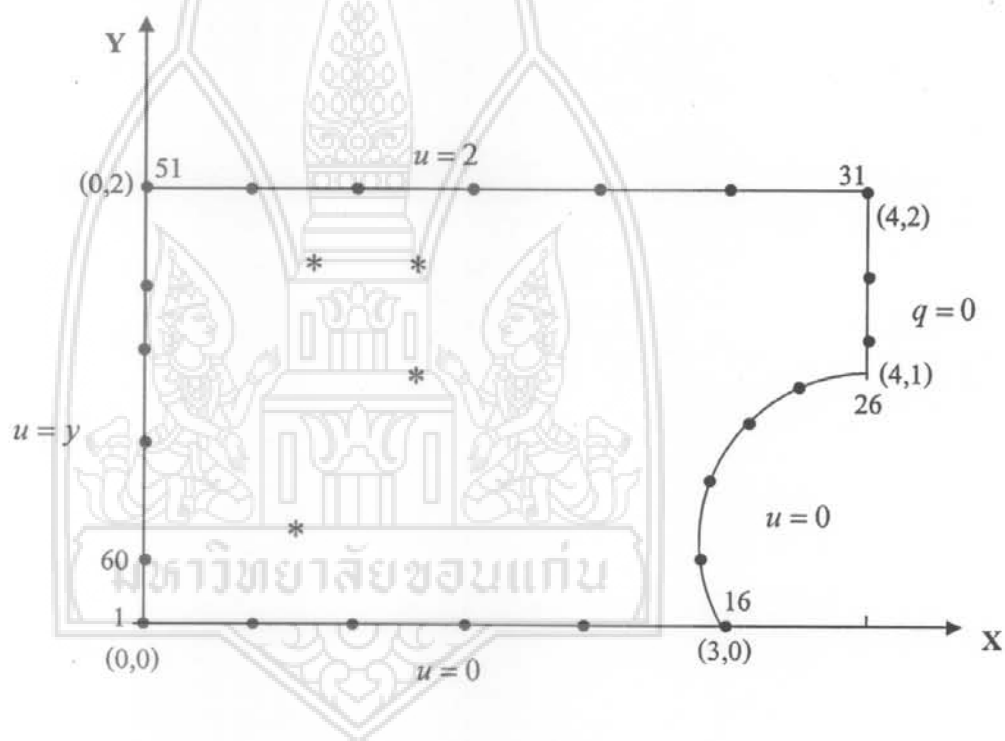
ตัวอย่างที่ 8 พิจารณาปัญหาหาค่าที่ขอบมีลักษณะ 2 ส่วนประกอบด้วย ส่วนที่เป็นสี่เหลี่ยม และ ส่วนที่เป็นเส้นโค้งวงกลม

$$\nabla^2 u = 0$$

โดยมีเงื่อนไขขอบดังนี้

$u = 0$	บน	$y = 0$
$u = 0$	บน	$(x-4)^2 + y^2 = 1, y \geq 0$
$q = 0$	บน	$x = 4, 1 < y < 2$
$u = 2$	บน	$y = 2$
$u = y$	บน	$y = 0$

โดยกำหนดจุดขอบ 60 จุด และจุดภายใน 4 จุด ดังภาพที่ 5.22

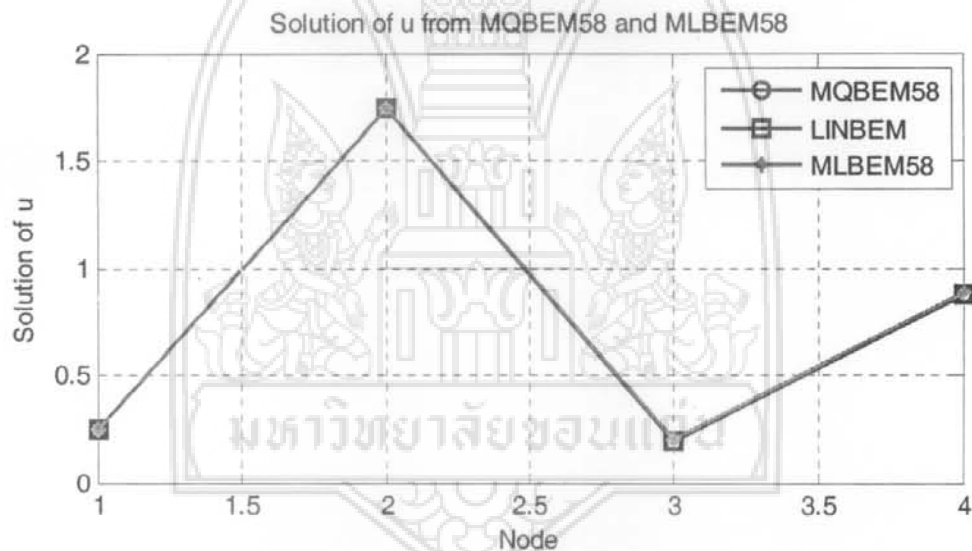


ภาพที่ 5.22 การประมาณค่าจุดภายใน 4 จุด ของปัญหาหาค่าที่ขอบ เมื่อ • เป็นตำแหน่งจุดขอบ และ * เป็นตำแหน่งจุดภายใน

