

บทที่ 3

ระเบียบวิธีสมาชิกตามขอบ

1. รูปแบบระเบียบวิธีสมาชิกตามขอบ

ระเบียบวิธีสมาชิกตามขอบสำหรับปัญหาศักย์ (Potentials Problem) u ในโดเมน Ω บนขอบ Γ มีสมการอินทิกรัลพื้นฐาน ที่รู้จักกันดีคือ

$$Cu + \oint_{\Gamma} u q^* ds = \oint_{\Gamma} u^* q ds \quad (3.1)$$

เมื่อ C คือ ค่าคงที่ซึ่งขึ้นอยู่กับตำแหน่งของจุดบนผิว

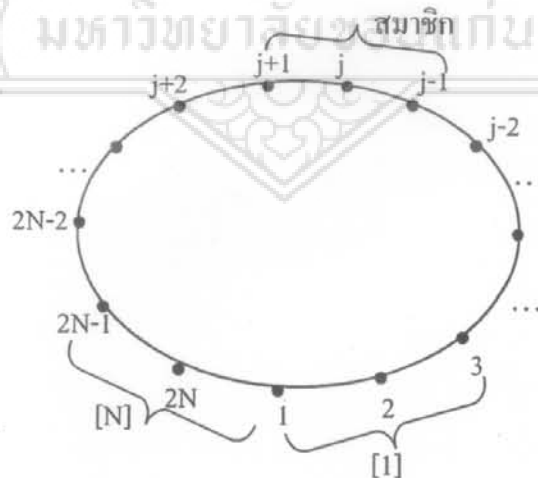
$q = \frac{\partial u}{\partial n}$ เมื่อ $\hat{n}$ เป็นเวกเตอร์ปรกติขนาดหนึ่งหน่วยบนผิวขอบ

u^* คือ ผลเฉลยมูลฐานของสมการลาปลาซ

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}$$

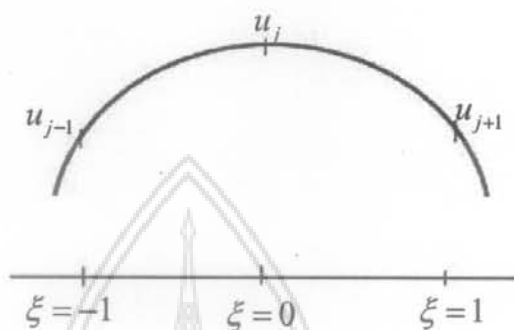
จากสมการ (3.1) ในระเบียบวิธีสมาชิกกำลังสองจะการแบ่งขอบ Γ เป็น N สมาชิก และมีจำนวนจุดขอบเท่ากับ $2N$ ดังภาพที่ 3.1 และแทนเส้นโค้ง Γ ด้วย Γ_N จะได้ว่าการอินทิเกรตบนขอบถูกประยุกต์โดย

$$Cu + \oint_{\Gamma_N} u q^* ds = \oint_{\Gamma_N} u^* q ds \quad (3.2)$$



ภาพที่ 3.1 การแบ่งส่วนของขอบออกเป็น N สมาชิก

2. วิธีสมาชิกกำลังสอง



ภาพที่ 3.2 การประมาณฟังก์ชัน u, q

สมาชิกกำลังสองจากภาพที่ 3.2 เราใช้การประมาณค่าฟังก์ชัน ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 และมักเรียกว่า ฟังก์ชันพื้นฐาน (shape function) ดังนั้นจะได้ว่าค่า u และ q สามารถเขียนในรูปของ

$$u(\xi) = \phi_1 U_{j-1} + \phi_2 U_j + \phi_3 U_{j+1} = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3] [U_{j-1} \ U_j \ U_{j+1}]^T \quad (3.3)$$

$$q(\xi) = \phi_1 Q_{j-1} + \phi_2 Q_j + \phi_3 Q_{j+1} = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3] [Q_{j-1} \ Q_j \ Q_{j+1}]^T \quad (3.4)$$

เมื่อ

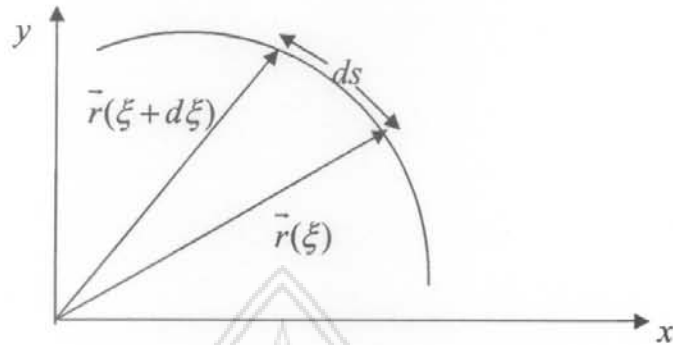
$$\phi_1 = \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi) \quad (3.5)$$

$$\phi_2 = (1 - \xi)^2 \quad (3.6)$$

$$\phi_3 = \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi) \quad (3.7)$$

พิจารณาอินทิเกรตตามเส้น จากภาพที่ 3.3 แสดงระยะระยะกณิกนันต์ (infinitesimal) ตามแนวเส้นโค้งระหว่าง $\bar{r}(\xi + d\xi)$ และ $\bar{r}(\xi)$ ซึ่งเท่ากับ ds

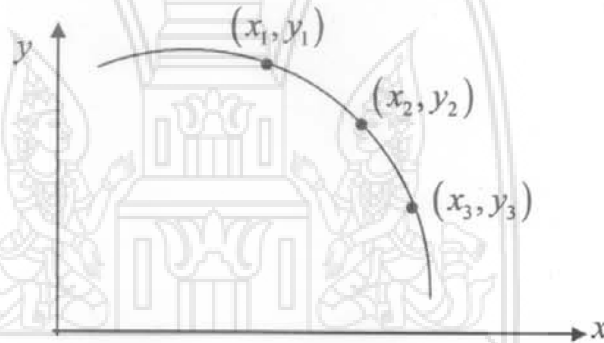
$$\begin{aligned} ds &= \left\| \frac{d\bar{r}}{d\xi} d\xi \right\| \\ &= \left\| \frac{dx}{d\xi} \bar{i} + \frac{dy}{d\xi} \bar{j} \right\| d\xi \end{aligned}$$



ภาพที่ 3.3 ระยะกณิกนันต์ ds บนเส้นโค้ง

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} d\xi \\ &= J(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\text{เมื่อ } J(\xi) = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} \quad (3.9)$$



ภาพที่ 3.4 เส้นโค้งที่ถูกกำหนดโดยจุดสามจุด

ถ้า $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ เป็นพิกัดของจุดในภาพที่ 3.4 เส้นโค้งที่กำหนดจุดทั้งสามสามารถบรรยายได้ด้วยฟังก์ชันต่อไปนี้

$$x = 0.5(\xi^2 - \xi)x_1 + (1 - \xi^2)x_2 + 0.5(\xi^2 + \xi)x_3 \quad (3.10)$$

$$y = 0.5(\xi^2 - \xi)y_1 + (1 - \xi^2)y_2 + 0.5(\xi^2 + \xi)y_3 \quad (3.11)$$

จัดรูปใหม่จะได้

$$x = 0.5\xi^2(x_1 - 2x_2 + x_3) + 0.5\xi(x_3 - x_1) + x_2 \quad (3.12)$$

$$y = 0.5\xi^2(y_1 - 2y_2 + y_3) + 0.5\xi(y_3 - y_1) + y_2 \quad (3.13)$$

โดยที่ (x, y) เป็นพิกัดของจุดใด ๆ บนเส้นโค้ง อนุพันธ์ของ x และ y เทียบกับ ξ คือ

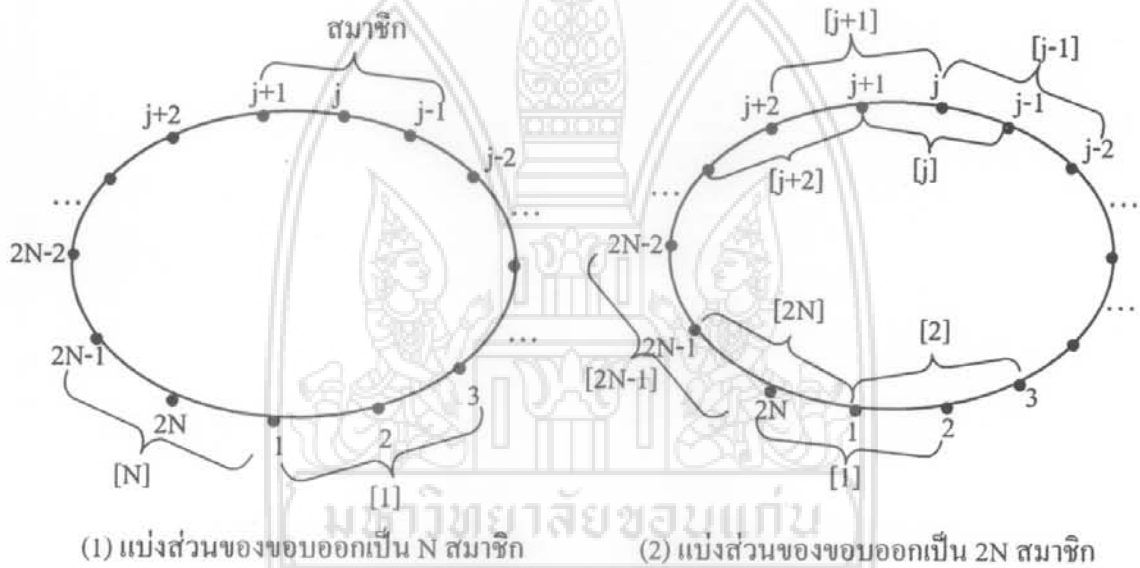
$$\frac{dx}{d\xi} = 0.5(x_3 - x_1) + (x_1 - 2x_2 + x_3)\xi \quad (3.14)$$

$$\frac{dy}{d\xi} = 0.5(y_3 - y_1) + (y_1 - 2y_2 + y_3)\xi \quad (3.15)$$

เมื่อแทนสมการ (3.14) และสมการ (3.15) ลงในสมการ (3.9)

$$J(\xi) = \{[(\xi(x_1 - 2x_2 + x_3) + 0.5(x_3 - x_1))]^2 + [\xi(y_1 - 2y_2 + y_3) + 0.5(y_3 - y_1)]^2\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.16)$$

ในการแบ่งสมาชิกของวิธีสมาชิกกำลังสองนั้นส่วนของสมาชิกจะมีจำนวนเท่ากับ N ซึ่งเป็นครึ่งหนึ่งของจำนวนจุดขอบ $2N$ จุด แต่เราต้องการคำนวณค่า U และ Q ทุกจุดบนจุดขอบ ดังนั้นเราจะแบ่งสมาชิกออกเป็น $2N$ ส่วน เท่ากับจำนวนจุดขอบ ภาพที่ 3.5



ภาพที่ 3.5 การแบ่งส่วนขอบสมาชิกกำลังสอง

จากภาพที่ 3.5 จากเห็นว่าการอินทิเกรตในภาพที่ 3.5(2) จะเป็น 2 เท่าของภาพที่ 3.5(1) ดังนั้นเมื่ออินทิเกรตตามภาพที่ 3.5(2) ต้องนำมาระหว่างสอง ก็จะได้การอินทิเกรตตามภาพที่ 3.5(1) ดังนั้น เมื่อแทนสมการ (3.3) และสมการ (3.8) ลงทางด้านซ้ายของสมการ (3.2) ที่มีจำนวนสมาชิก $2N$ สมาชิก และค่าอินทิเกรตบนสมาชิก $[j]$ คือ

$$\begin{aligned}
\oint_{\Gamma_{2N}} \sum_{j=1}^{2N} u q^* ds &= \sum_{j=1}^{2N} \int_{[j]} [\phi_1 \phi_2 \phi_3] q^* J(\xi) d(\xi) \begin{bmatrix} U_{j-1} \\ U_j \\ U_{j+1} \end{bmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{2N} \begin{bmatrix} h_{j1} & h_{j2} & h_{j3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{j-1} \\ U_j \\ U_{j+1} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

เมื่อ ในแต่ละสมาชิก $[j]$ จะประกอบด้วย 3 ส่วนประกอบคือ

$$h_{j1} = \int_{[j]} \phi_1 q^* J(\xi) d\xi \tag{3.18}$$

$$h_{j2} = \int_{[j]} \phi_2 q^* J(\xi) d\xi \tag{3.19}$$

$$h_{j3} = \int_{[j]} \phi_3 q^* J(\xi) d\xi \tag{3.20}$$

จากสมการ (3.17) สำหรับ $i=1,2,3,\dots,2N$ จะได้

$$\sum_{j=1}^{2N} \begin{bmatrix} h_{j1} & h_{j2} & h_{j3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{j-1} \\ U_j \\ U_{j+1} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{2N} (\hat{H}_{ij}) U_j \tag{3.21}$$

$$\text{เมื่อ } \hat{H}_{ij} = h_{(j+1)1} + h_{j2} + h_{(j-1)3} \tag{3.22}$$

และในทำนองเดียวกันแทนสมการ (3.4) และสมการ (3.8) ลงในสมการ (3.2) ทางด้านขวา จะได้

$$\begin{aligned}
\oint_{\Gamma_{2N}} \sum_{j=1}^{2N} q u^* ds &= \sum_{j=1}^{2N} \int_{[j]} [\phi_1 \phi_2 \phi_3] u^* J(\xi) d(\xi) \begin{bmatrix} Q_{j-1} \\ Q_j \\ Q_{j+1} \end{bmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{2N} \begin{bmatrix} g_{j1} & g_{j2} & g_{j3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{j-1} \\ Q_j \\ Q_{j+1} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

เมื่อ ในแต่ละสมาชิก $[j]$ จะประกอบด้วย 3 ส่วนประกอบคือ

$$g_{j1} = \int_{[j]} \phi_1 u^* J(\xi) d\xi \tag{3.24}$$

$$g_{j2} = \int_{[j]} \phi_2 u^* J(\xi) d\xi \tag{3.25}$$

$$g_{j3} = \int_{[j]} \phi_3 u^* J(\xi) d\xi \tag{3.26}$$

จากสมการ (3.23) สำหรับ $i=1,2,3,\dots,2N$ จะได้

$$\sum_{j=1}^{2N} \begin{bmatrix} g_{j1} & g_{j2} & g_{j3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{j-1} \\ Q_j \\ Q_{j+1} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{2N} (G_{ij}) U_j \quad (3.27)$$

$$\text{เมื่อ } G_{ij} = g_{(j+1)1} + g_{j2} + g_{(j-1)3} \quad (3.28)$$

และการพัฒนาระเบียบวิธีสมาชิกตามขอบ จะได้ว่า

$$C_i u_i + \sum_{j=1}^{2N} \hat{H}_{ij} U_j = \sum_{j=1}^{2N} G_{ij} Q_j \quad (3.29)$$

กำหนดให้

$$H_{ij} = \hat{H}_{ij} \quad \text{สำหรับ } i \neq j \quad (3.30)$$

$$H_{ij} = \hat{H}_{ij} + C \quad \text{สำหรับ } i = j \quad (3.31)$$

แทนค่าสมการ (3.30) สมการ (3.31) ลงในสมการ (3.29) จะได้ว่า

$$\sum_{j=1}^{2N} \hat{H}_{ij} U_j = \sum_{j=1}^{2N} G_{ij} Q_j \quad (3.32)$$

นั่นคือเขียนในรูปสมการเชิงเส้นในระบบเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$HU = GQ \quad (3.33)$$

ดังนั้นจากสมการ (3.32) และแทนค่าเงื่อนไขขอบที่กำหนดให้จะได้ระบบสมการเมตริกซ์ดังนี้

$$[H_1, H_2] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = [G_1, G_2] \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

เมื่อ U_1 และ Q_2 คือตัวที่ทราบค่าบนขอบ และ U_2 และ Q_1 คือตัวไม่ทราบค่าบนขอบ แล้วทำการจัดรูปสมการให้อยู่ในรูประบบ

$$Ax = y \quad (3.35)$$

$$\text{เมื่อ } A = [-G_1 H_2] \quad , x = \begin{bmatrix} Q_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad \text{และ } y = [G_2 Q_2 - H_1 U_1]$$

ทำการคำนวณหาคำตอบของระบบสมการคือ U_2 และ Q_1 ซึ่งเป็นค่าบนจุดบนขอบ
พิจารณา u_k ของจุดภายในดังนี้

$$u_k = \sum_{j=1}^{2N} \bar{G}_{kj} Q_j - \sum_{j=1}^{2N} \bar{H}_{kj} U_j \quad (3.36)$$

เมื่อ $\bar{G}_{kj}$ และ $\bar{H}_{kj}$ กระจ่ายในลักษณะเดียวกันกับ G_{kj} และ H_{kj}

3. การคำนวณเมตริกซ์ H_{ij} และ G_{ij}

ในส่วนนี้เราจะแสดงรายละเอียดการอินทิเกรตของ H_{ij} และ G_{ij} เราใช้วิธีสมมาตรกำลังสองในการคำนวณ โดยใช้การอินทิเกรตแบบแก๊ส 10 จุด

3.1 การคำนวณเมตริกซ์ H_{ij}

3.1.1 กรณี $i \neq j$ จากสมการ (3.22)

$$\hat{H}_{ij} = h_{(j+1)1} + h_{j2} + h_{(j-1)3}$$

$$\hat{H}_{ij} = \int_{[j+1]} \phi_1 q^* J(\xi)_{(j-1)} d\xi + \int_{[j]} \phi_2 q^* J(\xi)_{(j)} d\xi + \int_{[j-1]} \phi_3 q^* J(\xi)_{(j+1)} d\xi \quad (3.37)$$

$$\text{เมื่อ} \quad q^* = \frac{-1}{2\pi R^2} ((x_i - x)n_x + (y_i - y)n_y) \quad (3.38)$$

$$R = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} \quad (3.39)$$

$$n_x = \frac{dy/d\xi}{J(\xi)} \quad (3.40)$$

$$n_y = \frac{-dx/d\xi}{J(\xi)} \quad (3.41)$$

ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned} \hat{H}_{ij} = & \sum_{g=1}^{10} w_g \{0.5(\xi_g^2 - \xi_g) \frac{-1}{2\pi R_{i(j+1)}^2} [(x_i - (0.5\xi_g^2(x_j - 2x_{j+1} + x_{j+2}) + 0.5\xi_g(x_{j+2} - x_j) + x_{j+1}) \\ & \frac{(-(0.5(y_{j+2} - y_j) + (y_j - 2y_{j+1} + y_{j+2})\xi_g))}{J(\xi_g)_{(j+1)}}) + (y_i - (0.5\xi_g^2(y_j - 2y_{j+1} + y_{j+2}) + \\ & 0.5\xi_g(y_{j+2} - y_j) + y_{j+1}) \frac{(0.5(x_{j+2} - x_j) + (x_j - 2x_{j+1} + x_{j+2})\xi_g)}{J(\xi_g)_{(j+1)}}] \} J(\xi_g)_{(j+1)} \\ & + \sum_{g=1}^{10} w_g \{ (1 - \xi_g^2) \frac{-1}{2\pi R_{i(j)}^2} [(x_i - (0.5\xi_g^2(x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1}) + 0.5\xi_g(x_{j+1} - x_{j-1}) + x_j) \\ & \frac{(-(0.5(y_{j+1} - y_{j-1}) + (y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1})\xi_g))}{J(\xi_g)_{(j)}}) + (y_i - (0.5\xi_g^2(y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}) + \\ & 0.5\xi_g(y_{j+1} - y_{j-1}) + y_j) \frac{(0.5(x_{j+1} - x_{j-1}) + (x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1})\xi_g)}{J(\xi_g)_{(j)}}] \} J(\xi_g)_{(j)} \\ & + \sum_{g=1}^{10} w_g \{0.5(\xi_g^2 + \xi_g) \frac{-1}{2\pi R_{i(j-1)}^2} [(x_i - (0.5\xi_g^2(x_{j-2} - 2x_{j-1} + x_j) + 0.5\xi_g(x_j - x_{j-2}) + x_{j-1}) \\ & \frac{(-(0.5(y_j - y_{j-2}) + (y_{j-2} - 2y_{j-1} + y_j)\xi_g))}{J(\xi_g)_{(j-1)}}) + (y_i - (0.5\xi_g^2(y_{j-2} - 2y_{j-1} + y_j) + \\ & 0.5\xi_g(y_j - y_{j-2}) + y_{j-1}) \frac{(0.5(x_j - x_{j-2}) + (x_{j-2} - 2x_{j-1} + x_j)\xi_g)}{J(\xi_g)_{(j-1)}}] \} J(\xi_g)_{(j-1)} \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.1.2 กรณี $i = j$ จากสมการ (3.29)

$$C_i u_i + \sum_{j=1}^{2N} \hat{H}_{ij} U_j = \sum_{j=1}^{2N} G_{ij} Q_j$$

ซึ่งสอดคล้องกับฟังก์ชันฮาร์โมนิก เนื่องจาก $u=1$, $q = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$

เป็นฟังก์ชันฮาร์โมนิก จึงได้ว่า

$$C_i + \sum_{j=1}^{2N} \hat{H}_{ij} = 0 \quad \text{หรือ} \quad C_i = -\sum_{j=1}^{2N} \hat{H}_{ij}$$

แทนเข้าไปในสมการ (31) จะได้

$$\begin{aligned} H_{ii} &= \hat{H}_{ii} - \sum_{j=1}^{2N} \hat{H}_{ij} = -\sum_{j=1, j \neq i}^{2N} \hat{H}_{ij} \\ H_{ii} &= -\sum_{j=1, j \neq i}^{2N} H_{ij} \end{aligned} \quad (3.43)$$

3.2 การคำนวณเมตริกซ์ G_{ij}

3.2.1 กรณี $i \neq j$

จากสมการ (3.28)

$$\begin{aligned} G_{ij} &= g_{(j+1)1} + g_{j2} + g_{(j-1)3} \\ G_{ij} &= \int_{[j+1]} \phi_1 u^* ds + \int_{[j]} \phi_2 u^* ds + \int_{[j-1]} \phi_3 u^* ds \end{aligned} \quad (3.44)$$

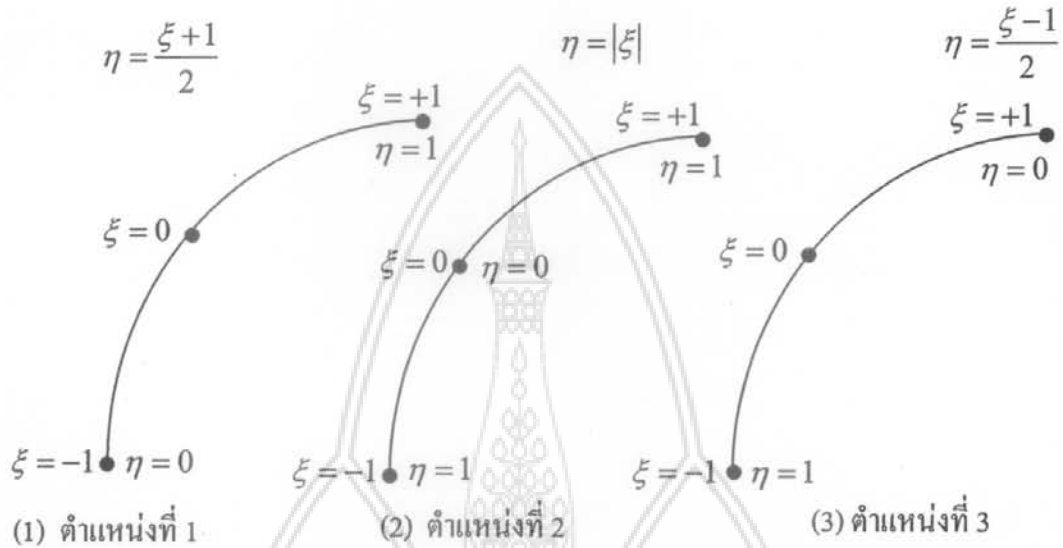
$$\text{เมื่อ} \quad u^* = \frac{-1}{2\pi} (\ln R) \quad (3.45)$$

แทนสมการ (3.8) และ (3.45) ในสมการ (3.44) จะได้

$$\begin{aligned} G_j &= \int_{[j+1]} \frac{(\xi^2 - \xi)}{2} \left(\frac{-1}{2\pi} \right) \ln(R_{i(j+1)}) J(\xi)_{(j+1)} d\xi + \int_{[j]} (1 - \xi^2) \left(\frac{-1}{2\pi} \right) \ln(R_{i(j)}) J(\xi)_{(j)} d\xi + \\ &\quad \int_{[j-1]} \frac{(\xi^2 + \xi)}{2} \left(\frac{-1}{2\pi} \right) \ln(R_{i(j-1)}) J(\xi)_{(j-1)} d\xi \\ G_{ij} &= \sum_{g=1}^{10} w_g \frac{(\xi_g^2 - \xi_g)}{2} \left(\frac{-1}{2\pi} \right) \ln(R_{i(j+1)})_g (J(\xi)_{(j+1)})_g + \sum_{g=1}^{10} w_g (1 - \xi_g^2) \left(\frac{-1}{2\pi} \right) \ln(R_{i(j)})_g \\ &\quad (J(\xi)_{(j)})_g + \sum_{g=1}^{10} w_g \frac{(\xi_g^2 + \xi_g)}{2} \left(\frac{-1}{2\pi} \right) \ln(R_{i(j-1)})_g (J(\xi)_{(j-1)})_g \end{aligned} \quad (3.46)$$

3.2.2 กรณี $i = j$

ต่อไปนี้เป็นรายละเอียดของการอินทิเกรต โดยเปลี่ยนตัวแปรจาก ξ เป็น η โดยแบ่งออกเป็นสามกรณี ดังภาพที่ 3.6



ภาพที่ 3.6 การเปลี่ยนค่าโดเมน จาก $-1 \leq \xi \leq 1$ เป็น $0 \leq \eta \leq 1$

กรณีที่ 1 ถ้าจุด i อยู่ตำแหน่งเดียวกับตำแหน่งที่ 1 จากภาพที่ 3.6(1)

กำหนดให้

$$\eta = 0.5(1 + \xi)$$

$$\xi = 2\eta - 1$$

แทน η ในสมการ (3.15) และ (3.16) จะได้

$$x = (1 - \eta)(1 - 2\eta)x_1 + 4\eta(1 - \eta)x_2 + \eta(2\eta - 1)x_3$$

$$y = (1 - \eta)(1 - 2\eta)y_1 + 4\eta(1 - \eta)y_2 + \eta(2\eta - 1)y_3$$

$$r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

$$= \eta \sqrt{(-3x_1 + 4x_2 - x_3)^2 + (-3y_1 + 4y_2 - y_3)^2}$$

$$+ \eta^2 \times (\text{ฟังก์ชันพหุนามของ } \eta)$$

$$J = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(-1.5x_1 + 2x_2 - 0.5x_3)^2 + (-1.5y_1 + 2y_2 - 0.5y_3)^2}$$

$$+ \eta \times (\text{ฟังก์ชันพหุนามของ } \eta)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi &= \int_0^1 f(\eta) 2d\eta \\
 &= \int_0^1 2f_0 \ln \eta d\eta + \int_0^1 (f(\eta) - f_0 \ln \eta) 2d\eta \\
 &= -2f_0 + \int_{-1}^1 \left[f(\xi) - f_0 \ln \left(\frac{1+\xi}{2} \right) \right] d\xi \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

เมื่อ $f(\xi) = \frac{-\phi(\xi) \ln(r(\xi)) J(\xi)}{2\pi}$ และ $f_0 = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\frac{f(\eta)}{\ln(\eta)} \right]$ เป็นค่าคงที่ นั่นคือ

$$f_0 = \frac{-\sqrt{(-1.5x_1 + 2x_2 - 0.5x_3)^2 + (-1.5y_1 + 2y_2 - 0.5y_3)^2}}{2\pi}$$

พจน์ที่สองทางด้านขวาของสมการ (3.47) สามารถหาค่าได้โดยการอินทิเกรตแบบเกาส์ได้

กรณีที่ 2 ถ้าจุด i อยู่ตำแหน่งเดียวกับตำแหน่งที่ 2 จากภาพที่ 3.6(2)

กำหนดให้

$$\eta = |\xi|$$

แทน η ในสมการ (3.12) และ (3.13) จะได้

$$x = -0.5\eta(1-\eta)x_1 + (1+\eta)(1-\eta)x_2 + 0.5\eta(1+\eta)x_3$$

$$y = -0.5\eta(1-\eta)y_1 + (1+\eta)(1-\eta)y_2 + 0.5\eta(1+\eta)y_3$$

$$r = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= 0.5|\eta| \sqrt{(x_3-x_1)^2 + (y_3-y_1)^2} \\
 &\quad + \eta^2 \times (\text{ฟังก์ชันพหุนามของ } \eta)
 \end{aligned}$$

$$J = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2}$$

$$= 0.5\sqrt{(x_3-x_1)^2 + (y_3-y_1)^2} + \eta \times (\text{ฟังก์ชันพหุนามของ } \eta)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi &= \int_{-1}^1 f(\eta) d\eta \\
 &= \int_{-1}^1 f_0 \ln |\eta| d\eta + \int_{-1}^1 (f(\eta) - f_0 \ln |\eta|) d\eta
 \end{aligned}$$

$$= -2f_0 + \int_{-1}^1 [f(\xi) - f_0 \ln|\xi|] d\xi \quad (3.48)$$

เมื่อ $f(\xi) = \frac{-\phi_2(\xi) \ln(r(\xi)) J(\xi)}{2\pi}$ และ $f_0 = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\frac{f(\eta)}{\ln(\eta)} \right]$ เป็นค่าคงที่ นั่นคือ

$$f_0 = \frac{-0.5\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}}{2\pi}$$

พจน์ที่สองทางด้านขวาของสมการ (3.48) สามารถหาค่าได้โดยการอินทิเกรตแบบเกาส์ได้

กรณีที่ 3 ถ้าจุด i อยู่ตำแหน่งเดียวกับตำแหน่งที่ 3 จากภาพที่ 3.6(3)

กำหนดให้

$$\eta = 0.5(1 - \xi)$$

$$\xi = 1 - 2\eta$$

แทน η ในสมการ (3.12) และ (3.13) จะได้

$$x = \eta(2\eta - 1)x_1 + 4\eta(1 - \eta)x_2 + (1 - \eta)(1 - 2\eta)x_3$$

$$y = \eta(2\eta - 1)y_1 + 4\eta(1 - \eta)y_2 + (1 - \eta)(1 - 2\eta)y_3$$

$$r = \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2}$$

$$= \eta \sqrt{(-3x_1 + 4x_2 - x_3)^2 + (-3y_1 + 4y_2 - y_3)^2}$$

$$+ \eta^2 \times (\text{ฟังก์ชันพหุนามของ } \eta)$$

$$J = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(0.5x_1 - 2x_2 + 1.5x_3)^2 + (0.5y_1 - 2y_2 + 1.5y_3)^2}$$

$$+ \eta \times (\text{ฟังก์ชันพหุนามของ } \eta)$$

ดังนั้น

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \int_0^1 f(\eta) 2d\eta$$

$$= \int_0^1 2f_0 \ln \eta d\eta + \int_0^1 (f(\eta) - f_0 \ln \eta) 2d\eta$$

$$= -2f_0 + \int_{-1}^1 \left[f(\xi) - f_0 \ln \left(\frac{1 - \xi}{2} \right) \right] d\xi \quad (3.49)$$

เมื่อ $f(\xi) = \frac{-\phi_3(\xi) \ln(r(\xi)) J(\xi)}{2\pi}$ และ $f_0 = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\frac{f(\eta)}{\ln(\eta)} \right]$ เป็นค่าคงที่

นั่นคือ

$$f_0 = \frac{-\sqrt{(0.5x_1 - 2x_2 + 1.5x_3)^2 + (0.5y_1 - 2y_2 + 1.5y_3)^2}}{2\pi}$$

พจน์ที่สองทางด้านขวาของสมการ(3.49) สามารถหาค่าได้โดยการอินทิเกรตแบบเกาส์ได้

