

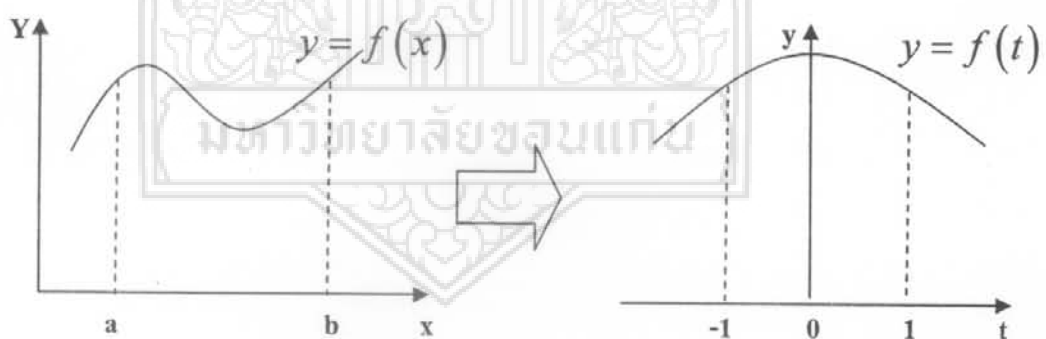
บทที่ 2

คณิตศาสตร์พื้นฐานของระเบียบวิธีสมาชิกตามขอบ

ในบทที่ 2 ของวิทยานิพนธ์จะทำการให้ความรู้ในเรื่องคณิตศาสตร์พื้นฐานที่จำเป็นต้องใช้ในระเบียบวิธีสมาชิกตามขอบ และพิจารณาแบ่งเป็น 10 หัวข้อ ดังนี้ ในเรื่องที่หนึ่งแสดงคุณสมบัติของการอินทิเกรตแบบเกาส์ ในเรื่องที่สองที่มาของเวกเตอร์เส้นสัมผัสและเวกเตอร์ตั้งฉาก ในเรื่องที่สามแนะนำให้อ่านปัญหาหาค่า ในเรื่องที่สี่และห้าให้เห็นภาพรวมของทฤษฎีบทที่ใช้ในระเบียบสมาชิกตามขอบได้แก่ทฤษฎีบทโคเวอร์เจนซ์ และทฤษฎีบทของกรีนรูปแบบที่สอง ในเรื่องที่หกจะกล่าวถึงสมการลาปลาซในระบบพิกัดเชิงขั้ว ในเรื่องที่เจ็ดให้คุณสมบัติของฟังก์ชันโคเรเคลตา ในเรื่องที่แปดทำความเข้าใจเกี่ยวกับหลักการพื้นฐานของสมการลาปลาซ และใน 2 เรื่องสุดท้ายทำการอธิบายเกี่ยวกับสมการอินทิกรัลพื้นฐานของจุดภายในและจุดขอบโดยมีรายละเอียดดังนี้

1. การอินทิเกรตแบบเกาส์ (Gaussian integration)

การประมาณค่าการอินทิเกรต $\int_a^b f(x) dx$ สามารถทำได้โดยทำการเปลี่ยนตัวแปรสำหรับการอินทิเกรต โดยใช้วิธีการแปลงเชิงเส้น ดังภาพที่ 2.1



ภาพที่ 2.1 การเปลี่ยนค่าโดเมน จาก $a \leq x \leq b$ เป็น $-1 \leq t \leq 1$

สมมติให้

$$x = At + B \text{ และ } x(-1) = a, x(1) = b \quad (2.1)$$

จะได้ $x(-1) = A(-1) + B$

$$a = -A + B \quad (2.2)$$

$$x(1) = A(1) + B$$

$$b = A + B \quad (2.3)$$

ดังนั้นสมการ (2.3) ลบกับสมการ (2.2) หาคด้วย 2 จะได้ว่า

$$A = \frac{b-a}{2} \quad (2.4)$$

ดังนั้นสมการ (2.3) บวกกับสมการ (2.2) หาคด้วย 2 จะได้ว่า

$$B = \frac{a+b}{2} \quad (2.5)$$

แทนค่าในสมการ (2.4) และสมการ (2.5) ลงในสมการ (2.1) จะได้ว่า

$$x(t) = \frac{(b-a)}{2}t + \frac{(a+b)}{2} \quad (2.6)$$

พิจารณา

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{(b-a)}{2}t + \frac{(a+b)}{2} \right\}$$

$$= \frac{(b-a)}{2}$$

$$dx = \frac{(b-a)}{2} dt$$

ดังนั้น

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t}{2} + \frac{(a+b)}{2}\right) \frac{(b-a)}{2} dt$$

$$= \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)t}{2}\right) dt \quad (2.7)$$

รูปแบบมาตรฐานการประมาณค่าการอินทิเกรตแบบเกาส์ (Gaussian integration) คือ

$$\int_{-1}^1 f(t)dt \approx \sum_{i=1}^n w_i f(t_i) \quad (2.8)$$

เมื่อ n คือ จำนวนจุดของการอินทิเกรตแบบเกาส์ (Gaussian points)

t_i คือ ค่าที่เป็นศูนย์ของพหุนามเลอจองด์ (Legendre polynomial)

w_i คือ ค่าถ่วงน้ำหนักของการอินทิเกรตแบบเกาส์ (Gaussian weights)

โดยที่พหุนามเลอจองด์อยู่ในรูป $P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (t^n - 1)^n}{dt^n}$ และค่าน้ำหนักเกาส์อยู่ในรูป

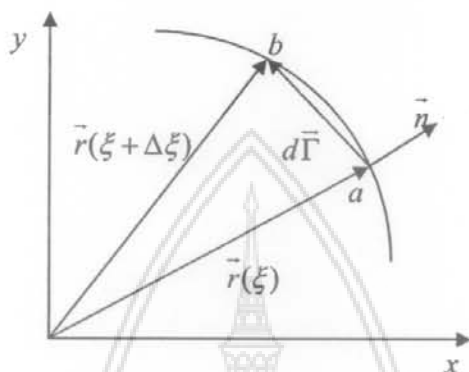
$w_i = \frac{2(1-t_i^2)}{n^2 [P_{n-1}(t_i)]^2}$ และได้ยืนยันค่าจำนวนจุด n (Gaussian n-point) ซึ่งใช้ในการประมาณค่าการ

อินทิเกรตของพหุนามที่มีดีกรีไม่เกิน $2n-1$ ในสมการ (2.8) สำหรับการเขียนโปรแกรมโดยใช้ค่าที่เป็นศูนย์ของพหุนามเลอจองด์ (t_i) และน้ำหนักเกาส์ (w_i) ที่ทราบค่าและมีค่าดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 2.1 จำนวนจุด (n) น้ำหนักเกาส์ (w_i) และค่าจุด (t_i)

จำนวนจุด n	ค่าจุด (t_i)	น้ำหนักเกาส์ (w_i)
1	0.000 000 000 000	2.000 000 000 000
2	$\pm 0.577 350 269 189$	1.000 000 000 000
3	$\pm 0.774 596 669 241$	0.555 555 555 555
	0.000 000 000 000	0.888 888 888 888
4	$\pm 0.861 136 311 594$	0.347 854 845 137
	$\pm 0.339 981 043 584$	0.652 145 154 862
5	$\pm 0.906 179 845 938$	0.236 926 885 056
	$\pm 0.538 469 310 105$	0.478 628 670 499
	0.000 000 000 000	0.568 888 888 888
6	$\pm 0.932 469 514 203$	0.171 324 492 379
	$\pm 0.661 209 386 466$	0.360 761 573 048
	$\pm 0.238 619 186 083$	0.467 913 934 572
7	$\pm 0.949 107 912 342$	0.129 484 966 168
	$\pm 0.74 531 185 599$	0.279 705 391 489
	$\pm 0.405 845 151 377$	0.381 830 050 511
	0.000 000 000 000	0.417 959 183 673
8	$\pm 0.960 289 856 497$	0.101 228 536 290
	$\pm 0.796 666 477 413$	0.222 381 034 453
	$\pm 0.525 532 409 916$	0.313 707 645 877
	$\pm 0.183 434 642 495$	0.362 683 783 378
9	$\pm 0.961 160 239 507$	0.081 274 388 361
	$\pm 0.836 031 107 326$	0.180 648 160 694
	$\pm 0.613 371 432 700$	0.260 610 696 402
	$\pm 0.324 253 423 403$	0.312 347 077 040
	0.000 000 000 000	0.330 239 355 001
10	$\pm 0.973 906 528 517$	0.066 671 344 308
	$\pm 0.865 063 366 688$	0.149 451 349 150
	$\pm 0.679 409 568 299$	0.219 086 362 515
	$\pm 0.433 395 394 129$	0.269 266 719 309
	$\pm 0.148 874 338 981$	0.295 524 224 714

2. เวกเตอร์เส้นสัมผัสและเวกเตอร์ตั้งฉาก



ภาพที่ 2.2 เวกเตอร์เส้นสัมผัสและเวกเตอร์ตั้งฉาก

จากภาพที่ 2.2 จะเห็นว่า $d\vec{\Gamma}$ เป็นเวกเตอร์เส้นสัมผัส นั่นคือ

$$\begin{aligned} d\vec{\Gamma} &= \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \vec{r}(\xi + \Delta\xi) - \vec{r}(\xi) = \left(\frac{d\vec{r}}{d\xi} \right) d\xi \\ &= \left(\frac{dx}{d\xi} \hat{i} + \frac{dy}{d\xi} \hat{j} \right) d\xi \end{aligned} \quad (2.9)$$

เวกเตอร์หน่วยเส้นสัมผัส $\hat{\Gamma}$ ได้จากการหาร $d\vec{\Gamma}$ ด้วยขนาดของเวกเตอร์ $d\Gamma$

$$\hat{\Gamma} = \frac{d\vec{\Gamma}}{d\Gamma} = \frac{dx}{d\Gamma} \hat{i} + \frac{dy}{d\Gamma} \hat{j} \quad (2.10)$$

เมื่อ

$$d\Gamma = \sqrt{\left(\frac{dx(\xi)}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dy(\xi)}{d\xi} \right)^2} d\xi$$

ผลคูณไขว้ของเวกเตอร์หน่วยเส้นสัมผัส $\hat{\Gamma}$ กับเวกเตอร์หน่วยแนว z หรือ $\hat{k}$ คือ เวกเตอร์หน่วยที่ตั้งฉากกับทั้ง $\hat{\Gamma}$ และ $\hat{k}$ เวกเตอร์ที่ได้จึงอยู่ในระนาบ xy มีทิศทางตั้งฉากกับเวกเตอร์หน่วยเส้นสัมผัสและพุ่งออกจากโดเมน จึงเป็นเวกเตอร์หน่วยเส้นแนวฉาก (unit normal vector) $\hat{n}$

$$\hat{n} = \hat{\Gamma} \times \hat{k} = \left(\frac{dx}{d\Gamma} \hat{i} + \frac{dy}{d\Gamma} \hat{j} \right) \times \hat{k} = \frac{dy}{d\Gamma} \hat{i} - \frac{dx}{d\Gamma} \hat{j} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j} \quad (2.11)$$

เมื่อ

$$n_x = \frac{dy/d\xi}{\sqrt{\left(\frac{dx(\xi)}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dy(\xi)}{d\xi} \right)^2}} \quad (2.12)$$

$$n_y = \frac{-dx/d\xi}{\sqrt{\left(\frac{dx(\xi)}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dy(\xi)}{d\xi} \right)^2}} \quad (2.13)$$

3. ปัญหาศักย์ (Potential problem)

สมมติให้ ϕ เป็นฟังก์ชันเชิงสเกลาร์ ซึ่งนิยามบนโดเมน Ω เป็นบริเวณที่มีขอบเขตบนโค้งปิด Γ และถูกเรียกว่า ฟังก์ชันฮาร์มอนิก (Harmonic function) ถ้า ϕ เป็นคำตอบของสมการลาปลาซ (Laplace equation) $\nabla^2 u = 0$ บนโดเมน Ω
สมมติให้ u เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิก

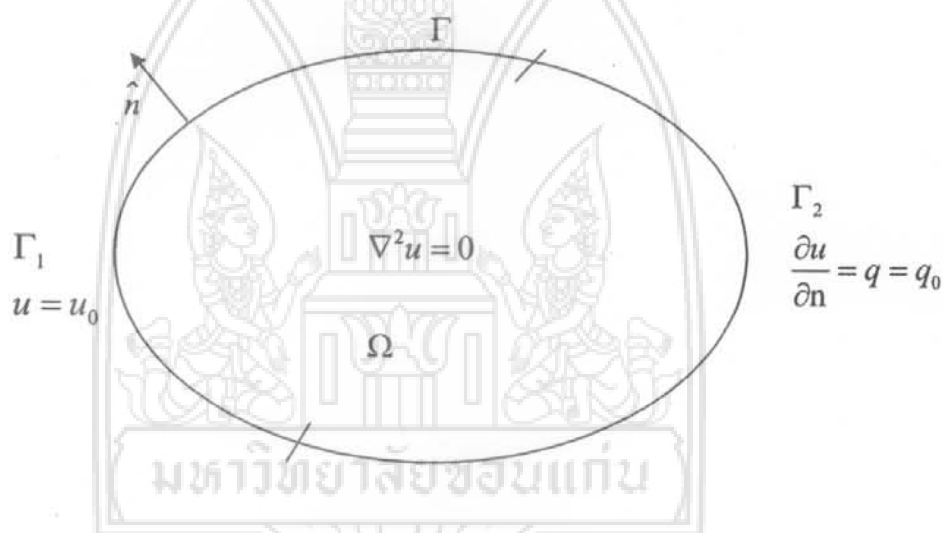
$$\nabla^2 u = 0 \quad (2.14)$$

เมื่อ $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ คือตัวดำเนินการลาปลาซใน 2 มิติ

โดยมีเงื่อนไขดิริคเลต (Dirichlet condition) คือ $u = u_0$ บน Γ_1

และมีเงื่อนไขนอยมันน์ (Neumann condition) คือ $\frac{\partial u}{\partial n} = q = q_0$ บน Γ_2

เมื่อ $\hat{n}$ คือเวกเตอร์ปรกติขนาดหนึ่งหน่วยบนขอบ $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ ดังภาพที่ 2.3



ภาพที่ 2.3 สมการลาปลาซบนโดเมน Ω ที่มีขอบ Γ

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่มีเงื่อนไขขอบถูกเรียกว่าปัญหาศักย์ (Potential problem) และโดยทั่วไปในเรื่องสมาชิกตามขอบ ฟลักซ์เทอม (Flux term) คือ $\frac{\partial u}{\partial n} \equiv q$ ปัญหาที่เกิดจากสมการลาปลาซมักพบในด้านวิทยาศาสตร์ประยุกต์ และด้านวิศวกรรมศาสตร์ ในเรื่องเกี่ยวกับของไหล การเคลื่อนที่ผิวน้ำ แหล่งกำเนิดศักย์แม่เหล็กไฟฟ้า วิเคราะห์แรงดึงและแรงบีบของของแข็งที่ยืดหยุ่น และอื่น ๆ

4. ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ (The Divergence theorem)

สมมติให้ Ω เป็นโดเมนปิด ที่มี Γ เป็นขอบ ดังภาพที่ 2.3 และให้ F เป็นฟังก์ชันเชิงเวกเตอร์ที่ต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้ทุกจุดบน Ω แล้วจะได้ว่า

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} dA = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot \hat{n} ds \quad (2.15)$$

เมื่อ $\hat{n}$ คือเวกเตอร์ปรกติขนาดหนึ่งหน่วยบนขอบ

และเรียกสมการ (2.15) ว่าคือ ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์

5. ทฤษฎีบทของกรีนรูปแบบที่สอง (The second form of Green's Theorem)

ให้ u และ v เป็นฟังก์ชันเชิงสเกลาร์ นิยามบนโดเมน Ω ซึ่งเป็นบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยโค้งปิด Γ และสมมติให้ u และ v ฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้ และจากคุณสมบัติของเกรเดียนต์

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (u \nabla v) &= u \nabla(\nabla v) + \nabla v(\nabla u) \\ &= u \nabla^2 v + \nabla v \nabla u \end{aligned} \quad (2.16)$$

และ

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (v \nabla u) &= v \nabla(\nabla u) + \nabla u(\nabla v) \\ &= v \nabla^2 u + \nabla u \nabla v \end{aligned} \quad (2.17)$$

พิจารณา

$$\nabla(u \nabla v - v \nabla u) = \nabla(u \nabla v) - \nabla(v \nabla u) \quad (2.18)$$

แทนค่าในสมการ (2.16) และสมการ (2.17) ลงในสมการ (2.18) จะได้ว่า

$$\nabla(u \nabla v - v \nabla u) = u \nabla^2 v - v \nabla^2 u \quad (2.19)$$

อินทิเกรตสมการ (2.19) บน โดเมน Ω

$$\int_{\Omega} \nabla(u \nabla v - v \nabla u) dA = \int_{\Omega} (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dA \quad (2.20)$$

ใช้ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ ทางด้านซ้ายของสมการ (2.20) จะได้

$$\int_{\Omega} \nabla(u \nabla v - v \nabla u) dA = \oint_{\Gamma} (u \nabla v - v \nabla u) \cdot \hat{n} ds \quad (2.21)$$

ใช้คุณสมบัติของเกรเดียนต์ทางด้านขวาของสมการ (2.21) จะได้

$$\oint_{\Gamma} (u \nabla v - v \nabla u) \cdot \hat{n} ds = \oint_{\Gamma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \quad (2.22)$$

ดังนั้นจากสมการ (2.21) และสมการ (2.22) จะได้

$$\int_{\Omega} \nabla(u \nabla v - v \nabla u) dA = \oint_{\Gamma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \quad (2.23)$$

นั่นคือจากสมการ (2.20) และสมการ (2.23) จะได้ว่า

$$\int_{\Omega} (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dA = \oint_{\Gamma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \quad (2.24)$$

และสมการ (2.24) ว่าเป็น ทฤษฎีบทของกรีนรูปแบบที่สอง

6. ตัวดำเนินการลาปลาซในระบบพิกัดเชิงขั้ว

กำหนดให้

$$u = u(x, y), \quad \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \quad \text{และ} \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

สมมติให้

$$x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$$

พิจารณาสมการลาปลาซ

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.25)$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} (\cos \phi) + \frac{\partial u}{\partial y} (\sin \phi) \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \phi} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} (-r \sin \phi) + \frac{\partial u}{\partial y} (r \cos \phi) \end{aligned} \quad (2.27)$$

ดังนั้นจากสมการ (2.26) และสมการ (2.27) ตามกฎของคราเมอร์จะได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos \phi \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \quad (2.28)$$

และ

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{r} \cos \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} + \sin \phi \frac{\partial u}{\partial r} \quad (2.29)$$

พิจารณาส่วนประกอบของสมการลาปลาซ สมการ (2.25) และแทนค่าสมการ (2.28) และสมการ (2.29) นั่นคือ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\
&= \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\
&= \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} \left(\cos \phi \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) - \frac{1}{r} \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos \phi \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \\
&= \cos^2 \phi \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \cos \phi \sin \phi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \phi} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \left(\frac{-1}{r^2} \right) \right) \\
&\quad - \frac{1}{r} \sin \phi \left(\cos \phi \frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial r} + \frac{\partial u}{\partial r} (-\sin \phi) \right) + \frac{1}{r^2} \sin \phi \left(\sin \phi \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial u}{\partial \phi} (\cos \phi) \right) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \cos^2 \phi \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \cos \phi \sin \phi \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \phi} + \frac{1}{r^2} \cos \phi \sin \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \sin \phi \cos \phi \frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial r} \\
&\quad + \frac{1}{r} \sin^2 \phi \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \sin^2 \phi \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2} \sin \phi \cos \phi \frac{\partial u}{\partial \phi}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
&= \frac{1}{r^2} \cos^2 \phi \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} - \frac{1}{r^2} \cos \phi \sin \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \cos \phi \sin \phi \frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial r} + \frac{1}{r} \cos^2 \phi \frac{\partial u}{\partial r} \\
&\quad + \frac{1}{r} \sin \phi \cos \phi \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \phi} - \frac{1}{r^2} \sin \phi \cos \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} + \sin^2 \phi \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

ดังนั้นจากสมการ (2.30) และสมการ (2.31) แทนค่าในสมการ (2.25) จะได้

$$\begin{aligned}
\nabla^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

นั่นคือถ้า u ขึ้นกับ r เพียงอย่างเดียวจะได้ว่า

$$\nabla^2 u(r) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \tag{2.33}$$

7. ฟังก์ชันไคแรกเดลตา (The Dirac Delta function)

ในการประยุกต์ใช้ทางวิศวกรรม หลักการของแหล่งกำเนิดของจุดที่ต้องการถูกกำหนดโดยฟังก์ชันไคแรกเดลตา ซึ่งเป็นตัวกำหนดที่เหมาะสมในการแปลงใช้กับหลักการทางคณิตศาสตร์โดยนิยามฟังก์ชันไคแรกเดลตาดังนี้

1. $\delta(x) = 0$ สำหรับ $x \neq 0$
2. $\delta(x)$ มีภาวะเอกฐานสำหรับ $x = 0$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$

และคุณสมบัติที่ใช้เสมอคือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

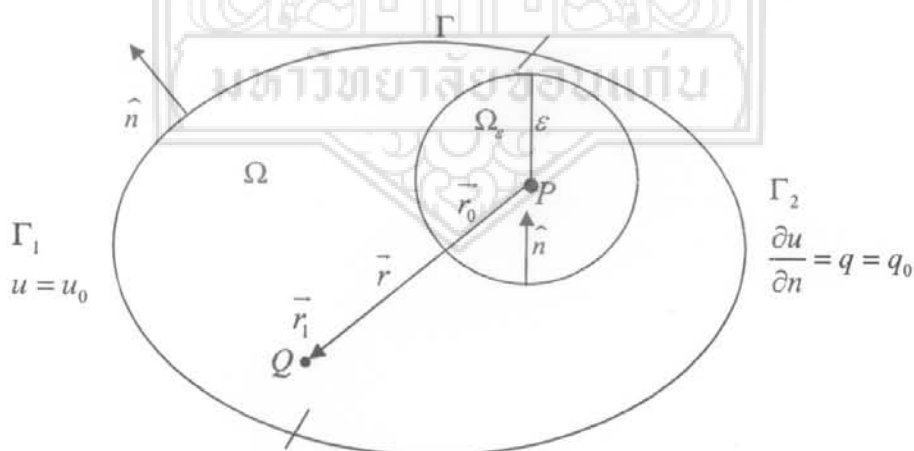
สำหรับทุกค่าฟังก์ชันต่อเนื่อง f

8. ผลเฉลยมูลฐานของสมการลาปลาซ (Fundamental Solution of the Laplace's Equation)

สมมติให้ $\vec{r}$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งและให้จุด Q สัมพันธ์กับจุด P ภายในบริเวณ Ω กำหนดแผ่น Ω_ϵ มีจุดศูนย์กลางที่ P รัศมี ϵ ดังภาพที่ 2.4 ซึ่งจุด P ถูกเรียกจุดแหล่งกำเนิด (source point) และจุด Q ถูกเรียกว่าจุดสนาม (field point)

สมมติให้ $\vec{r}_0$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด P และ

$\vec{r}_1$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด Q



ภาพที่ 2.4 ย่านใกล้เคียงของจุด P ภายในโดเมน Ω

ให้ $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$ โดยที่ $r = |\vec{r}|$

สมมติให้ $u^*(r)$ เป็นผลเฉลยมูลฐานของสมการลาปลาซ ซึ่งกำหนดโดย

$$\nabla^2 u^*(r) + \delta(r) = 0 \quad (2.34)$$

เมื่อ $\delta(r)$ คือฟังก์ชันไครเรลเดลตา

จะพบว่า

$$\nabla^2 u^*(r) = 0 \quad (2.35)$$

สำหรับทุก ๆ จุดยกเว้น $\vec{r}_1 = \vec{r}_0$ เมื่อ $\vec{r} = 0$

พิจารณาหาผลเฉลยมูลฐาน

ขั้นที่ 1 หาผลเฉลยมูลฐานของสมการเอกพันธ์ในระบบพิกัดทรงกระบอกจะได้

$$\nabla^2 u^*(r) = \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \phi^2} \quad (2.36)$$

และเนื่องจากผลเฉลยขึ้นกับตัวแปร r เพียงอย่างเดียว

นั่นคือ

$$\frac{d^2 u^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du^*}{dr} = 0 \quad (2.37)$$

พิจารณาหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญดังนี้

$$\text{ให้ } \frac{du^*}{dr} = P$$

$$\text{จะได้ } \frac{dP}{dr} + \frac{1}{r} P = 0$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{1}{r} P$$

$$\frac{1}{P} dP = -\frac{1}{r} dr$$

$$\int \frac{1}{P} dP = -\frac{1}{r} dr$$

$$\ln|P| = -\ln|r| + C$$

$$P = \frac{C_1}{r}$$

$$\text{เมื่อ } C = \ln|C_1|$$

ดังนั้น

$$\frac{du^*(r)}{dr} = \frac{C}{r}$$

$$du^*(r) = \frac{C}{r} dr$$

$$\int du^*(r) = C \int \frac{1}{r} dr$$

$$u^*(r) = C \ln|r| + D$$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ คือ

$$u^*(r) = C \ln(r) + D \quad (2.38)$$

เมื่อ C และ D เป็นค่าคงที่ และโดยปรกติกำหนดให้ ค่า $D=0$

ให้ Ω_ε เป็นแผ่นที่มีขอบคือโค้งปิด Γ_ε ที่มีจุดศูนย์กลางที่ P รัศมี ε ดังภาพที่ 2.3

ทำการอินทิเกรตสมการ (2.34) บน Ω_ε นั่นคือ

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla^2 u^*(r) dA = - \int_{\Omega_\varepsilon} \delta(r) dA \quad (2.39)$$

จากคุณสมบัติของฟังก์ชันไดเรคเดลตาที่ว่า $\int_{\Omega_\varepsilon} \delta(r) dA = 1$

นั่นคือ

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla^2 u^*(r) dA = -1 \quad (2.40)$$

พิจารณาทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ทางด้านซ้ายของสมการ (2.39) จะได้ว่า

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla^2 u^*(r) dA = \oint_{\Gamma_\varepsilon} \nabla u^* \cdot n ds = \oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u^*}{\partial n} ds \quad (2.41)$$

หาอนุพันธ์สมการ (2.38) เทียบกับตัวแปร n จะได้ว่า

$$\frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{C}{r} \quad (2.42)$$

แทนค่าสมการ (2.42) ลงในสมการ (2.41) จะได้ว่า

$$\oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u^*}{\partial n} ds = \int_0^{2\pi} \frac{C}{r} r d\theta = 2\pi C \quad (2.43)$$

แทนค่าสมการ (2.43) ลงในสมการ (2.42) แล้วแทนค่าในสมการ (2.40) จะได้ว่า

$$C = \frac{-1}{2\pi} \quad (2.44)$$

ดังนั้นจากสมการ (2.38) และสมการ (2.44) จะได้ว่า

$$u^*(r) = \frac{-1}{2\pi} \ln r \quad (2.45)$$

ซึ่งเป็นผลเฉลยมูลฐานของสมการลาปลาซ ใน 2 มิติ

และในทำนองเดียวกันผลเฉลยลาปลาซ ใน 3 มิติ คือ

$$u^*(r) = \frac{1}{4\pi r} \quad (2.46)$$

9. สมการอินทิกรัลพื้นฐานสำหรับจุดภายใน (Basic Integral Equation for Internal Points)

พิจารณาภาพที่ 2.4 และประยุกต์ทฤษฎีบทของกรีนรูปแบบที่สอง บนสมการ (2.24) เมื่อ $v = u^*$ บนบริเวณ $\Omega - \Omega_\varepsilon$ จะได้ว่า

$$\int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} (u \nabla^2 u^* - u^* \nabla^2 u) dA = \oint_{\Gamma + \Gamma_\varepsilon} \left(u \frac{\partial u^*}{\partial n} - u^* \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \quad (2.47)$$

และจากสมการ (2.14) และสมการ (2.35) โดยที่ u, u^* เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิก บน $\Omega - \Omega_\varepsilon$ เนื่องจากการอินทิเกรตทางด้านซ้ายของสมการ (2.47) มีค่าเป็นศูนย์และยิ่งไปกว่านั้น

$$\oint_{\Gamma} \left(u \frac{\partial u^*}{\partial n} - u^* \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = - \oint_{\Gamma_\varepsilon} \left(u \frac{\partial u^*}{\partial n} - u^* \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \quad (2.48)$$

แทนค่าผลเฉลยมูลฐานลงในสมการ (2.47) และใช้ $\frac{\partial u}{\partial n} = q$ แล้วกำหนดค่า ε เข้าสู่ 0 นั่นคือ

$$\frac{-1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \left(u \frac{\partial(\ln r)}{\partial n} - q \ln r \right) ds = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{-1}{2\pi} \ln r \right) ds + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{-1}{2\pi} (\ln r) q ds \quad (2.49)$$

เมื่อค่า ε เข้าสู่ 0 และ u คือฟังก์ชันต่อเนื่องที่หาอนุพันธ์ได้จะได้ว่า

$$u \text{ เข้าสู่ } u_p \text{ และ } q \text{ เข้าสู่ } q_p \text{ ดังนั้น}$$

$$\frac{-1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \left(u \frac{\partial(\ln r)}{\partial n} - q \ln r \right) ds = -u_p \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{2\pi\varepsilon} ds + q_p \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{-1}{2\pi} (\ln \varepsilon) ds \quad (2.50)$$

ทำการอินทิเกรตทางด้านขวาของสมการและจัดรูปสมการจะได้ว่า

$$u_p = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \left(u \frac{\partial(\ln r)}{\partial n} - q \ln r \right) ds \quad (2.51)$$

$$u_p = \oint_{\Gamma} \left(\left(\frac{-\ln r}{2\pi} \right) q - u \frac{\partial \left(\frac{-\ln r}{2\pi} \right)}{\partial n} \right) ds \quad (2.52)$$

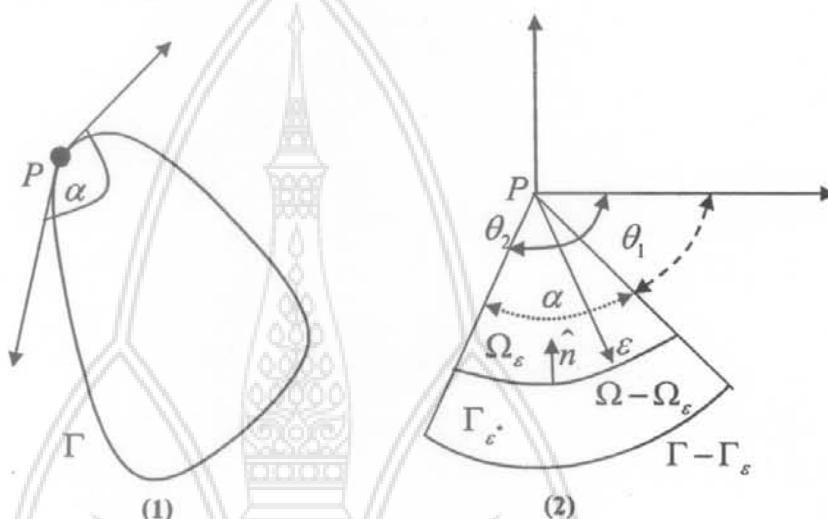
$$u_p = \oint_{\Gamma} (u^* q - u q^*) ds, \quad (2.53)$$

เมื่อ $u^* = \frac{-1}{2\pi} \ln r, \quad q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}$

นั่นคือจากสมการ (2.53) ทำให้ทราบสูตรพื้นฐานสำหรับการหาผลเฉลยภายในโดยใช้ข้อมูลค่า u และ q จากจุดที่ทราบค่าบนของโดเมนแต่ละจุดจะทราบค่า u และ q อย่างใดอย่างหนึ่ง และในหัวข้อ 10 จะแสดงให้เห็นทราบว่าจะพัฒนาสมการอินทิกรัลตามขอบอย่างไรเพื่อที่จะได้ทราบค่า u และ q ทุก ๆ จุดบนของและในสมการ (2.53) ได้แสดงให้เห็นทราบถึง u และ q ทุก ๆ จุดภายในโดเมนแล้ว

10. สมการอินทิกรัลพื้นฐานสำหรับจุดขอบ (Basic Integral Equation for Boundary Points)

สมมติให้ P เป็นจุดบนขอบซึ่งไม่เรียบ โดยมีปม (kink) ที่ทำมุมภายใน α ดังภาพที่ 2.5 ถ้าขอบเป็นผิวเรียบที่จุด P จะได้ว่า $\alpha = \pi$



ภาพที่ 2.5 แสดงมุมภายในของจุดบนขอบ

จากภาพที่ 2.5(2) ทำการประยุกต์โดย เมื่อให้ $v = u^*$ บนบริเวณ $\Omega - \Omega_\epsilon$ โดยที่ Γ_ϵ คือ ส่วนต่างของ Γ_ϵ และ Γ แล้ว

$$\int_{\Omega - \Omega_\epsilon} (u \nabla^2 u^* - u^* \nabla^2 u) dA = \oint_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} \left(u \frac{\partial u^*}{\partial n} - u^* \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds + \oint_{\Gamma_\epsilon} \left(u \frac{\partial u^*}{\partial n} - u^* \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \quad (2.49)$$

เนื่องจากในสิ่งที่ผ่านมาและจากค่าอินทิเกรตทางด้านซ้ายมีค่าเป็นศูนย์ จะได้ว่า

$$\oint_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} \left(u \frac{\partial u^*}{\partial n} - u^* \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = \oint_{\Gamma_\epsilon} \left(u \frac{\partial u^*}{\partial n} - u^* \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \quad (2.50)$$

แทนค่าลิมิตเมื่อ ϵ เข้าสู่ ศูนย์ จะได้

$$\oint_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} \left(u \frac{\partial u^*}{\partial n} - u^* \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma_\varepsilon} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{-1}{2\pi} \ln r \right) \right) ds + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma_\varepsilon} \left(\frac{-1}{2\pi} \ln r \right) \frac{\partial u}{\partial n} ds \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} \left(u \frac{\partial u^*}{\partial n} - u^* \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds &= -u_p \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2\pi\varepsilon} \varepsilon d\theta + q_p \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{-1}{2\pi} \ln \varepsilon \right) \varepsilon d\theta \\ &= -u_p \left(\frac{1}{2\pi} \right) (\theta_1 - \theta_2) - q_p \left(\frac{1}{2\pi} \right) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \ln \varepsilon) (\theta_2 - \theta_1) \\ &= \frac{-\alpha u_p}{2\pi} \end{aligned} \quad (2.52)$$

แล้วจัดรูปสมการ (2.52) และแทนค่า $u^* = \frac{-1}{2\pi} \ln r$ นั่นคือ

$$\alpha u_p = \oint_{\Gamma} \left(u \frac{\partial(\ln r)}{\partial n} - q \ln r \right) ds \quad (2.53)$$

$$Cu_p = \oint_{\Gamma} (u^* q - u q^*) ds \quad (2.54)$$

$$\text{เมื่อ } C = \frac{\alpha}{2\pi}, \quad q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}, \quad u^* = \frac{-1}{2\pi} \ln r$$

ทำให้ทราบสูตรพื้นฐานสำหรับระเบียบวิธีสมาริคาตามขอบและจะเห็นชัดว่า ถ้า P เป็นจุดภายในแล้ว $\alpha = 2\pi$ ทำให้ $C=1$ และถ้า P เป็นจุดบนขอบของโค้งเรียบแล้ว $\alpha = \pi$ ซึ่งให้

$$C = \frac{1}{2}$$

มหาวิทยาลัยขอนแก่น