เนื่องจากเราไม่มีผลเฉลยแม่นยำ ดังนั้นในการหาผลเฉลยของจุดภายใน ใช้การคำนวณ MQBEM58 เปรียบเทียบกับ MLBEM58 และ LINBEM (Toutip, 2001) ที่ใช้การคำนวณโดยวิธีเชิงเส้น

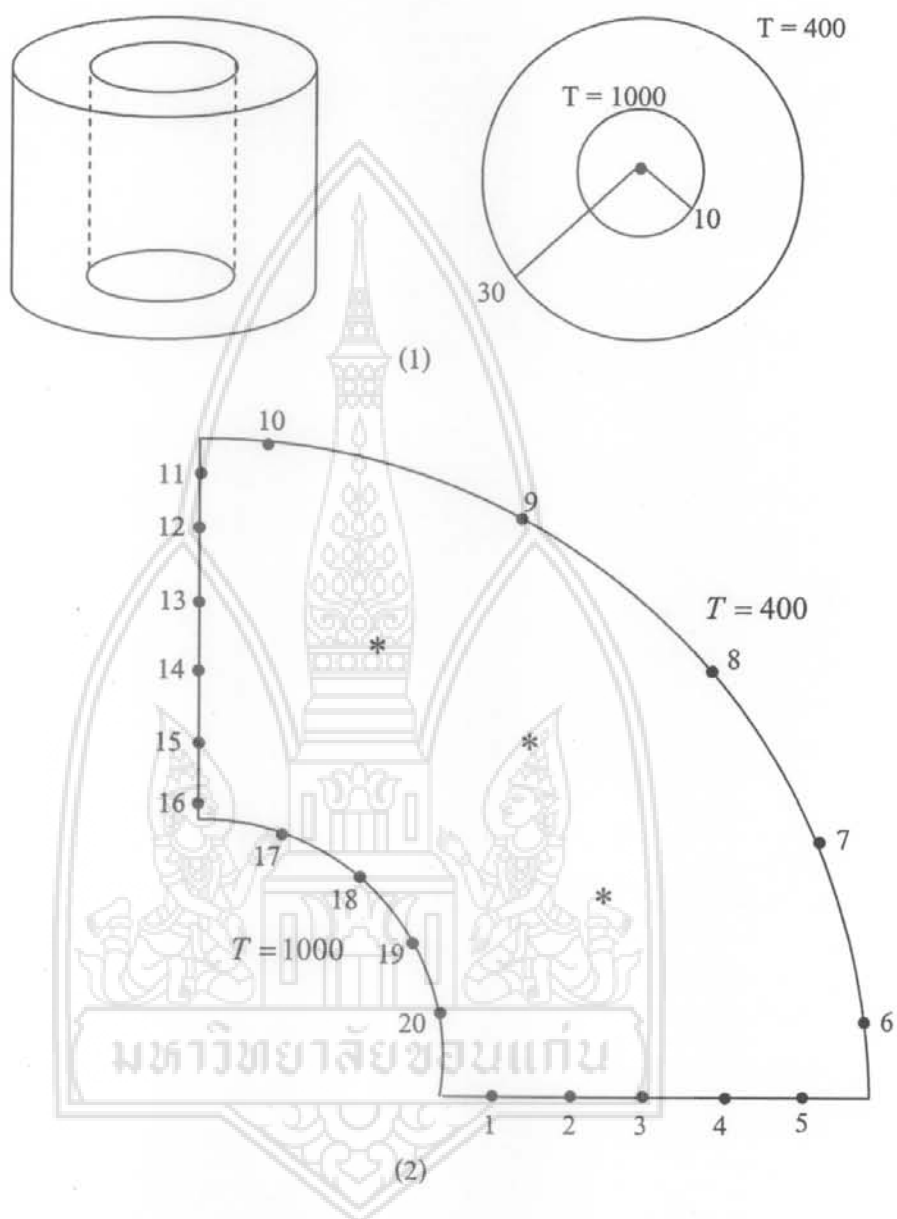
ตารางที่ 5.8 การเปรียบเทียบผลเฉลยภายใน จากตัวอย่างที่ 8

จุดภายใน	MLBEM58	MQBEM58	LINBEM
(0.75,0.25)	0.2450	0.2458	0.2457
(0.75,1.75)	1.7399	1.7459	1.7457
(2.25,0.25)	0.1979	0.1959	0.1960
(2.25,1.00)	0.8786	0.8748	0.8750



ภาพที่ 5.23 แสดงการเปรียบเทียบของผลเฉลยจากตัวอย่างที่ 8

ตัวอย่างที่ 9 พิจารณาปัญหาศักย์ ในรูปแบบการส่งความร้อนเข้าไปในรูของทรงกระบอกที่รัศมี 10 และ 30 ดังภาพที่ 5.24(1) และมีเงื่อนไขขอบตามภาพที่ 5.24(2)

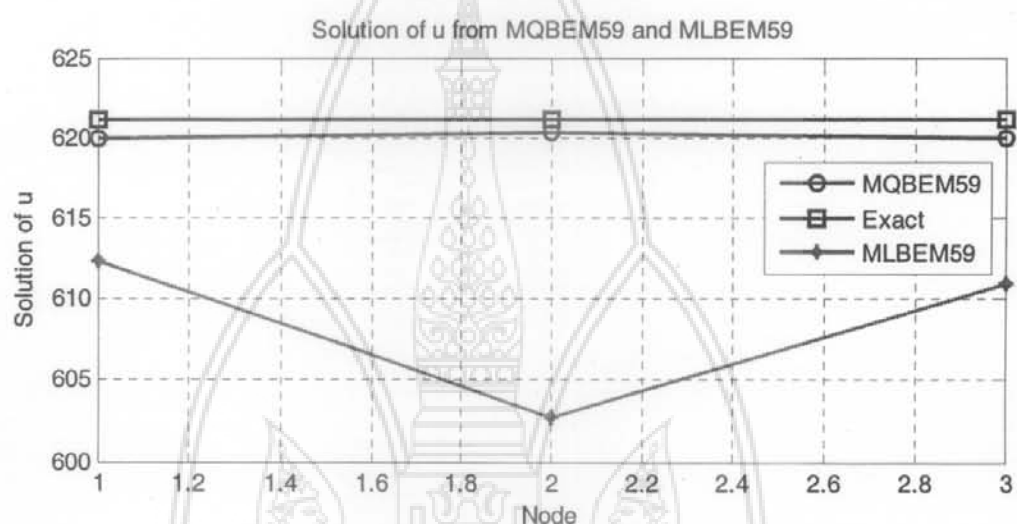


ภาพที่ 5.24 การประมาณค่าจุดภายใน 3 จุด ของปัญหาศักย์ เมื่อ • เป็นตำแหน่งจุดขอบ และ * เป็นตำแหน่งจุดภายใน

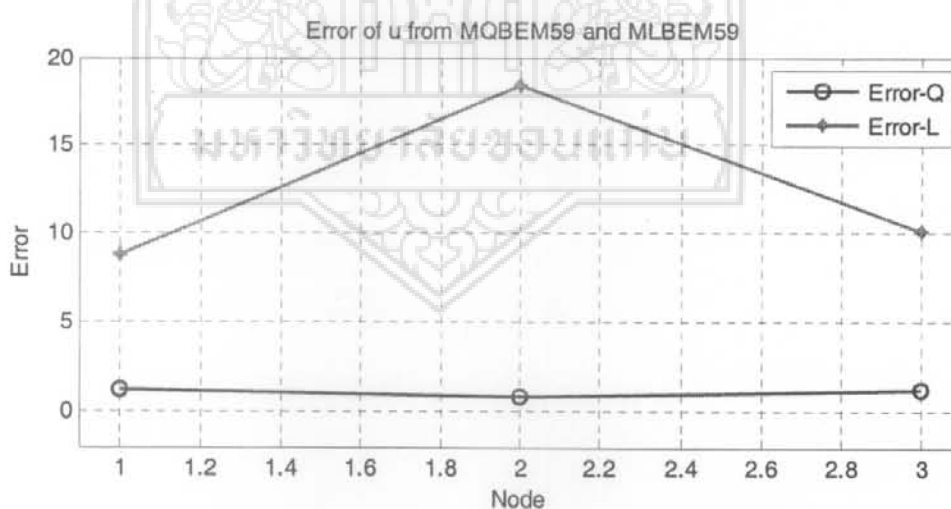
การคำนวณจะใช้จุดขอบจำนวน 20 จุด และจุดภายในจำนวน 3 จุด ผลเฉลยแม่นยำตรงที่ตำแหน่งรัศมี 20 คือ $T(20) = 621.1442$

ตารางที่ 5.9 แสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยภายใน จากตัวอย่างที่ 9

จุดภายใน	MLBEM59	MQBEM59	ผลเฉลย แม่นยำ	ความคลาดเคลื่อน MLBEM59	ความคลาดเคลื่อน QLBEM59
(18.477, 7.6530)	612.3795	619.9075	621.1442	8.7647	1.2367
(14.142, 14.142)	602.7568	620.3474	621.1442	18.3874	0.7968
(7.6530, 18.477)	610.9680	619.9075	621.1442	10.1762	1.2367



ภาพที่ 5.25 แสดงการเปรียบเทียบของผลเฉลยจากตัวอย่างที่ 9



ภาพที่ 5.26 แสดงการเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนสมบูรณจากตัวอย่างที่ 9