

ภาคผนวก ง

ทฤษฎีคลื่นจากการวิเคราะห์

แบบจำลอง TUNAMI

# 1. หลักการและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องในการศึกษาโดยใช้แบบจำลองสึนามิ (Tsunami modeling)

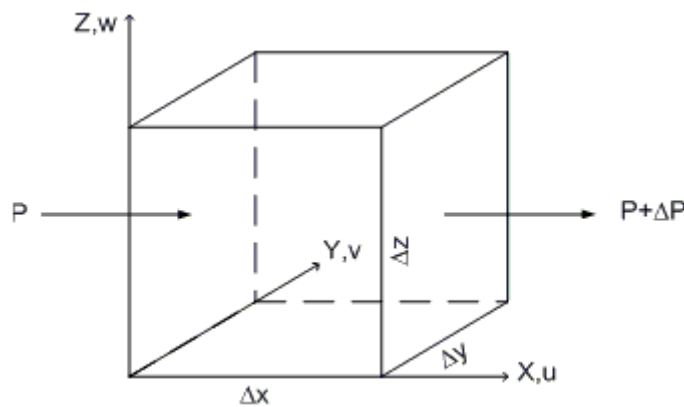
ในการวิเคราะห์การแพร่กระจายสึนามิซึ่งเป็นการวิเคราะห์ด้วยสมการคลื่นน้ำตื้นนั้น มีสมมติฐานสำหรับการวิเคราะห์ดังนี้ (Imamura และคณะ, 2006)

- 1) ไม่คำนึงผลของความเร่งในแนวตั้งของอนุภาคน้ำ เนื่องจากมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก และความเร่งในแนวตั้งก็มีค่าน้อยมากเช่นกัน
- 2) ความเร็วของคลื่นในทิศทาง  $x$  และ  $y$  ไม่ขึ้นกับความลึก โดยความเร็วในแนวระนาบเป็นค่าความเร็วเฉลี่ยสม่ำเสมอตลอดความลึก (Uniform velocity distribution)
- 3) พิจารณามวลน้ำไม่สามารถบีบอัดได้ (Incompressible) และไม่มี ความหนืดในระบบ (Non-viscous fluid)

## 1.1 สมการการเคลื่อนที่ (Motion equation)

พิจารณอนุภาคน้ำมีขนาดเล็กความกว้าง ( $\Delta x$ ) ความยาว ( $\Delta y$ ) ความสูง ( $\Delta z$ ) ดังรูปที่ 1 กำหนดรูปเวกเตอร์พิสัยฉากของสนามความเร็วที่แปรผันกับระยะทางและเวลาเท่ากับ  $\vec{V}$  ซึ่งเคลื่อนที่ใน 3 ทิศทาง

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \tag{1}$$



รูปที่ 4.1 มวลน้ำในระบบพิกัดฉาก

โดยที่  $u$  คือ ความเร็วของมวลน้ำในทิศทาง  $x$

$v$  คือ ความเร็วของมวลน้ำในทิศทาง  $y$

$w$  คือ ความเร็วของมวลน้ำในทิศทาง  $z$

จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน

$$F = ma = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \left( \frac{D\vec{V}}{Dt} \right) \tag{2}$$

โดยที่  $F$  คือ แรงภายนอกที่กระทำต่อมวลน้ำ

$m$  คือ น้ำหนักของมวลน้ำ

$a$  คือ ความเร่งของมวลน้ำ

$\rho$  คือ ความหนาแน่นของน้ำ

$\frac{D\vec{V}}{Dt}$  คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็วเทียบกับเวลา

พิจารณาการเคลื่อนที่ในทิศทาง  $x$

$$F_x = ma = \rho\Delta x\Delta y\Delta z \left( \frac{Du}{Dt} \right) \quad (3)$$

พิจารณาความเร็วของของไหล  $u$  ที่มีการเคลื่อนที่ในทิศทาง  $x$  ในเวลา  $t$  จะสามารถหาอนุพันธ์ (Derivative) ของความเร็วในเทอมของการเปลี่ยนแปลงระยะทางและเวลาได้ดังสมการ

$$\frac{Du}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t) - u(x, y, z, t)}{\Delta t} \quad (4)$$

สิ่งแรกที่จะพิจารณาคือการคำนวณอนุพันธ์ย่อย  $\frac{Df}{Dt}$  เมื่อ  $f(x, t)$  เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวลาและระยะทาง  $x$  สามารถเขียนขยายในเทอมได้ดังสมการ

$$\frac{Df}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} \quad (5)$$

จากพื้นฐานของแคลคูลัสจะได้

$$f(x + \Delta x, t + \Delta t) \approx f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t \quad (4)$$

ซึ่งสมการที่ (6) ได้มาจากการกระจายของเทย์เลอร์ (Taylor's expansion) แทนสมการที่ (6) ลงใน สมการที่ (5) จะได้

$$\frac{Df}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t - f(x, t)}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x} \left[ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right] + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (5)$$

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (6)$$

แทน  $f(x,t)$  ด้วย  $u(x, y, z, t)$

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (7)$$

$$\frac{Du}{Dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (8)$$

แทนค่าสมการที่ (10) ลงในสมการที่ (3) ได้

$$F_x = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (9)$$

แรงกระทำ  $F_x$  ที่ทำให้มวลน้ำเกิดการเคลื่อนตัว ในที่นี้จะพิจารณาเฉพาะแรงที่เกิดจากแรงดันน้ำในทิศทาง  $x$  โดยสมมติให้แรงเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก (Gravity) กระทำในทิศทาง  $z$  ดังนั้นในทิศทาง  $x$  จึงไม่พิจารณาผลของแรงเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ผลของแรงเนื่องจากการหมุนของโลก (Coriolis forces) สามารถที่จะเพิ่มเข้าภายหลังได้ ส่วนแรงเฉือนที่กระทำบนอนุภาคของของไหลนั้นมีค่าน้อยมาก ดังนั้นแรงที่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่ขึ้นนั้นเกิดจากผลต่างของแรงดัน  $\Delta p$  ระหว่างด้านหน้ากับด้านหลังของมวลน้ำในทิศทาง  $x$  กระทำบนพื้นที่เท่ากับ  $\Delta y \Delta z$  ซึ่งแรงสุทธิจึงเท่ากับ  $\Delta p \Delta y \Delta z$  และแรงดันยังขึ้นกับ  $x, y, z$  และ  $t$  อีกด้วย ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงแรงดันน้ำเทียบกับระยะทางในทิศทาง  $x$  จึงเขียนได้ดังนี้

$$\Delta p = \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \quad (10)$$

ดังนั้นค่าแรงสุทธิในทิศทาง  $x$  คือ

$$F_x = \Delta p \Delta y \Delta z = \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (11)$$

จะเห็นว่าสมการที่ (13) และสมการที่ (11) นั้นเท่ากันซึ่งจะได้

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (12)$$

ในทำนองเดียวกันพิจารณาการเคลื่อนที่ในทิศทาง  $y$  จะได้สมการในลักษณะเดียวกันกับการพิจารณาการเคลื่อนที่ในทิศทาง  $x$  ดังนั้นจึงได้

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (13)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (14)$$

สำหรับการเคลื่อนที่ในทิศทาง  $z$  พิจารณาแรงเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกหรือน้ำหนักของมวลน้ำ ( $w$ ) รวมด้วยซึ่งเป็นในแรงกระทำ  $F_z$  ในแนวตั้ง จะได้สมการการเคลื่อนที่ในทิศทาง  $z$  ดังนี้

$$weight = \rho(\Delta x \Delta y \Delta z) g \quad (15)$$

$$F_z = \frac{\partial p}{\partial z} \Delta z \Delta x \Delta y + \rho \Delta x \Delta y \Delta z g \quad (16)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g\right) = \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}\right) \quad (17)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \quad (18)$$

สมการที่ (15), (16) และ (20) เรียกว่า สมการออยเลอร์ (Euler's equation) ใช้สำหรับอธิบายการเคลื่อนที่ของของไหลที่บีบอัดไม่ได้ และความหนืดในระบบมีค่าน้อยมากๆ ซึ่งเป็นที่ทราบกันโดยทั่วไปว่าแรงหนืด (Viscous forces) ไม่ใช่ปัจจัยที่สำคัญสำหรับปัญหาคลื่นน้ำยาว (Long water wave problems) ยกเว้นในบริเวณที่คลื่นเข้าสู่แนวชายฝั่ง จากสมมติฐานของคลื่นน้ำตื้น (Shallow water wave) สำหรับการคำนวณการเคลื่อนที่ของ สีนามิสมมติความเร่งในแนวตั้งมีค่าน้อยมากดังนั้น ฝั่งขวาของสมการที่ (20) จึงเท่ากับศูนย์นั่นคือ

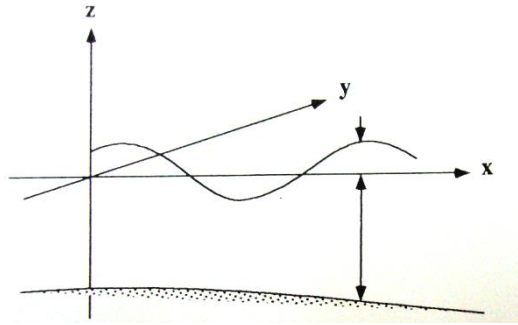
$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g\right) = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (20)$$

จะเห็นได้ว่าความดันนั้นแปรผันตรงกับความลึกถ้ามวลน้ำนั้นไม่มีการเคลื่อนที่ในแนวตั้ง และในการคำนวณการแพร่กระจายของสินามินั้นจะเริ่มจากตำแหน่ง  $x_0, y_0$  ไปสู่ตำแหน่ง  $x, y$  ใดๆ ซึ่งจะได้ความสูงของน้ำ (Amplitude) โดยแทนด้วย  $\eta(x, y, t)$  เพราะฉะนั้นความดัน ณ ความลึก  $z$  ใดๆ จึงเท่ากับ

$$p(x, y, z, t) = -\int \rho g dz + \text{Constant} = -\rho g[\eta(x, y, t) + z] \quad (21)$$

$$\partial p = -\rho g \partial \eta \quad (22)$$



รูปที่ 2 ตำแหน่งและทิศทางของตัวแปรในสมการคลื่นน้ำตื้น (Imamura, 1996)

ทำการแก้สมการการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งโดยแทนสมการที่ (24) ลงในสมการที่ (15) และ (16) จะได้

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} = -g \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad (23)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} = -g \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \quad (24)$$

จะเห็นได้ว่าสมการทั้งสองนั้นหาคำตอบได้ยาก เนื่องจากเป็นสมการคู่ควบ (Coupled equations) อีกทั้งยังมีตัวไม่ทราบค่าถึง 4 ตัวซึ่งแต่ละตัวนั้นยังอยู่ในเทอมของ  $x, y, z$  และ  $t$  แต่อย่างไรก็ตามสมการทั้งสองนั้นคือความเร็วเฉลี่ยตลอดความลึก นั้นหมายความว่าความเร็วในทิศทาง  $x$  และ  $y$  จึงไม่แปรผันตามความลึก ซึ่งเป็นสมมติฐานของคลื่นน้ำตื้น และเนื่องจากคลื่นมีคาบยาวการเปลี่ยนแปลงความเร็วในแนวดิ่งจึงเข้าใกล้ศูนย์เทอมที่ 3 ของสมการที่ (25) และ (26) จึงเป็นศูนย์ ดังนั้นจะเหลือตัวไม่ทราบค่าเพียง 3 ตัวคือ  $u, v, \eta$  ซึ่งสมการที่ (25) และ (26) สามารถลดรูปได้ดังนี้

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} + g \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = 0 \quad (25)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} + g \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = 0 \quad (26)$$

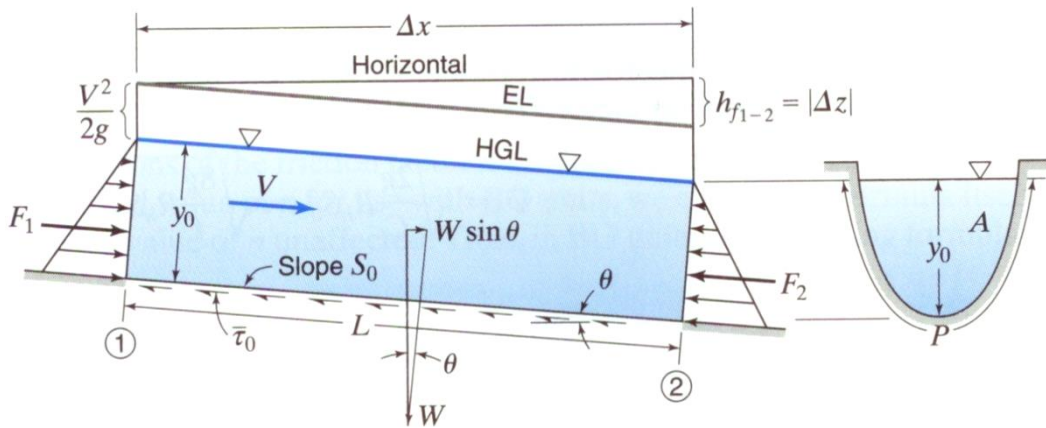
## 1.2 แรงเสียดทานท้องน้ำ (Bottom friction force)

สำหรับการพิจารณาผลของแรงเสียดทานพื้นท้องน้ำ ค่าแรงสุทธิในแต่ละแกนจะรวมแรงเสียดทานพื้นท้องน้ำดังนั้นเทอมขวาของสมการที่ (4.13) จะเป็น  $\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \tau_x \Delta x \Delta y$  สำหรับการไหลในแกน  $x$  ส่วนในแกน  $y$  กระทำเช่นเดียวกัน จะได้สมการการเคลื่อนที่ที่คิดผลของแรงเสียดทานพื้นท้องน้ำเป็น

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\tau_x}{\rho} = 0 \quad (27)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\tau_y}{\rho} = 0 \quad (28)$$

ในเทอมของแรงเสียดทานพื้นท้องน้ำ  $\frac{\tau_x}{\rho}$  และ  $\frac{\tau_y}{\rho}$  สำหรับการไหลในแกน  $x$  และแกน  $y$  แรงเสียดทานพื้นท้องน้ำสัมพันธ์กับค่าความขรุขระของแมนนิง (Manning's roughness) และสามารถอธิบายได้โดยการวิเคราะห์การไหลแบบคงที่ในทางน้ำเปิด (Steady open channel flow) ดังแสดงในรูปที่ 3



รูปที่ 3 การไหลแบบคงที่ในทางน้ำเปิด (Finnemore และ Franzini, 2002)

เมื่อพิจารณาการไหลในทางน้ำเปิดภายใต้ปริมาตรควบคุมที่มีความยาว  $\Delta x$  ที่หน้าตัดและความเร็วคงที่ ซึ่งมีเส้นพลังงาน (Energy line, EL) ความลาดชันของระดับผิวน้ำ (Water surface slope,  $S_w$ ) และความลาดชันของท้องน้ำ (Channel bed slope,  $S_0$ ) เท่ากัน นั่นคือ  $S_w = S_0 = \frac{-\Delta z}{\Delta x} = \tan \theta$  และ  $S = \frac{h_f}{L} = \sin \theta$  เมื่อ  $\theta$  คือมุมเอียงของท้องน้ำเมื่อเทียบกับแนวระดับ,  $h_f$  คือการสูญเสียพลังงานเนื่องจากความเสียดทาน ทั้งนี้ถ้าท้องน้ำมีความลาดเอียงน้อยๆ แล้ว  $\sin \theta \approx \tan \theta$  และ  $S_w = S_0 \approx S$  พิจารณาผลรวมแรงตามทางน้ำ ผลของแรงดันน้ำสถิต (Hydrostatic force)  $F_1$  และ  $F_2$  สมดุลซึ่งกันและกัน จะมีเฉพาะแรงในทิศทางการเคลื่อนที่นั่นคือองค์ประกอบแรงเนื่องจากแรงโน้มถ่วง กับแรงต้านโดยความเค้นเฉือนเฉลี่ยที่กระทำบนเส้นขอบเปียกของหน้าตัด จะได้

$$W \sin \theta = \bar{\tau}_0 PL \quad (29)$$

$$\gamma AL \sin \theta = \bar{\tau}_0 PL \quad (30)$$

โดยที่  $W$  คือมวลของน้ำ,  $\bar{\tau}_0$  คือความเค้นเฉือนเฉลี่ยเท่ากับ  $f\rho \frac{v^2}{2}$  ได้มาจากการวิเคราะห์มิติ (Dimension analysis) โดยสมมติให้  $\bar{\tau}_0$  เป็นฟังก์ชันของ  $\rho, \mu, v$  และ  $R_h$  และเลือก  $\rho, v$  และ  $R_h$  เป็นตัวแปรหลัก เมื่อ  $\rho$  คือความหนาแน่น

ของของไหล,  $\mu$  คือความหนืดของของไหล,  $v$  คือความเร็วของการไหล,  $R_h$  คือรัศมีชลศาสตร์ (Hydraulic radius) ซึ่งเท่ากับ  $\frac{A}{P}$ ,  $f$  คือค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทาน,  $P$  คือความยาวของเส้นขอบเปียก และ  $\gamma$  คือน้ำหนักจำเพาะของน้ำ และจัดรูปสมการที่ (32) ใหม่เป็น

$$\gamma A \frac{h_f}{L} = \bar{\tau}_0 P \quad (31)$$

$$h_f = \frac{\bar{\tau}_0 PL}{\gamma A} \quad (32)$$

แล้วแทนค่าความเค้นเฉือนเฉลี่ยลงในสมการที่ (34)

$$h_f = f \rho \frac{v^2}{2} \frac{PL}{\gamma A} \quad (33)$$

แต่  $\gamma = \rho g$  และ  $R_h = \frac{A}{P}$  ดังนั้นจากสมการที่ (35) จะได้

$$h_f = f \rho \frac{v^2}{2g} \frac{L}{R_h} \quad (34)$$

หรือ

$$v = \sqrt{\frac{2gR_h S}{f}} \quad (35)$$

สมการที่ใช้สำหรับคำนวณการไหลในทางน้ำเปิดสมการหนึ่งคือ สมการของแมนนิง (Manning's formula) สามารถนำมาใช้ในการคำนวณการไหลในคลื่นน้ำตื้นได้เช่นเดียวกัน สมการของแมนนิง เขียนอยู่ในรูป

$$v = \frac{1}{n} R_h^{2/3} S^{1/2} \quad (36)$$

โดยที่  $n$  คือสัมประสิทธิ์ความขรุขระของแมนนิง (Manning's roughness coefficient) จะเห็นได้ว่าสมการที่ (4.37) เท่ากับสมการที่ (38) และสามารถจัดรูปของสัมประสิทธิ์ความขรุขระของแมนนิงได้ดังนี้

$$f = \frac{2gn^2}{R_h^{1/3}} \quad (37)$$

สำหรับการไหลของคลื่นน้ำตื้น อัตราความกว้างต่อความลึกมีค่าสูงมาก สมมุติหน้าตัดการไหลเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความกว้างมาก รัศมีชลศาสตร์จะเท่ากับ  $\frac{D}{1 + 2D/b}$  นั่นคือถ้า  $\frac{b}{D} \rightarrow \infty$  จะทำให้  $R_h \approx D$  สมการที่ (4.39) จะเป็น

$$f = \frac{2gn^2}{D^{1/3}} \quad (38)$$

แทนสมการที่ (40) ลงในความเค้นเฉือนเฉลี่ย  $\tau = f\rho \frac{v^2}{2}$  จะได้

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{gn^2}{D^{1/3}} v^2 \quad (39)$$

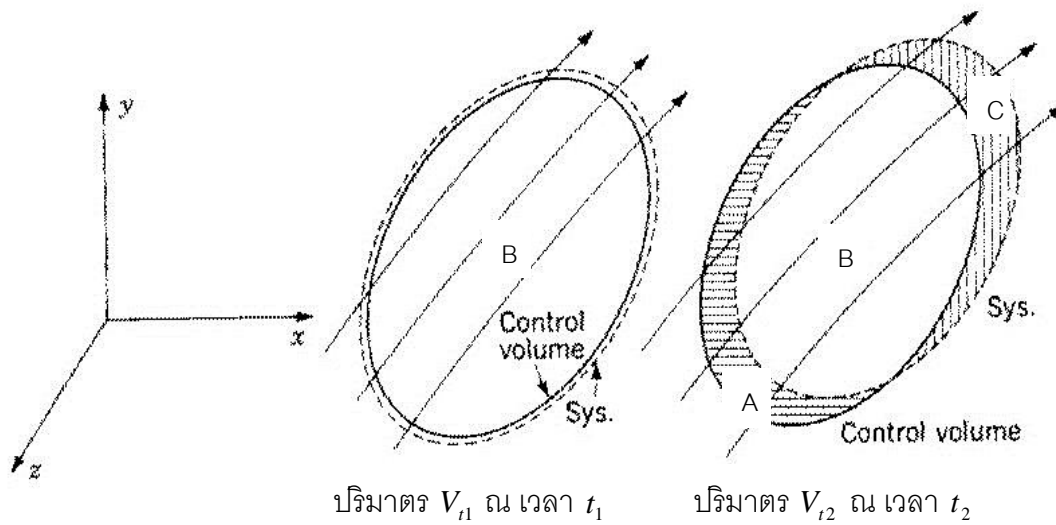
สมการที่ (41) เป็นการไหลในทิศทางเดียว สำหรับการไหลสองทิศทางจะได้

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_x}{\rho} &= \frac{gn^2}{D^{1/3}} u\sqrt{u^2 + v^2} \\ \frac{\tau_y}{\rho} &= \frac{gn^2}{D^{1/3}} v\sqrt{u^2 + v^2} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

### 1.3 สมการการอนุรักษ์มวล (Mass conservation equation)

สำหรับการเคลื่อนที่ของของไหล สามารถอธิบายได้โดยการพิจารณาการเคลื่อนที่ของของไหล ซึ่งผ่านตำแหน่งที่กำหนด ในสนามการไหลที่ไม่แปรเปลี่ยนไปกับของไหล ทั้งนี้เพราะเมื่อของไหลเคลื่อนที่ผ่านตำแหน่งที่ต่างกันจะมีคุณสมบัติแตกต่างไปจากเดิม จึงจำเป็นต้องมีการคำนึงถึงการเปลี่ยนรูปร่าง การเลื่อนไหลและการหมุน ประกอบกันไปด้วย ดังนั้นวิธีการอธิบายการเคลื่อนที่ของของไหลสามารถทำได้โดยการพิจารณาเฉพาะตำแหน่งที่กำหนดเท่านั้นซึ่งเรียกว่าวิธีของออยเลอร์ (Eulerian approach) หรือวิธีการของปริมาตรควบคุม (Control volume approach) ปริมาตรควบคุมคือขอบเขตปริมาตรจำกัดในสนามการไหลที่กำหนดขึ้นเพื่อพิจารณาคุณสมบัติการไหลเฉพาะในปริมาตรควบคุมเท่านั้น

พิจารณารูปที่ รูปที่ 4 แสดงปริมาตรของไหลในสนามการไหลเท่ากับ  $V_{t1}$  ที่เวลา  $t_1$  เมื่อเวลาผ่านไปเป็น  $t_2$  (เมื่อ  $t_2 = t_1 + \Delta t$ ) ของไหลจะเคลื่อนที่จากเดิมไปและมีปริมาตร  $V_{t2}$  สมมติให้ปริมาตรทั้งหมดแบ่งเป็น 3 ส่วน คือ A, B, และ C โดยที่ปริมาตร B จะเป็นส่วนคาบเกี่ยวอยู่กับทั้ง A และ C (B เป็นส่วนหนึ่งของทั้ง  $V_{t1}$  และ  $V_{t2}$ ) ในที่นี้สมมติว่าปริมาตรควบคุมคือ  $V_{t1}$  ซึ่งอยู่กับที่ในสนามการไหลโดยมีของไหลไหลเข้าและไหลออกจากปริมาตรควบคุมนี้ กล่าวคือช่วงเวลา  $\Delta t$  จะมีของไหลที่เวลา  $t_1$  ไหลออกไปเป็นปริมาตร c ในขณะเดียวกันก็มีของไหลปริมาตร A ไหลเข้ามาแทนที่ในปริมาตรควบคุม



รูปที่ 4 การไหลเข้าและออกจากปริมาตรควบคุม (Streeter และ Wylie, 1979)

ถ้าให้  $X$  เป็นปริมาณคุณสมบัติทั้งหมดของการไหลคือมวลสาร โมเมนตัมและพลังงานของการไหล และให้  $x$  เป็นปริมาณคุณสมบัติต่อหน่วยมวลสารของการไหล ดังนั้น

$$X = \int x \rho dV \quad (41)$$

ปริมาณ  $X$  ทั้งหมดในปริมาตร  $V_{t1}$  (ที่เวลา  $t_1$ ) ประกอบด้วยปริมาณ  $X_{At1}$  กับ  $X_{Bt1}$  โดยที่  $X_{At1}$  คือปริมาณคุณสมบัติของ  $X$  ที่อยู่ในปริมาตร A ที่เวลา  $t_1$  ในทำนองเดียวกัน ปริมาณ  $X$  ทั้งหมดในปริมาตร  $V_{t2}$  (ที่เวลา  $t_2$ ) ประกอบด้วยปริมาณ  $X_{Bt2}$  กับ  $X_{Ct2}$  ดังนั้นจึงสามารถเขียนสมการแสดงการเปลี่ยนแปลงปริมาณคุณสมบัติ  $X$  เมื่อของไหลเคลื่อนที่จากปริมาตร  $V_{t1}$  ไปสู่  $V_{t2}$  ภายในช่วงเวลา  $\Delta t$  ได้ดังนี้

$$\Delta X = X_{Bt2} - X_{Bt1} + X_{Ct2} - X_{At1} \quad (42)$$

จัดรูปสมการใหม่โดยการบวกและลบด้วยปริมาณ  $X_{At2}$  จะได้

$$\Delta X = (X_{Bt2} + X_{At2}) - (X_{Bt1} + X_{At1}) + X_{Ct2} - X_{At2} \quad (43)$$

อัตราการเปลี่ยนแปลง  $X$  ในระบบคือ

$$\left. \frac{\Delta X}{\Delta t} \right|_{\text{sys}} = \frac{X_{(A+B)t2} - X_{(A+B)t1}}{\Delta t} + \frac{X_{Ct2} - X_{At2}}{\Delta t} \quad (44)$$

เมื่อต้องการหาอัตราการเปลี่ยนแปลง  $X$  ณ ช่วงเวลาใดๆ ทำได้โดยให้  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{dX}{dt} \quad (45)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X_{(A+B)t2} - X_{(A+B)t1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X_{Ct2} - X_{At2}}{\Delta t} \quad (46)$$

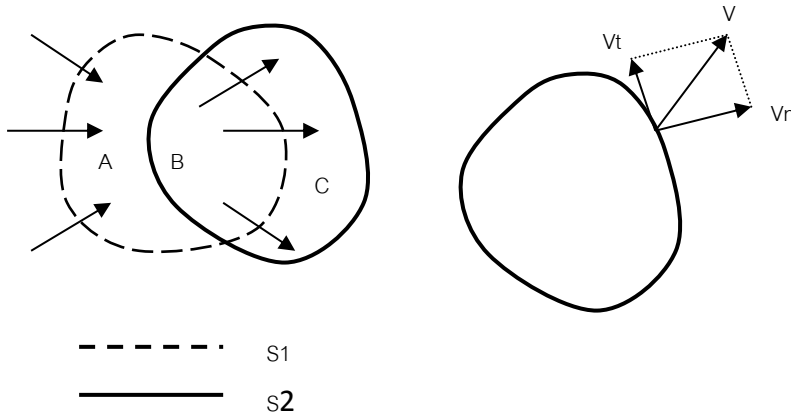
เทอมแรกของด้านขวามือในสมการที่ (48) คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ  $X$  ในปริมาตรควบคุม (A+B) หรือเป็นอัตราที่  $X$  คงเหลืออยู่ในปริมาตรควบคุมนั่นเอง ถ้าให้สัญลักษณ์ CV แทนปริมาตรควบคุม จะได้

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X_{(A+B)t2} - X_{(A+B)t1}}{\Delta t} = \left. \frac{\partial X}{\partial t} \right|_{CV} \quad (47)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} x \rho dV \quad (48)$$

ขั้นตอนต่อไป คือหาสมการของของเทอมที่สองของสมการที่ (4.48) จะเห็นว่า  $X_{Ct2}$  คือปริมาณของ  $X$  ที่เคลื่อนที่ออกจากปริมาตรควบคุมผ่านพื้นผิว  $S_2$  ภายในช่วงเวลา  $\Delta t$  และ  $X_{At2}$  คือปริมาณของ  $X$  ที่ไหลเข้าปริมาตรควบคุมผ่านพื้นผิว  $S_1$  ในช่วงเวลาเดียวกัน ดังแสดงในรูปที่ 5 (ก) เมื่อพิจารณาพื้นที่เล็กๆ  $dA$  บนพื้นผิวของปริมาตรควบคุม ดังแสดงในรูปที่ 5 (ข) ความเร็วในการไหลผ่านพื้นที่  $dA$  คือ  $v$  โดยมี  $v_n$  และ  $v_t$  เป็นความเร็วประกอบในแนวตั้งฉากและสัมผัสกับพื้นที่  $dA$  ตามลำดับ จะเห็นว่าความเร็วในแนวสัมผัสมิได้เป็นทิศทางที่จะทำให้ของไหลเคลื่อนย้ายออกจากพื้นที่  $dA$  มีเพียงความเร็วในแนวตั้งฉากเท่านั้นที่ส่งผลต่อการเคลื่อนย้ายของของไหลออกจาก  $dA$  เมื่อขยายภาพของ  $dA$  ดังแสดงในรูปที่ 6 โดยมีพื้นที่ส่วนที่แรเงาแสดงถึงปริมาตรควบคุมภายในช่วงเวลา  $\Delta t$  มีขนาดเท่ากับ  $dA(v_n \Delta t)$  และมีปริมาณมวลสารเป็น  $(\rho dA v_n \Delta t)$  ดังนั้นปริมาณย่อย  $dX$  คือ

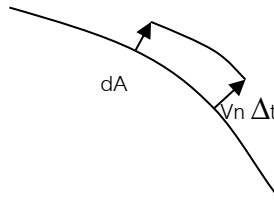
$$dX = x \rho dA v_n \Delta t \quad (49)$$



(ก)

(ข)

รูปที่ 5 พื้นผิวของปริมาตรควบคุม



รูปที่ 6 ภาพขยาย  $dA$

และอัตราการเปลี่ยนแปลง  $X$  ผ่านพื้นที่  $dA$  คือ

$$\frac{dX}{\Delta t} = x\rho v_n dA \quad (50)$$

ดังนั้น ทั้งสองค่าในเทอมที่สองด้านขวามือของสมการที่ (48) จะอยู่ในรูปของ

$$X_{Cr2} = t \int_{S2} x\rho v_n dA \quad (51)$$

และ

$$X_{Ar2} = -t \int_{S1} x\rho v_n dA \quad (52)$$

เมื่อรวมกันจะได้

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X_{Cr2} - X_{Ar2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{t \int_{S2} x\rho v_n dA + t \int_{S1} x\rho v_n dA}{\Delta t} \quad (53)$$

$$= \int_{(S1+S2)} x\rho v_n dA \quad (54)$$

$$= \int_{CS} x\rho v_n dA \quad (55)$$

ทั้งนี้เพราะ  $(S1 + S2)$  คือพื้นที่ผิวทั้งหมดของปริมาตรควบคุม ซึ่งเรียกว่าพื้นผิวของปริมาตรควบคุม (Control surface, CS) แทนค่าสมการที่ (50) และ (52) ลงในสมการที่ (48) จะได้

$$\left. \frac{dX}{dt} \right|_{\text{sys}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} x\rho dV + \int_{CS} x\rho v_n dA \quad (56)$$

สมการที่ (56) แสดงความสัมพันธ์ในการแปลงจากอัตราการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติการไหล  $X$  ที่เกิดขึ้นในระบบมาเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลง  $X$  ภายในปริมาตรควบคุม ซึ่งหลักการปริมาตรควบคุมนำมาใช้ประโยชน์ในการวิเคราะห์หาสมการ

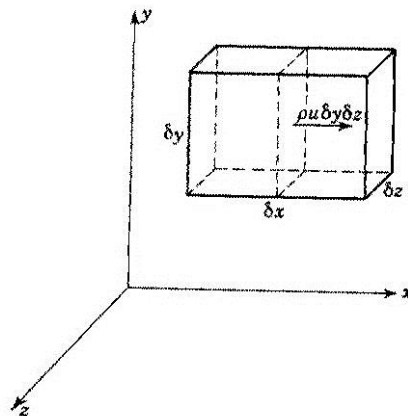
การอนุรักษ์มวล ซึ่งกล่าวว่า ปริมาณมวลสารในระบบจะคงที่ตลอดเวลาไม่มีการสูญหาย นั่นคือ

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (57)$$

ถ้าให้  $X = m$  ซึ่ง  $m$  คือปริมาณมวลสารของระบบ ดังนั้น  $x$  คือปริมาณมวลสารต่อหนึ่งหน่วยมวลสาร หรือ  $x=1$  จะได้

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho dV + \int_{CS} \rho v_n dA = 0 \quad (58)$$

สมการที่ (60) สามารถอธิบายสมการสภาพต่อเนื่องในปริมาตรควบคุมจะมีอัตราการเพิ่มของมวลสาร เท่ากับปริมาณมวลสารสุทธิที่ไหลเข้าสู่ปริมาตรควบคุม เมื่อนำสมการที่ (60) มาประยุกต์ใช้กับปริมาตรควบคุม สามมิติขนาด  $dx dy dz$  ดังแสดงในรูปที่ รูปที่ 7 โดยมีพิกัดศูนย์กลางอยู่ที่  $(x, y, z)$  และมีความเร็วประกอบตามแนวแกน  $x, y$  และ  $z$  เป็น  $u, v$  และ  $w$  ตามลำดับ



รูปที่ 7 ปริมาตรควบคุมสามมิติ (Streeter และ Wylie, 1979)

ถ้าพิจารณาการไหลออกจากระนาบที่ตั้งฉากกับแกน  $x$  ในทิศทาง  $x$  จะได้อัตราการไหลของมวลสารออกจาก ปริมาตรควบคุมทางด้านขวา เท่ากับ  $\left( \rho u + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy \cdot dz$  โดยที่  $\rho$  คือความหนาแน่นของของไหล ถ้าสมมุติว่า  $\rho$  และ  $u$  มีการเปลี่ยนแปลงตลอดทั่วสนามการไหล ในที่นี้  $(\rho u dy dz)$  คือปริมาณมวลสารที่ไหลผ่านจุดศูนย์กลางของ ระนาบที่ตั้งฉากกับแกน  $x$  ในขณะที่เดียวกันอัตราการไหลของมวลสารเข้าสู่ปริมาตรควบคุมทางด้านซ้ายคือ  $\left( \rho u - \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy \cdot dz$  ดังนั้น อัตราการไหลสุทธิออกจากปริมาตรควบคุมในทิศทาง  $x$  คือ อัตราการไหลออกลบ ด้วยอัตราการไหลเข้า ซึ่งเท่ากับ  $\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx \cdot dy \cdot dz$  สำหรับอัตราการไหลออกสุทธิจากปริมาตรควบคุมในทิศทาง  $y$  และ  $z$  คือ  $\frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dx \cdot dy \cdot dz$  และ  $\frac{\partial}{\partial z} (\rho w) dx \cdot dy \cdot dz$  ตามลำดับ เมื่อรวมทั้งสามแกนจะได้อัตราการไหลสุทธิออกจาก

ปริมาตรควบคุมเท่ากับ  $\left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\right) dx dy dz$  ปริมาณนี้คือเทอมที่สองของสมการที่ (4.60) ส่วนเทอมแรกคือ  $\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$  เมื่อรวมทั้งสองเทอมเข้าด้วยกัน และหารตลอดด้วยปริมาตรของปริมาตรควบคุมแล้วให้  $dx dy dz \rightarrow 0$  จะได้สมการสภาพต่อเนื่อง ณ จุดใด ๆ คือ

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (59)$$

สำหรับการไหลที่ไม่สามารถบีบอัดตัวได้ (Incompressible flow)  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  ดังนั้นสมการที่ (61) จะเป็น

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (60)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.61)$$

สมการที่ (61) ถึง (63) คือสมการสภาพต่อเนื่องในการไหล 3 มิติ สำหรับสมการคลื่นน้ำตื้นนั้นพิจารณาการไหล 2 มิติ เทอมที่สามด้านซ้ายมือของสมการที่ (4.63) สามารถตัดทิ้งได้ นั่นคือ

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (62)$$

#### 1.4 สมการคลื่นน้ำตื้นในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (Shallow water equations in Cartesian coordinate)

เมื่ออธิบายสมการข้างต้นในเทอมของอัตราการไหลออกในแต่ละทิศทางได้โดยให้  $M$  และ  $N$  แทนอัตราการไหลออกในทิศทาง  $x$  และ  $y$  ตามลำดับ ซึ่งจะได้

$$M = \int_{-h}^{\eta} u dz = u(h + \eta) = uD, N = \int_{-h}^{\eta} v dz = v(h + \eta) = vD \quad (63)$$

แทนสมการที่ (65) ลงในสมการที่ (29) ถึง (30) และสมการที่ (64) จะได้เป็น

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{M^2}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{MN}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{gn^2}{D^{7/3}} M \sqrt{M^2 + N^2} = 0 \quad (64)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{MN}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{N^2}{D} \right) + gD \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{gn^2}{D^{7/3}} N \sqrt{M^2 + N^2} = 0 \quad (65)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (66)$$

โดยที่  $D$  คือ ความสูงของน้ำทั้งหมด เท่ากับ ความลึก + ความสูงคลื่น

$M$  คือ อัตราการไหลของน้ำที่หน้าตัดในทิศทาง  $x$

$N$  คือ อัตราการไหลของน้ำที่หน้าตัดในทิศทาง  $y$

$g$  คือ ความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลางของโลก

$n$  คือ ความขรุขระของแมนนิ่ง

สมการที่ (66) ถึง (68) เป็นสมการหลักสำหรับการแพร่กระจายสึนามิเมื่อคิดผลของแรงเสียดทานพื้นน้ำและไม่คิดผลของแรงเนื่องจากการหมุนของโลก ซึ่งเรียกว่า สมการคลื่นน้ำตื้นไม่เชิงเส้นในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนสำหรับการจำลองสึนามิ

### 1.5 สมการคลื่นน้ำตื้นในระบบพิกัดทรงกลม (Shallow water equations in Spherical coordinate)

สำหรับการคำนวณสึนามิที่เคลื่อนที่ในระยะทางไกล (Far field tsunami) จะใช้อธิบายการเคลื่อนที่ของสึนามิที่เดินทางข้ามมหาสมุทร นั่นคือหากตัดเทอมที่ไม่เชิงเส้นและเทอมของแรงเสียดทานของพื้นท้องน้ำในสมการที่ (66) และ (67) ออกก็จะได้สมการทฤษฎีคลื่นยาวเชิงเส้น (Linear long wave theory) นั่นคือ

$$\frac{\partial M}{\partial t} + gh \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (67)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + gh \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \quad (68)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (69)$$

นอกจากนั้นจำเป็นต้องพิจารณาความโค้งของโลก และผลของแรงโคริโอลิส (Coriolis force) Imamura และ Shuto, 1991 จึงเสนอสมการคลื่นน้ำตื้นเชิงเส้นในระบบพิกัดทรงกลม (Linear shallow water equations in spherical coordinates) ดังแสดงในรูปที่ 8 ดังนี้

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{gh}{R \cos \theta} \frac{\partial \eta}{\partial \lambda} = fN \quad (70)$$

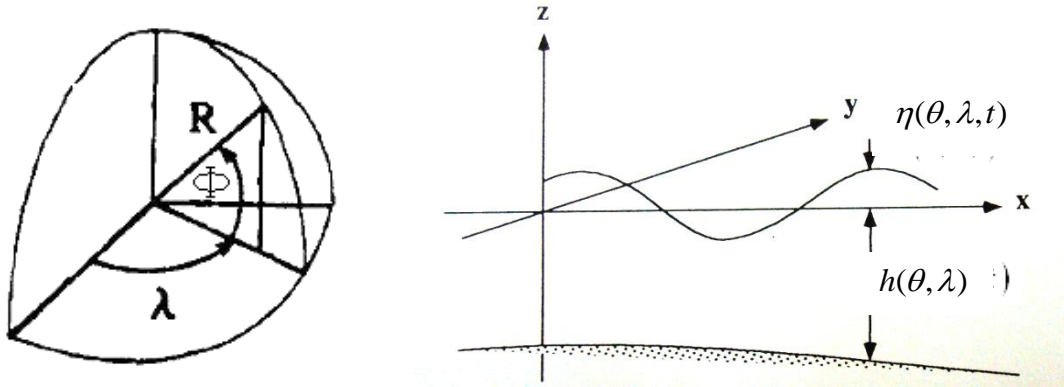
$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{gh}{R} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = -fM \quad (71)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{R \cos \theta} \left[ \frac{\partial M}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} (N \cos \theta) \right] = 0 \quad (72)$$

โดยที่  $\eta$  คือ ความสูงของน้ำ

$M$  คือ อัตราการไหลของน้ำที่หน้าตัดในทิศทาง  $\theta$  (ละติจูด)

- $N$  คือ อัตราการไหลของน้ำที่หน้าตัดในทิศทาง  $\lambda$  (ลองจิจูด)
- $g$  คือ ความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลางของโลก
- $f$  คือ สัมประสิทธิ์ของโคลิโอลิส เท่ากับ  $2\omega \sin \phi$  ( $\omega$  คือความเร็วเชิงมุมของโลก เท่ากับ  $7.292 \times 10^{-5}$  เรเดียนต่อวินาที)



รูปที่ 8 ตำแหน่งและทิศทางของตัวแปรในสมการที่ (72) ถึง (74), (Imamura, 1996)

## 1.6 วิธีการคำนวณเชิงตัวเลข

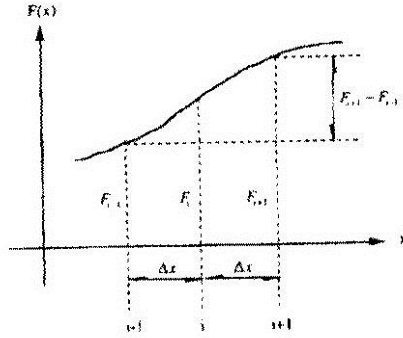
### 1.6.1 หลักการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์สำหรับการทำแบบจำลองสึนามิ

Imamura และ Shuto, 1991 ได้พัฒนาการคำนวณเพื่อใช้ในการทำแบบจำลองวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ (Finite difference method) โดยใช้หลักการอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor expansion series) ซึ่งเป็นวิธีการคำนวณพื้นฐานและได้รับการยอมรับมากที่สุด ในหลักการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์นั้นเป็นการแบ่งพื้นที่ที่สนใจออกเป็นพื้นที่เล็กๆและทำการวิเคราะห์ห้อย่างต่อเนื่อง ดังนั้นการหาอนุพันธ์จึงสามารถหาค่าได้โดยการประมาณโดยใช้ผลของความแตกต่างของสมการผลต่างอนุพันธ์ย่อย (Partial differential equation) โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ จนกระทั่งปัจจุบันหลักการการคำนวณในลักษณะวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ได้มีผู้คิดค้นวิธีการอย่างมากมายซึ่งมีข้อควรระวังต่างๆ เช่นการแบ่งขนาดความกว้างของช่องกริด (Grid size), สภาวะความเสถียร (Stability condition) เพื่อให้ได้มาซึ่งผลเฉลยที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยที่ถูกต้อง (Exact solution) มากที่สุดโดยใช้สมการผลต่างอนุพันธ์ย่อย

หลักการการคำนวณผลต่าง (Difference numerical scheme) ที่ใช้กันอย่างกว้างขวางที่ใช้ในการคำนวณการทำแบบจำลองคลื่นยาวมี 3 หลักการได้แก่ วิธีการการสับเปลี่ยนแบบกบกระโดด (Staggered leap-frog scheme), หลักการของ Crank-Nicholson และหลักการ 2 ขั้นตอน (Two-step) ของ Lax-Wendroff สำหรับแบบจำลองในการศึกษานี้ซึ่งเป็นแบบจำลอง TUNAMI (Tohoku University Numerical Analysis Model for Investigation of tsunami) ได้ใช้วิธีการการสับเปลี่ยนแบบกบกระโดดโดยใช้หลักการที่ชัดเจน (Explicit scheme) ในการคำนวณและมีการประมาณอนุพันธ์อันดับที่ 2 ซึ่งเป็นหลักการที่ไม่ต้องการเวลาในการประมวลผลของหน่วยประมวลผลกลางของเครื่องคอมพิวเตอร์มาก

### 1.6.2 วิธีการสับเปลี่ยนแบบกบกระโดด (Staggered leap-frog scheme)

วิธีการสับเปลี่ยนแบบกบกระโดดเป็นหลักการผลต่างกลาง (Central difference) ด้วยค่าคลาดเคลื่อนเนื่องจากการตัดปลาย (Truncation error) อันดับที่สอง ถ้าให้  $F(x)$  เป็นค่า ณ จุด Discrete ที่มีช่วงช่องว่าง (Spatial interval)  $\Delta x$  จากรูปที่ 9 จะได้  $F\{(i-1)\Delta x\} = F_{i-1}, F(i\Delta x) = F_i, F\{(i+1)\Delta x\} = F_{i+1}$  โดยใช้การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์กระจาย  $F_{i-1}$  และ  $F_{i+1}$  จะได้เป็น



รูปที่ 9 ผลต่างกลาง (Central difference) (UNESCO, 1997)

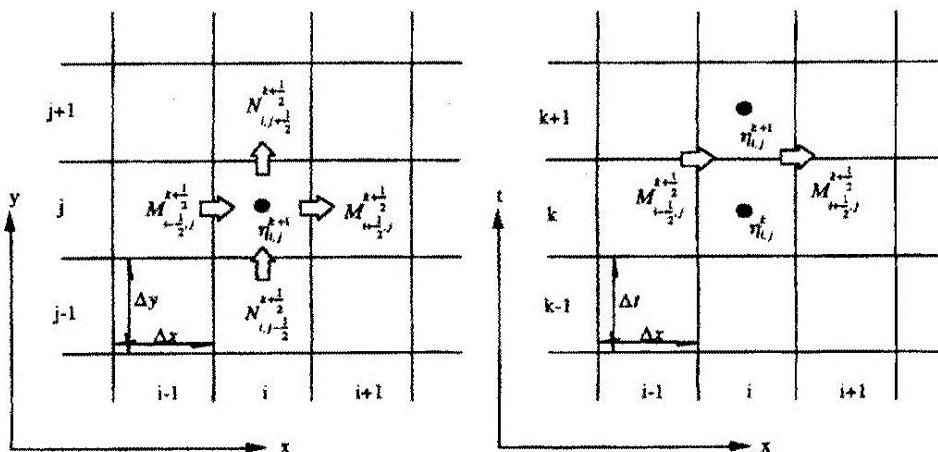
$$F_{i-1} = F_i - \Delta x \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_i - \frac{(\Delta x)^3}{6} \left. \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \right|_i + \frac{(\Delta x)^4}{24} \left. \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} \right|_i + O(\Delta x^5) \quad (73)$$

$$F_{i+1} = F_i + \Delta x \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_i + \frac{(\Delta x)^3}{6} \left. \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \right|_i + \frac{(\Delta x)^4}{24} \left. \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} \right|_i + O(\Delta x^5) \quad (74)$$

ซึ่งผลต่างกลางของอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งหาได้จากผลต่างของสองอนุกรมเทเลอร์ข้างบน นั่นคือ

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_i = \frac{1}{2\Delta x} [F_{i+1} - F_{i-1}] + O(\Delta x^2) \quad (75)$$

ประยุกต์ใช้หลักการผลต่างดังแสดงไว้ในสมการที่ (77) กับสมการคลื่นน้ำตื้นไม่เชิงเส้นในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน เพื่อความสะดวกในการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตวิธีการสับเปลี่ยนแบบกบกระโดด จึงคำนวณค่า  $\eta$  คำนวณไม่พร้อมกันกับค่า  $M$  และ  $N$  ดังแสดงในรูปที่ 10 โดย  $i, j, k$  แทนการอธิบายตำแหน่งเชิงพื้นที่  $x, y$  และเวลา  $t$  ตามลำดับ ซึ่งเป็นที่มาของชื่อ “การสับเปลี่ยนแบบกบกระโดด”



รูปที่ 10 จุดสำหรับคำนวณในวิธีการสับเปลี่ยนแบบกบกระโดด (UNESCO, 1997)

### 1.6.3 สมการการอนุรักษ์มวล

สำหรับทั้งสามเทอมของสมการที่ (68) แสดงได้ดังนี้

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} [\eta_{i,j}^{k+1} - \eta_{i,j}^k] \quad (76)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} \left[ M_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} - M_{i-\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} \right] \quad (77)$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{1}{\Delta y} \left[ N_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - N_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right] \quad (78)$$

ดังนั้นหากทราบค่า  $\eta_{i,j}^k$  จะมีตัวไม่ทราบค่า  $\eta_{i,j}^{k+1}$  เท่านั้น จากนั้นแทนสมการที่ (78) ถึง (80) ลงในสมการที่ (68) แล้วจัดรูปใหม่เป็น

$$\eta_{i,j}^{k+1} = \eta_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ M_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} - M_{i-\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} \right] - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ N_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - N_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right] \quad (79)$$

### 1.6.4 สมการการเคลื่อนที่

ขั้นตอนต่อไปทำการประมาณค่าสมการการเคลื่อนที่ โดยจะอธิบายแยกเป็นสามส่วนคือ การประมาณในเทอมเชิงเส้น การประมาณและเสถียรภาพของเทอมการพาของคลื่น (Convection term) และการประมาณเทอมความเสียดทาน

1) พิจารณาสมการการเคลื่อนที่เชิงเส้นในทิศทาง  $x$  ซึ่งสามารถเขียนได้โดย

$$\frac{\partial M}{\partial t} + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (80)$$

จะได้

$$M_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} = M_{i+\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}} - gD_{i+\frac{1}{2},j}^k \frac{\Delta t}{\Delta x} [\eta_{i+1,j}^k - \eta_{i,j}^k] \quad (81)$$

โดยที่  $D_{i+\frac{1}{2},j}^k$  คือความลึกของน้ำสุทธิ ซึ่งเท่ากับ

$$D_{i+\frac{1}{2},j}^k = h_{i+\frac{1}{2},j} + \eta_{i+\frac{1}{2},j}^k = h_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{1}{2} [\eta_{i+1,j}^k + \eta_{i,j}^k] \quad (82)$$

กระทำเช่นเดียวกันในทิศทาง  $y$  จะได้

$$N_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} = N_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - gD_{i,j+\frac{1}{2}}^k \frac{\Delta t}{\Delta y} [\eta_{i,j+1}^k - \eta_{i,j}^k] \quad (83)$$

โดยที่  $D_{i,j+\frac{1}{2}}^k$  คือความลึกของน้ำสุทธิ ซึ่งเท่ากับ

$$D_{i,j+\frac{1}{2}}^k = h_{i,j+\frac{1}{2}} + \eta_{i,j+\frac{1}{2}}^k = h_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} [\eta_{i,j+1}^k + \eta_{i,j}^k] \quad (84)$$

2) การประมาณและเสถียรภาพของเทอมการพา (Convection term) เมื่อพิจารณาสมการการพา (Convection equation)

$$\frac{\partial F}{\partial t} + C \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (85)$$

โดยที่  $C$  คือสัมประสิทธิ์การแพร่กระจายความเร็ว เมื่อกำหนดจุดการคำนวณสำหรับวิธีการสับเปลี่ยนแบบกบกระโดด โดยประยุกต์หลักการผลต่างข้างหน้า (Forward difference scheme) เพื่อหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับเวลา ผลต่างกลางสำหรับอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับระยะทาง ดังแสดงในรูปที่ 9 จะได้

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} \left[ F_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - F_{i+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right] - O(\Delta t) \quad (86)$$

$$C \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{C}{2\Delta x} \left[ F_{i+\frac{3}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right] + O(\Delta x^2) \quad (87)$$

แทนค่าสมการที่ (86) และ (87) ลงในสมการที่ (85) และจัดรูปให้อยู่ในตัวไม่ทราบค่า  $F_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}$  โดยเลือกปลายที่  $O(\Delta t)$  และ  $O(\Delta x^2)$  จะได้

$$F_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} = F_{i+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - C \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ F_{i+\frac{3}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right] \quad (88)$$

อย่างไรก็ตามหากตัดปลายที่อันดับสองเท่ากันสมการที่ (90) จะเทียบเท่าโดยปริยาย (Implicitly equivalent) กับสมการที่ (91) เมื่อความคลาดเคลื่อนตัดปลายที่  $O(\Delta x^2 + \Delta t^2)$  นั่นคือ

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + C \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (89)$$

หาอนุพันธ์อันดับสองเทียบกับเวลาของสมการที่ (87) แล้วเขียนความสัมพันธ์ใหม่ด้วย

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( -C \frac{\partial F}{\partial x} \right) = C^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \text{ แทนลงในสมการที่ (91) จะได้}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + C \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\Delta t}{2} C^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad (90)$$

ซึ่งสามารถหาผลเฉลยของสมการจากสมการการแพร่ (Diffusion equation) โดยที่มีสัมประสิทธิ์การแพร่ติดลบแสดงถึงความไร้เสถียรภาพเนื่องจากค่าความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษสะสม ดังนั้นสมการที่ (90) จึงไร้เสถียรภาพ (Unstable difference scheme) ส่วนในผลต่างที่มีเสถียรภาพหาได้จากการประมาณค่าแต่ละเทอมโดยวิธีผลต่างข้างหน้า (Forward difference) หรือข้างหลัง (Backward difference) นั่นคือ

$$C \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{C}{\Delta x} \left[ F_{i+\frac{3}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - F_{i+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right] - \frac{\Delta x}{2} C \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + O(\Delta x^2) \quad (91)$$

$$C \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{C}{\Delta x} \left[ F_{i+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right] + \frac{\Delta x}{2} C \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + O(\Delta x^2) \quad (92)$$

สมการที่ (93) และ (94) คือผลต่างข้างหน้าและข้างหลังตามลำดับ สมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับผลการคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายลำดับที่สอง  $O(\Delta x^2 + \Delta t^2)$  สำหรับผลต่างข้างหน้าและผลต่างข้างหลังคือ

$$\frac{\partial F}{\partial t} + C \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{C}{2} (C\Delta t + \Delta x) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad (93)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + C \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{C}{2} (-C\Delta t + \Delta x) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad (94)$$

ดังนั้นเราจะมีสัมประสิทธิ์การแพร่เสมือนเป็นบวก (เพื่อให้แน่ใจว่าการคำนวณจะมีเสถียรภาพ) ซึ่งจะใช้ผลต่างข้างหลังในกรณีที่ค่า  $C$  เป็นบวก และกรณีที่ค่า  $C$  ติดลบใช้ผลต่างข้างหน้า และค่า  $\frac{\Delta x}{\Delta t} > C$  ด้วย อย่างไรก็ตามผลต่างนั้นจะเป็นไปตามทิศทางของการไหล ซึ่งก็วิธีการสับเปลี่ยนแบบกบกระโดดที่มีค่าคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายลำดับที่สอง ฉะนั้นในแต่ละเทอมในสมการที่ (66) ถึง (67) สามารถกระจายได้ด้วยหลักการที่กล่าวไว้ข้างต้น ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{M^2}{D} \right) = \frac{1}{\Delta x} \left[ \lambda_{11} \frac{\left( M_{i+\frac{3}{2},j}^{k-\frac{1}{2}} \right)^2}{D_{i+\frac{3}{2},j}^{k-\frac{1}{2}}} + \lambda_{21} \frac{\left( M_{i+\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}} \right)^2}{D_{i+\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}}} + \lambda_{31} \frac{\left( M_{i-\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}} \right)^2}{D_{i-\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}}} \right] \quad (95)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{MN}{D} \right) = \frac{1}{\Delta y} \left[ v_{11} \frac{\left( M_{i+\frac{1}{2},j+1}^{k-\frac{1}{2}} N_{i+\frac{1}{2},j+1}^{k-\frac{1}{2}} \right)}{D_{i+\frac{1}{2},j+1}^{k-\frac{1}{2}}} + v_{21} \frac{\left( M_{i+\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}} N_{i+\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}} \right)}{D_{i+\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}}} + v_{31} \frac{\left( M_{i+\frac{1}{2},j-1}^{k-\frac{1}{2}} N_{i+\frac{1}{2},j-1}^{k-\frac{1}{2}} \right)}{D_{i+\frac{1}{2},j-1}^{k-\frac{1}{2}}} \right] \quad (96)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{MN}{D} \right) = \frac{1}{\Delta x} \left[ \lambda_{12} \frac{\left( M_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} N_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right)}{D_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}}} + \lambda_{22} \frac{\left( M_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} N_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right)}{D_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}}} + \lambda_{32} \frac{\left( M_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} N_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right)}{D_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}}} \right] \quad (97)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{N^2}{D} \right) = \frac{1}{\Delta y} \left[ v_{12} \frac{\left( N_{i,j+\frac{3}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right)^2}{D_{i,j+\frac{3}{2}}^{k-\frac{1}{2}}} + v_{22} \frac{\left( N_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right)^2}{D_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}}} + v_{32} \frac{\left( N_{i,j-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right)^2}{D_{i,j-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}}} \right] \quad (98)$$

$$\text{โดยที่ } M_{i+\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}} \begin{cases} \geq 0, \lambda_{11} = 0, \lambda_{21} = 1, \lambda_{31} = -1 \\ < 0, \lambda_{11} = 1, \lambda_{21} = -1, \lambda_{31} = 0 \end{cases}, \quad N_{i+\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}} \begin{cases} \geq 0, v_{11} = 0, v_{21} = 1, v_{31} = -1 \\ < 0, v_{11} = 1, v_{21} = -1, v_{31} = 0 \end{cases}$$

$$M_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \begin{cases} \geq 0, \lambda_{12} = 0, \lambda_{22} = 1, \lambda_{32} = -1 \\ < 0, \lambda_{12} = 1, \lambda_{22} = -1, \lambda_{32} = 0 \end{cases}, \quad N_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \begin{cases} \geq 0, v_{12} = 0, v_{22} = 1, v_{32} = -1 \\ < 0, v_{12} = 1, v_{22} = -1, v_{32} = 0 \end{cases}$$

3) การประมาณเทอมความเสียดทาน เทอมนี้จะสร้างความไร้เสถียรภาพขึ้นหากผลเฉลยเป็นผลเฉลยโดยชัดเจน (Explicit scheme) ในที่นี้จึงนำเสนอโดยวิธีปริยาย (Implicit scheme) ดังนี้

$$\frac{gn^2}{D^{7/3}} M \sqrt{M^2 + N^2} = \frac{gn^2}{\left( D_{i+\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}} \right)^{7/3}} \frac{1}{2} \left( M_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} - M_{i+\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}} \right) \sqrt{\left( M_{i+\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}} \right)^2 + \left( N_{i+\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}} \right)^2} \quad (99)$$

$$\frac{gn^2}{D^{7/3}} N \sqrt{M^2 + N^2} = \frac{gn^2}{\left( D_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right)^{7/3}} \frac{1}{2} \left( N_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - N_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) \sqrt{\left( M_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right)^2 + \left( N_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right)^2} \quad (100)$$

สุดท้ายจะได้สมการคลื่นน้ำตื้นในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน ที่ใช้วิธีการสับเปลี่ยนแบบกบกระโดดสำหรับสัณนิภา  
ระยะใกล้ ดังนี้

$$\eta_{i,j}^{k+1} = \eta_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ M_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} - M_{i-\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} \right] - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ N_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - N_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right] \quad (101)$$

$$M_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{1}{1 + \mu x_{i+\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}}} \left\{ \begin{aligned} & \left( 1 - \mu x_{i+\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}} \right) M_{i+\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \lambda_{11} \frac{\left( M_{i+\frac{3}{2},j}^{k-\frac{1}{2}} \right)^2}{D_{i+\frac{3}{2},j}^{k-\frac{1}{2}}} + \lambda_{21} \frac{\left( M_{i+\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}} \right)^2}{D_{i+\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}}} + \lambda_{31} \frac{\left( M_{i-\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}} \right)^2}{D_{i-\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}}} \right] \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[ v_{11} \frac{\left( M_{i+\frac{1}{2},j+1}^{k-\frac{1}{2}} N_{i+\frac{1}{2},j+1}^{k-\frac{1}{2}} \right)}{D_{i+\frac{1}{2},j+1}^{k-\frac{1}{2}}} + v_{21} \frac{\left( M_{i+\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}} N_{i+\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}} \right)}{D_{i+\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}}} + v_{31} \frac{\left( M_{i+\frac{1}{2},j-1}^{k-\frac{1}{2}} N_{i+\frac{1}{2},j-1}^{k-\frac{1}{2}} \right)}{D_{i+\frac{1}{2},j-1}^{k-\frac{1}{2}}} \right] \\ & - g D_{i+\frac{1}{2},j}^k \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \eta_{i+1,j}^k - \eta_{i,j}^k \right) \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

$$N_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{1}{1 + \mu y_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}}} \left\{ \begin{aligned} & \left( 1 - \mu y_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right) N_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[ v_{12} \frac{\left( N_{i,j+\frac{3}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right)^2}{D_{i,j+\frac{3}{2}}^{k-\frac{1}{2}}} + v_{22} \frac{\left( N_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right)^2}{D_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}}} + v_{32} \frac{\left( N_{i,j-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right)^2}{D_{i,j-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}}} \right] \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \lambda_{12} \frac{\left( M_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} N_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right)}{D_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}}} + \lambda_{22} \frac{\left( M_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} N_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right)}{D_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}}} + \lambda_{32} \frac{\left( M_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} N_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right)}{D_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}}} \right] \\ & - g D_{i,j+\frac{1}{2}}^k \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( \eta_{i,j+1}^k - \eta_{i,j}^k \right) \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

โดยที่  $\mu x_{i+\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{gn^2}{\left( D_{i+\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}} \right)^{7/3}} \sqrt{\left( M_{i+\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}} \right)^2 + \left( N_{i+\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}} \right)^2}$

$$\mu y_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{gn^2}{\left( D_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right)^{7/3}} \sqrt{\left( M_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right)^2 + \left( N_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} \right)^2}$$

$$D_{i+\frac{1}{2},j}^k = \frac{1}{2} \left( D_{i+1,j}^k + D_{i,j}^k \right) = \frac{1}{2} \left( \eta_{i+1,j}^k + \eta_{i,j}^k \right) + h_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$D_{i+\frac{1}{2},j}^{k-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \left( D_{i+1,j}^k + D_{i+1,j}^{k-1} + D_{i,j}^k + D_{i,j}^{k-1} \right) = \frac{1}{4} \left( \eta_{i+1,j}^k + \eta_{i+1,j}^{k-1} + \eta_{i,j}^k + \eta_{i,j}^{k-1} \right) + h_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$D_{i,j+\frac{1}{2}}^k = \frac{1}{2} \left( D_{i,j+1}^k + D_{i,j}^k \right) = \frac{1}{2} \left( \eta_{i,j+1}^k + \eta_{i,j}^k \right) + h_{i,j+\frac{1}{2}}$$

$$D_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \left( D_{i,j+1}^k + D_{i,j+1}^{k-1} + D_{i,j}^k + D_{i,j}^{k-1} \right) = \frac{1}{4} \left( \eta_{i,j+1}^k + \eta_{i,j+1}^{k-1} + \eta_{i,j}^k + \eta_{i,j}^{k-1} \right) + h_{i,j+\frac{1}{2}}$$

4) ในส่วนสมการคลื่นน้ำตื้นเชิงเส้นในระบบพิกัดทรงกลม ได้ดังนี้

$$\eta_{j,m}^{n+\frac{1}{2}} = \eta_{j,m}^{n-\frac{1}{2}} - R_1 \left[ M_{j+\frac{1}{2},m}^n - M_{j-\frac{1}{2},m}^n + N_{j,m+\frac{1}{2}}^n \cos \theta_{m+\frac{1}{2}} - N_{j,m-\frac{1}{2}}^n \cos \theta_{m-\frac{1}{2}} \right] \quad (104)$$

$$M_{j+\frac{1}{2},m}^{n+1} = M_{j+\frac{1}{2},m}^n - R_2 h_{j+\frac{1}{2},m} \left[ \eta_{j+1,m}^{n+\frac{1}{2}} - \eta_{j,m}^{n+\frac{1}{2}} \right] + R_3 N' \quad (105)$$

$$N_{j,m+\frac{1}{2}}^{n+1} = N_{j,m+\frac{1}{2}}^n - R_4 h_{j,m+\frac{1}{2}} \left[ \eta_{j+1,m}^{n+\frac{1}{2}} - \eta_{j,m}^{n+\frac{1}{2}} \right] + R_3 M' \quad (106)$$

$$\text{โดยที่ } N' = \frac{1}{4} \left[ N_{j+1,m+\frac{1}{2}}^n + N_{j+1,m-\frac{1}{2}}^n + N_{j,m+\frac{1}{2}}^n + N_{j,m-\frac{1}{2}}^n \right]$$

$$M' = \frac{1}{4} \left[ M_{j+1,m+\frac{1}{2}}^n + M_{j+1,m-\frac{1}{2}}^n + M_{j,m+\frac{1}{2}}^n + M_{j,m-\frac{1}{2}}^n \right]$$

$$R_1 = \frac{\Delta t}{R \cos \theta_m \Delta s}, R_2 = \frac{g \Delta t}{R \cos \theta_m \Delta s}, \quad R_3 = 2 \Delta t \omega \sin \theta_m, \quad R_4 = \frac{g \Delta t}{R \Delta s},$$

$$R_5 = 2 \Delta t \omega \sin \theta_{m+\frac{1}{2}}$$

ณ จุดที่ทำกรคำนวณจะแทนทิศทาง  $(\theta, \lambda, t)$  ด้วย  $(j, m, n)$  ความยาวของกริดในด้านละติจูดเท่ากับด้านลองจิจูด นั้นคือ  $\Delta s = \Delta \theta = \Delta \lambda$  และ  $\omega$  คือความเร็วเชิงมุมของโลก สำหรับขนาดกริดเชิงพื้นที่นี้จะกำหนดให้เหมาะสมกับเงื่อนไขของ Imamura number ( $I_m$ ) โดยจะกำหนดให้มีค่าเข้าใกล้หนึ่ง

$$I_m = \Delta x / 2h \sqrt{1 - K^2} \quad (107)$$

$$K = \sqrt{gh} \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (108)$$

และพิจารณาตามเงื่อนไขของ CFL (Courant-Friedrichs-Levy condition) คือ

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \sqrt{2gh_{\max}} \quad (109)$$

โดยที่  $K$  คือ คอเรนตันัมเบอร์ (Courant Number)

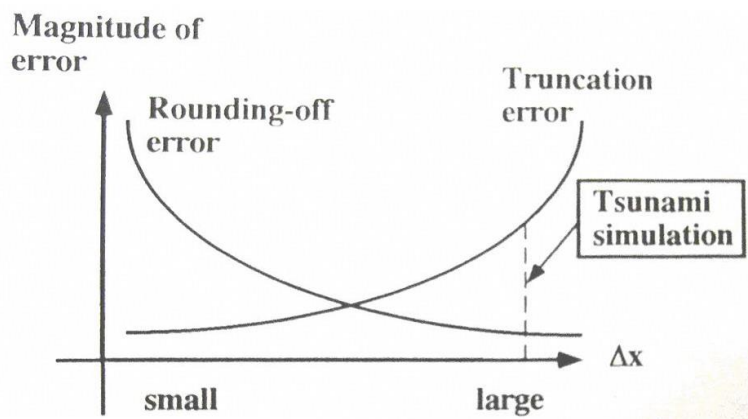
$h$  คือ ความลึกเฉลี่ยของท้องน้ำ บริเวณที่พิจารณา

$h_{\max}$  คือ ความลึกมากที่สุดของท้องน้ำ บริเวณที่พิจารณา

$\Delta t$  คือ ช่วงเวลาคำนวณ แต่ละรอบ

## 1.7 ค่าความคลาดเคลื่อนในการคำนวณ

ค่าความคลาดเคลื่อนของแบบจำลองที่สำคัญเกิดขึ้นจาก 2 สาเหตุหลัก คือ ค่าความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ (Rounding-off errors) และค่าความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย (Truncation errors) ค่าความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษเกิดจากการจำกัดจำนวนจุดทศนิยมของตัวแปรต่างๆ ที่จะใช้สำหรับการคำนวณ ซึ่งค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการปัดเศษนั้นขึ้นอยู่กับจำนวนช่องกริดที่แบ่งไว้สำหรับการคำนวณ ส่วนค่าความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายเกิดจากขั้นตอนการแปลงสมการอนุพันธ์ย่อย (Partial differentiation equations) ไปสู่ไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ ขนาดของค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการตัดปลายสามารถแทนด้วย  $\Delta x^n$  ดังนั้นการคำนวณโดยใช้ช่องกริดขนาดเล็กกลางอาจทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายลดลง แต่จะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษให้มากขึ้นได้ ดังแสดงในรูปที่ 11



รูปที่ 11 กราฟแสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการตัดปลาย (Truncation errors) กับค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการปัดเศษ (Rounding-off errors) สำหรับขนาดความกว้างของช่องกริดขนาดต่างๆ (Imamura, 1996)

## 1.8 เงื่อนไขเริ่มต้นและสถานะขอบเขต (Initial and boundary conditions)

### 1.8.1 เงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition)

สำหรับเงื่อนไขเริ่มต้นจะอาศัยสมมติฐานว่า เมื่อมีการเคลื่อนตัวของพื้นทะเลเนื่องจากแผ่นดินไหว ผิวน้ำจะมีการเคลื่อนตัวเคลื่อนตัวเท่าๆ กันกับการเคลื่อนตัวของพื้นทะเล โดยใช้หลักการของ Mansinha และ Smylie ปี 1971 และจะต้องทราบค่ากลไกต่างๆ ของแผ่นดินไหว

### 1.8.2 สถานะขอบเขต (Boundary conditions)

เงื่อนไขขอบเขตจะกำหนดให้คลื่นที่เดินทางถึงขอบพื้นดินสะท้อนกลับหมด โดยความเร็วที่ขอบพื้นดินมีค่าเท่ากับศูนย์ ส่วนในขอบเขตที่เป็นพื้นน้ำจะกำหนดให้คลื่นเดินทางผ่านได้อย่างอิสระ เมื่อพิจารณาการไหลผ่านเป็นแบบอิสระเชิงเส้น และสมมุติให้  $\eta$  มีค่าน้อยมากๆ เมื่อเทียบกับ  $h$  จะสามารถหาค่า  $\eta$  ได้จาก

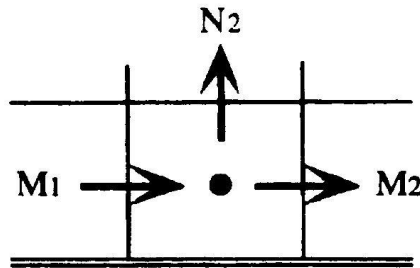
$$\eta = +Q/\sqrt{gh} \quad \text{สำหรับ } \eta \text{ ที่มีค่าเพิ่มขึ้น} \quad (110)$$

$$\eta = -Q/\sqrt{gh} \quad \text{สำหรับ } \eta \text{ ที่มีค่าลดลง} \quad (111)$$

ซึ่งในที่นี้เมื่อพิจารณาทั้งอัตราการไหล  $Q$  และทิศทางการไหลของน้ำ อัตราการไหลได้จากสมการ (114) ซึ่งทิศทางการไหลจะ

ขึ้นอยู่กับเครื่องหมายของ  $N_2$  ดังแสดงในรูปที่ 12

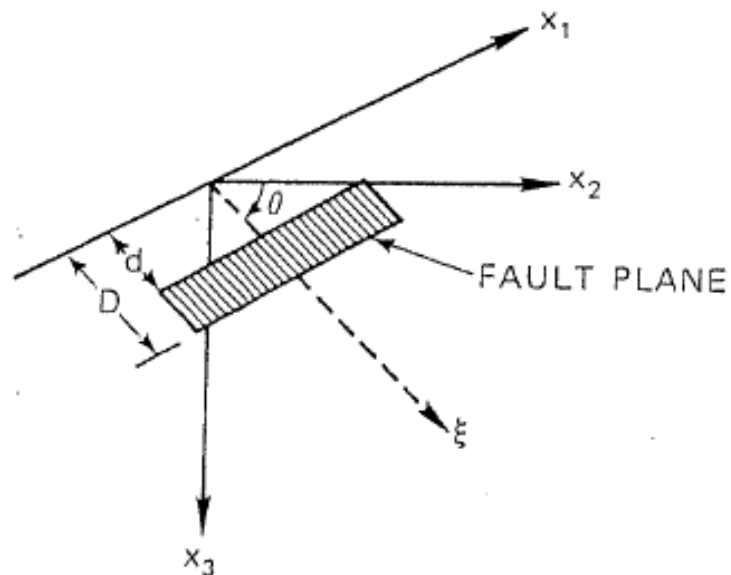
$$Q = \sqrt{\frac{(M_1 + M_2)^2}{4} + N_2^2} \quad (112)$$



รูปที่ 12 แสดงลักษณะความแตกต่างของอัตราการใช้ระหว่าง  $\eta$  ที่มีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลง รูปของ  $N_2$  (UNESCO, 1997)

### 1.9 การเปลี่ยนแปลงของเปลือกโลกเนื่องจากรอยเลื่อน (Sea surface deformation)

การเปลี่ยนแปลงของพื้นทะเล จะวิเคราะห์จากสมการของ Mansinha และ Smylie (1971) ซึ่งได้เสนอสมการการคำนวณสนามการเคลื่อนที่สำหรับการเคลื่อนตัวของรอยเลื่อนตามแนวระดับ (Strike-slip fault) และรอยเลื่อนตามแนวมุมเท (Dip-slip fault) ในวัตถุยืดหยุ่นสม่ำเสมอครึ่งปริภูมิ (Displacement field in uniform elastic half-space)



รูปที่ 13 ลักษณะรอยเลื่อนและตำแหน่งอ้างอิง (Mansinha และ Smylie, 1971)

### 1.9.1 ระยะยกตัวสำหรับการเคลื่อนที่ แบบรอยเลื่อนตามแนวระดับ (Strike-slip)

$$\begin{aligned}
 12\pi \frac{u_3}{U_1} = & \cos \theta \left[ \ln(R + r_3 - \xi) + (1 + 3 \tan^2 \theta) \ln(Q + q_3 + \xi) - 3 \tan \theta \sec \theta \ln(Q + x_3 + \xi_3) \right] \\
 & + \frac{2r_2 \sin \theta}{R} + 2 \sin \theta \frac{(q_2 + x_2 \sin \theta)}{Q} - \frac{2r^2 \cos \theta}{R(R + r_3 - \xi)} \\
 & + \frac{4q_2 x_3 \sin^2 \theta - 2(q_2 + x_2 \sin \theta)(x_3 + q_3 \sin \theta)}{Q(Q + q_3 + \xi)} \\
 & + 4q_2 x_3 \sin \theta \frac{[(x_3 + \xi_3) - q_3 \sin \theta]}{Q^3} - 4q_2^2 q_3 x_3 \cos \theta \sin \theta \frac{(2Q + q_3 + \xi)}{Q^3 (Q + q_3 + \xi)^2}
 \end{aligned} \tag{113}$$

### 1.9.2 ระยะยกตัวสำหรับการเคลื่อนที่ แบบรอยเลื่อนแยกตามมุมเท (Dip-slip)

$$\begin{aligned}
 12\pi \frac{u_3}{U} = & \sin \theta \left[ (x_2 - \xi_2) \left\{ \frac{2(x_3 - \xi_3)}{R(R + x_1 - \xi_1)} + 4 \frac{(x_3 - \xi_3)}{Q(Q + x_1 - \xi_1)} \right. \right. \\
 & \left. \left. - 4\xi_3 x_3 (x_3 + \xi_3) \left( \frac{2Q + x_1 - \xi_1}{Q^3 (Q + x_1 - \xi_1)^2} \right) \right\} - 6 \tan^{-1} \left\{ \frac{(x_1 - \xi_1)(q_3 + \xi)}{q_2 Q} \right\} \right] \\
 & + \cos \theta \left[ \ln(R + x_1 - \xi_1) - \ln(Q + x_1 - \xi_1) - 2 \frac{(x_3 - \xi_3)^2}{R(R + x_1 - \xi_1)} \right. \\
 & \left. - 4 \frac{\{(x_3 + \xi_3)^2 - \xi_3 x_3\}}{Q(Q + x_1 + \xi_1)} + 4\xi_3 x_3 (x_3 + \xi_3)^2 \left( \frac{2Q + x_1 - \xi_1}{Q^3 (Q + x_1 - \xi_1)^2} \right) \right] \\
 & + 6x_3 \left[ \cos \theta \sin \theta \left\{ \frac{2(q_3 + \xi)}{Q(Q + x_1 - \xi_1)} + \frac{x_1 - \xi_1}{Q(Q + q_3 + \xi)} - q_2 \frac{(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)}{Q(Q + x_1 - \xi_1)} \right\} \right]
 \end{aligned} \tag{114}$$

$$R = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2} \tag{115}$$

$$Q = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 + \xi_3)^2} \tag{116}$$

$$r_2 = x_2 \sin \theta - x_3 \cos \theta, \quad q_2 = x_2 \sin \theta + x_3 \cos \theta \tag{117}$$

$$r_3 = x_2 \cos \theta + x_3 \sin \theta, \quad q_3 = -x_2 \cos \theta + x_3 \sin \theta \tag{118}$$

โดยที่  $u_3$  คือ ระยะยกตัวในแนวตั้งที่พิกัด  $(x_1, x_2, x_3)$

$U_1$  คือ ระยะเคลื่อนที่ในแนว  $x_1$

$U$  คือ ระยะเคลื่อนที่ในแนว  $\xi$

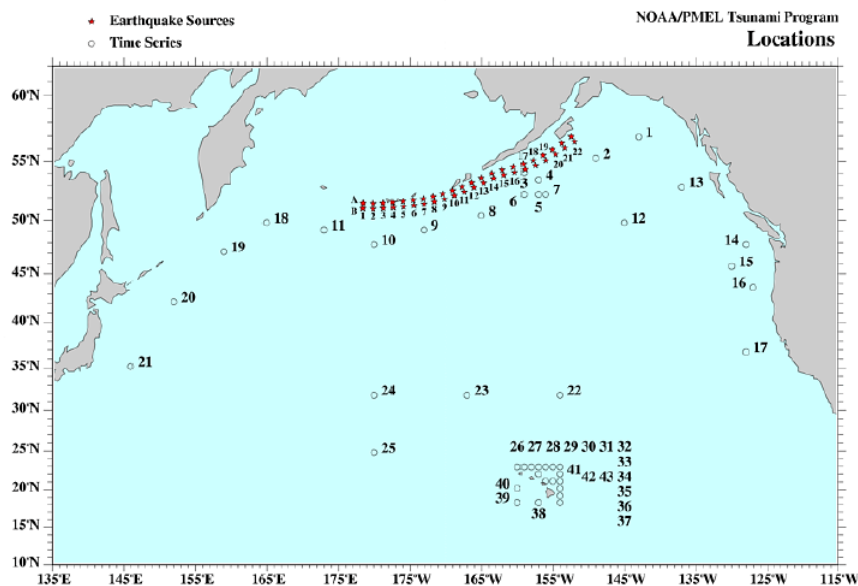
$\theta$  คือ มุมเท ของรอยเลื่อน

$\xi_1, \xi_2, \xi_3$  คือ จุดที่แรงกระทำในระนาบรอยเลื่อน

## 1.10 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาลักษณะรอยเลื่อนของแหล่งกำเนิดสึนามิ

Titov และคณะ (1999) ศึกษาผลกระทบของสึนามิบริเวณชายฝั่งฮาวาย โดยใช้พารามิเตอร์ของรอยเลื่อนในเขตมุดตัว Alaska-Aleutian และออกแบบจำลองสึนามิเพื่อวิเคราะห์ไหวของสึนามิ ซึ่งใช้เหตุการณ์แผ่นดินไหวที่เกาะ Andreanov ปี 1996 จากการศึกษาพบว่าคลื่นลูกแรกไม่ไวต่อพารามิเตอร์ของรอยเลื่อน นอกจากนั้นผลที่ได้จากแบบจำลองสึนามิยังถูกเก็บเป็นฐานข้อมูลออนไลน์ เพื่อใช้สำหรับการทำนายความสูงของสึนามิ ณ ชายฝั่งฮาวาย โดยการเลือกตำแหน่งของแผ่นดินไหวในเขตมุดตัว Alaska-Aleutian และฐานข้อมูลนี้ยังใช้ประโยชน์เป็นเครื่องมือ สำหรับการพยากรณ์สึนามิและการจัดการบรรเทาสาธารณภัย

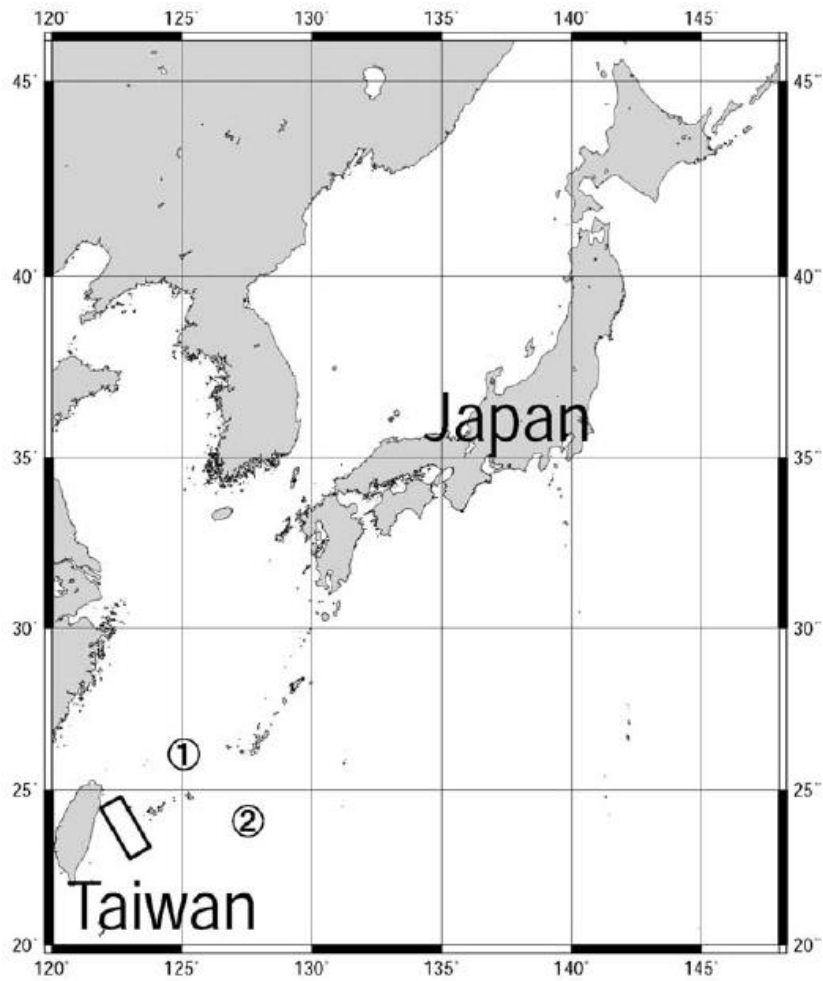
การสร้างฐานข้อมูลสึนามิทำโดยเลือกจากแผ่นดินไหวขนาด 7.5 เป็นหน่วยของแหล่งกำเนิด (Unit source) ที่มีขนาดของรอยเลื่อนคือ กว้าง 50 กิโลเมตร ยาว 100 กิโลเมตร มุมเท 15 องศา มุมเลื่อนถล่ม 90 องศา ความลึก 5 กิโลเมตร ระยะการเคลื่อนตัว 1 เมตร และมุมแนวระดับวางตามแนวเขตมุดตัว Alaska-Aleutian โดยวางต่อเนื่องเป็นระยะทางรวม 100 กิโลเมตร และแบ่งเป็น 2 แนว แนวแรกวางตามร่องลึก Aleutian (แนว B) ดังแสดงในรูปที่ 14 แนวที่สองวางไว้บนแนวแรกแต่มีความลึกเป็น 17.5 กิโลเมตร หลังจากนั้นทำการวิเคราะห์สึนามิจากรอยเลื่อนเหล่านั้นแล้วเก็บเป็นฐานข้อมูล



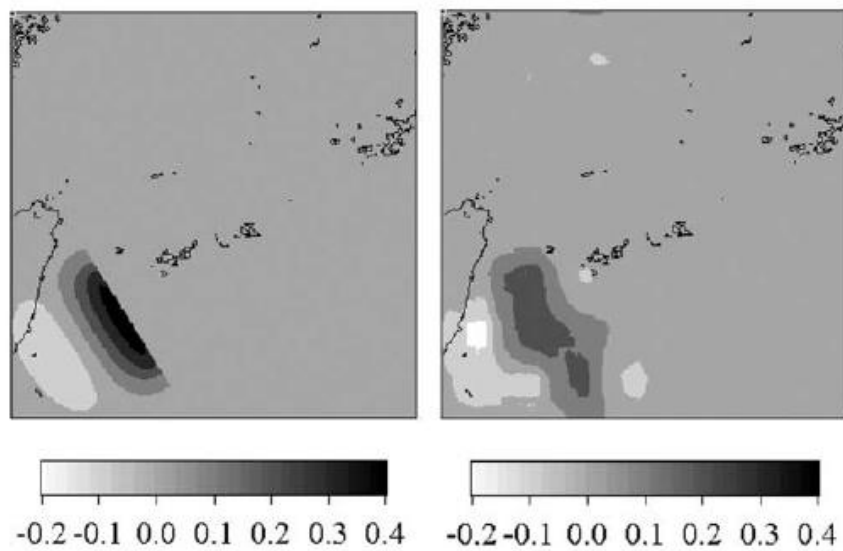
รูปที่ 14 ตำแหน่งของหน่วยกำเนิดบนเขตมุดตัว Alaska-Aleutian (ดาว) และสถานีวัดน้ำที่เลือกศึกษา

(วงกลม) (Titov และคณะ)

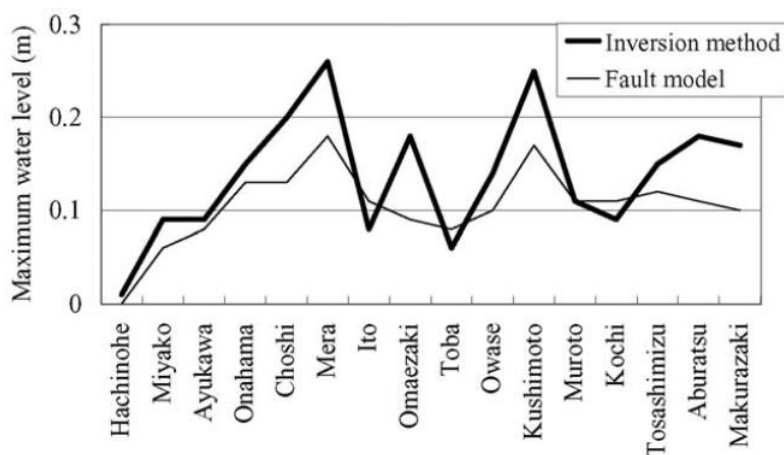
Koike และคณะ (2003) เสนอวิธีการประเมินศักยภาพของสึนามิระยะไกลโดยการสมมุติแบบจำลองรอยเลื่อนบนขอบแปซิฟิก และทำการจำลองสึนามิขึ้นในบริเวณที่สึนามิสามารถสร้างความเสียหายต่อชายฝั่งญี่ปุ่นซึ่งยังไม่เคยเกิดมาก่อน วิธีการที่นำเสนอคือใช้การคำนวณย้อนกลับโดยการแปลงเวฟเล็ต (Wavelet transform) ซึ่งวิธีนี้ไม่ต้องใช้ข้อมูลแผ่นดินไหวเลย และทำการตรวจสอบกับแบบจำลองเชิงตัวเลขโดยสมมุติเหตุการณ์แผ่นดินไหวนอกทะเลใต้หวัน โดยใช้ข้อมูลคลื่นจากสถานีวัดน้ำช่วงเวลา 90 นาที และใช้เวลาสำหรับการคำนวณย้อนกลับใน 2 มิติอีก 5 วินาที หลังจากนั้นใช้เวลาอีก 2 นาทีสำหรับการพยากรณ์ความสูงคลื่น เมื่อรวมเวลาที่ใช้คำนวณทั้งหมดยังน้อยกว่าเวลาที่คลื่นใช้เดินทางจากใต้หวันถึงญี่ปุ่นซึ่งใช้เวลาประมาณ 105 นาที และเมื่อเปรียบเทียบความสูงคลื่นที่ได้จากการคำนวณย้อนกลับกับแบบจำลองรอยเลื่อนมีความคลาดเคลื่อน 0.39 เมตร ส่วนความคลาดเคลื่อนของเวลาที่คลื่นเดินทางคือ 0.007 นาที



รูปที่ 15 ที่ตั้งของสถานีวัดน้ำที่ 1 กับ 2 และตำแหน่งของแบบจำลองรอยเลื่อน (Koike และคณะ, 2003)

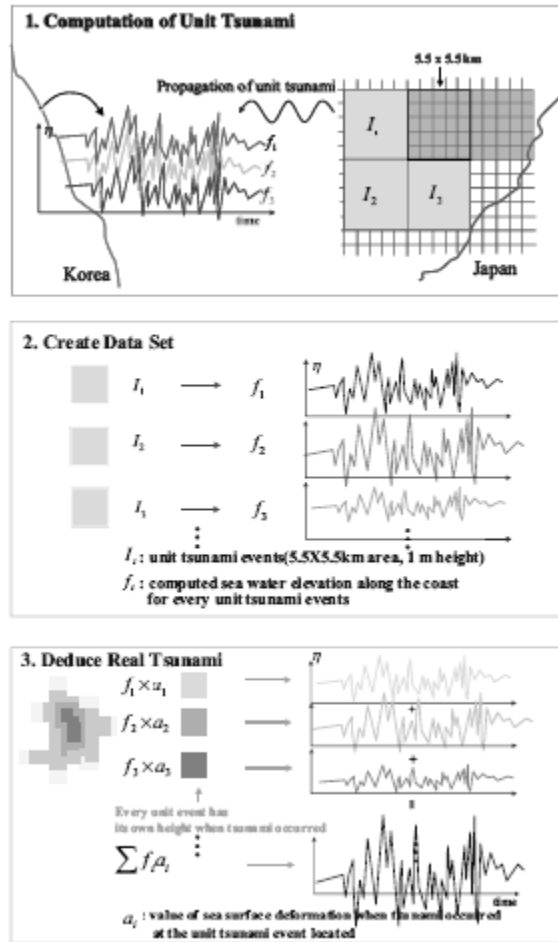


รูปที่ 16 ระดับน้ำเริ่มต้นที่คำนวณจากแบบจำลองรอยเลื่อน (ซ้าย) และคำนวณย้อนกลับ (ขวา) (Koike และคณะ, 2003)



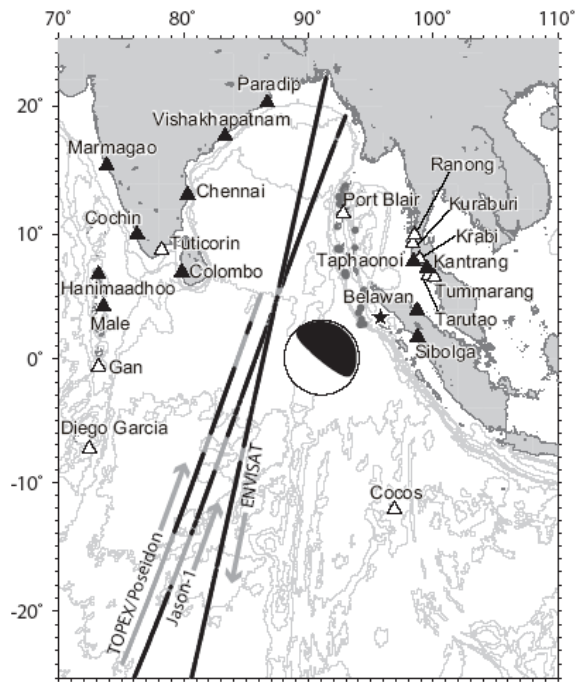
รูปที่ 17 การเปรียบเทียบความสูงคลื่นระหว่างวิธีการคำนวณย้อนกลับกับการคำนวณจากแบบจำลองรอยเลื่อน (Koike และคณะ, 2003)

Lee และคณะ (2005) ศึกษาความเป็นไปได้ที่จะพยากรณ์สึนามิโดยใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล โดยใช้สมการคลื่นยาวเชิงเส้นในการคำนวณการแพร่กระจายสึนามิของรอยเลื่อนย่อยๆ แล้วจึงนำมาซ้อนทับกันโดยหลักการซ้อนทับ (Superposition) สึนามิที่คำนวณแต่ละบริเวณจะเรียกว่า หน่วยสึนามิ (Unit tsunami) ที่มีพื้นที่ขนาด 5.5 ตารางกิโลเมตร และในแต่ละบริเวณย่อยนั้นสมมติให้เกิดการยกตัวของพื้นทะเลสูง 1 เมตร โดยเลือกวางตลอดแนวชายฝั่งด้านตะวันออกของประเทศเกาหลีเป็นฐานข้อมูล เมื่อเกิดสึนามิขึ้นจริงจะพยากรณ์จากผลคูณของการเคลื่อนตัวของเปลือกโลกเริ่มต้น (ใช้สมการของ Manshinha และ Smylie) ทุกๆ ตำแหน่งของหน่วยสึนามิถูกคำนวณไว้ก่อนหน้า เมื่อรวมผลในแต่ละตำแหน่งของการเคลื่อนตัวของเปลือกโลกจะได้ความสูงคลื่นจริง นอกจากนั้นยังทำการทดสอบแบบจำลองกับเหตุการณ์สึนามิเมื่อปี 1983 เมื่อคำนวณการเคลื่อนตัวของเปลือกโลก และหาผลรวมของความสูงคลื่นจากฐานข้อมูลซึ่งสามารถทำได้บนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลภายในเวลาไม่กี่นาที และความสูงคลื่นกับเวลาที่คลื่นเดินทางนั้นให้ค่าที่ใกล้เคียงกับวิธีการคำนวณแบบดั้งเดิม ขั้นตอนการสร้างฐานข้อมูลแสดงในรูปที่ 18



รูปที่ 18 ขั้นตอนการสร้างฐานข้อมูลจากหน่วยสึนามิ (Lee และคณะ, 2005)

Fujii และ Satake (2006) ได้ทำการศึกษาลักษณะรอยเลื่อนของแหล่งกำเนิดสุมাত্রาสึนามิ 2004 โดยใช้วิธีการคำนวณย้อนกลับ (Inversion) จากข้อมูลจากสถานีวัดน้ำ (Tide gauge data) ในประเทศต่างๆ ในแถบมหาสมุทรอินเดียและจากข้อมูลภาพถ่ายจากดาวเทียม 3 ดวงซึ่งประกอบด้วยดาวเทียม Jason-1, TOPEX/Poseidon และ Envisat ตำแหน่งของสถานีวัดน้ำและวิถีการโคจรของดาวเทียมทั้ง 3 ดวงได้แสดงไว้ดังรูปที่ 19

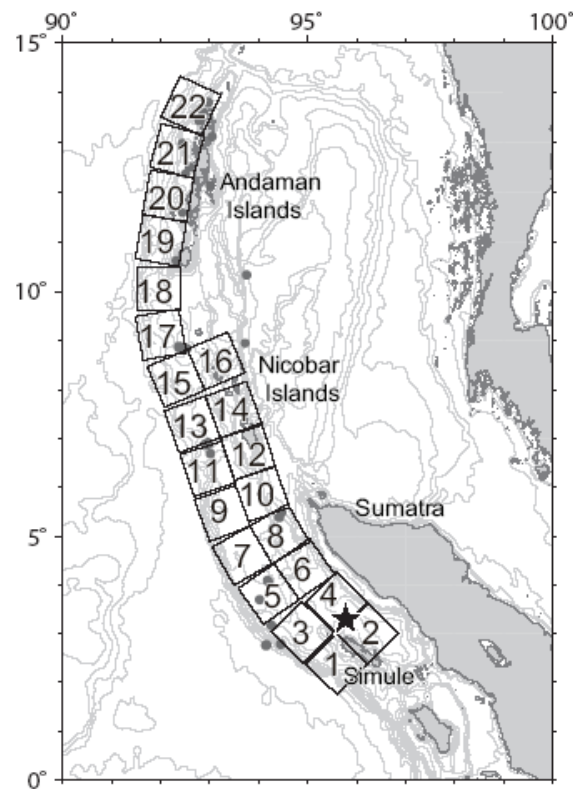


รูปที่ 19 ตำแหน่งของสถานีวัดน้ำและวิธีการโคจรของดาวเทียมที่ใช้ในการสอบเทียบแบบจำลอง (Fujii และ Satake, 2006)

ในการศึกษานี้ได้แบ่งรอยเลื่อนออกเป็น 22 รอยเลื่อนย่อย (Subfault) ที่วางตัวครอบคลุมพื้นที่ที่เกิดการสั่นสะเทือนที่ตามมาทีหลัง (Aftershock) หลังจากเกิดแผ่นดินไหว 1 วัน ดังแสดงในรูปที่ 20 ขนาดของแต่ละรอยเลื่อนย่อยกำหนดให้มีขนาดเท่ากันคือ 100 กม. x 100 กม. ซึ่งจะทำให้การแปรเปลี่ยนเฉพาะค่าการเคลื่อนตัวของแต่ละรอยเลื่อนย่อยแต่จะกำหนดค่ามุมเท (Dip angle) เท่ากับ 10 องศา โดยที่ค่ามุมเทนี้ได้มาจากการสำรวจลักษณะการเปลี่ยนแปลงของพื้นท้องน้ำ

ในการคำนวณย้อนกลับจากข้อมูลจากสถานีวัดน้ำได้กำหนดให้การยกตัวของผิวน้ำทะเล (Sea surface height) แปรผันเป็นแบบเส้นตรงกับลักษณะของคลื่นสึนามิ (Tsunami waveforms) ซึ่งสามารถคำนวณได้จากสมการการเคลื่อนตัวของแผ่นดินไหว (Coseismic displacement) และจากสมการการเคลื่อนที่ของคลื่นยาวแบบเชิงเส้น (Linear long wave propagation) สำหรับค่าการเคลื่อนตัวทำการคำนวณย้อนกลับโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least square method) ซึ่งไม่พิจารณาค่าการเคลื่อนตัวที่เป็นค่าลบในการศึกษานี้ให้รอยเลื่อนมีค่าความเร็วในการเคลื่อนตัวในแนวของรอยเลื่อนและมีระยะเวลาในการเคลื่อนตัวในแนวตั้ง จากผลการศึกษาโดยการหาค่าคลาดเคลื่อนที่น้อยที่สุดได้ผลดังตารางที่ 1 สำหรับค่าความเร็วในการจากการคำนวณย้อนกลับได้ตำแหน่งและค่าลักษณะของรอยเลื่อนย่อยต่างๆ ดังแสดงใน

สำหรับแบบจำลองที่ใช้ในการสอบเทียบใช้ข้อมูลลักษณะท้องน้ำจาก ETOPO2 ขนาดความกว้างของช่องกริด 2 ลิปดา ในบริเวณที่ใกล้ชายฝั่งได้เพิ่มความละเอียดขนาดความกว้างของช่อง กริดเป็น 24 พิลิปดา ขอบเขตในการคำนวณคือ 25°S ถึง 25°N และ 70°E ถึง 110°E ลำดับขั้นเวลา (Time step) ในการคำนวณ 2 วินาที จากผลการศึกษาได้ค่าที่เหมาะสมที่สุดของค่าความเร็วของการแพร่กระจายตัวในแนวรอยเลื่อน 1 กม./วินาที ค่าระยะเวลาที่รอยเลื่อนเคลื่อนตัวในแนวตั้ง 3 นาที และได้ค่าการเคลื่อนตัวของรอยเลื่อนย่อยดังแสดงในตารางที่ 3 สำหรับการสอบเทียบผลจากแบบจำลองกับข้อมูลจากสถานีวัดน้ำ และจากข้อมูลภาพถ่ายดาวเทียมได้แสดงไว้ในรูปที่ 21 และ รูปที่ 22



รูปที่ 20 หมายถึงและตำแหน่งของรอยเลื่อนย่อย (Fujii และ Satake, 2006)

ตารางที่ 1 ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการคำนวณจากการแปลงเปลี่ยนความเร็วการเคลื่อนตัวของรอยเลื่อน และระยะเวลาที่รอยเลื่อนใช้ในการยกตัว (Fujii และ Satake, 2006)

Vr (km/s)	Tide Gauge data			Satellite Altimeter data			TG+SA data		
	1 min	2 min	3 min	1 min	2 min	3 min	1 min	2 min	3 min
0.5	23.1	20.8	18.8	27.8	29.5	31.0	22.0	20.1	18.3
1.0	32.8	33.4	34.2	33.8	36.4	38.2	29.8	31.0	32.1
1.5	29.3	29.5	29.8	31.1	33.8	35.5	26.8	27.3	27.8
2.0	30.2	29.9	29.7	29.7	32.3	34.2	27.2	27.3	27.4
2.5	28.4	28.2	28.3	28.4	30.6	32.9	25.0	25.2	25.6
3.0	28.5	28.4	28.5	27.4	29.7	31.9	24.9	25.2	25.6

ตารางที่ 2 ค่ามุมต่างๆ, ตำแหน่งและความลึกของรอยเลื่อนย่อย (Fujii และ Satake, 2006)

No.	Strike (°)	Dip (°)	Rake (°)	Lat. (°N)	Lon. (°E)	Depth (km)
1	315	10	95	1.75	95.60	3
2	315	10	95	2.38	96.23	20
3	315	10	95	2.40	94.90	3
4	315	10	95	3.00	95.60	20
5	325	10	100	3.20	94.10	3
6	325	10	100	3.71	94.83	20
7	330	10	105	4.00	93.50	3
8	330	10	105	4.44	94.27	20
9	340	10	105	4.90	93.00	3
10	340	10	105	5.30	93.80	20
11	342	10	100	5.82	92.68	3
12	342	10	100	6.15	93.50	20
13	340	10	95	6.72	92.38	3
14	340	10	95	7.02	93.22	20
15	337	10	85	7.64	92.08	3
16	337	10	85	8.00	92.90	20
17	350	10	99	8.60	91.64	3
18	0	10	106	9.60	91.51	3
19	10	10	115	10.66	91.48	3
20	10	10	115	11.56	91.63	3
21	15	10	120	12.51	91.78	3
22	25	10	130	13.51	92.01	3

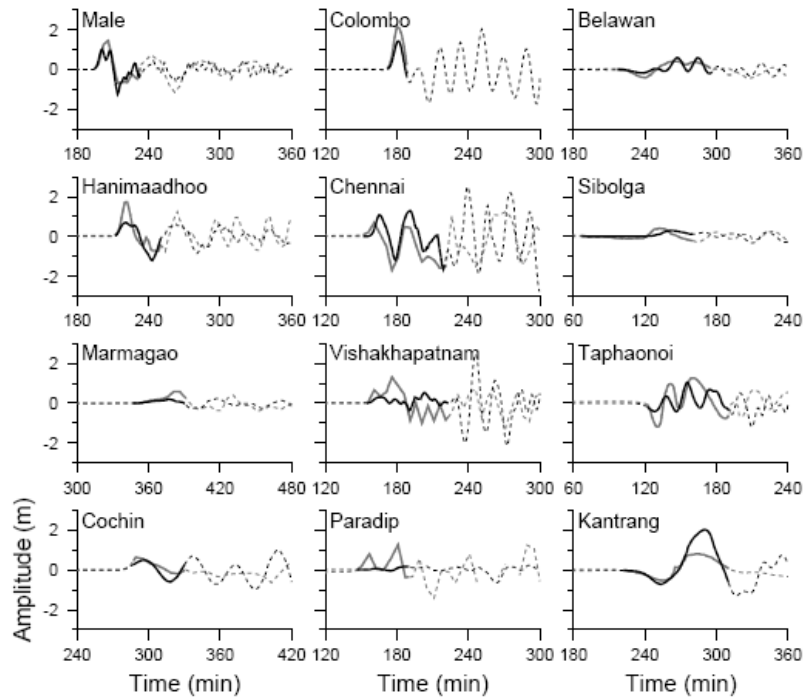
Length and width are 100 km for each subfault.

Locations (Lat., Lon., and Depth) indicates the left bottom corner of each subfault.

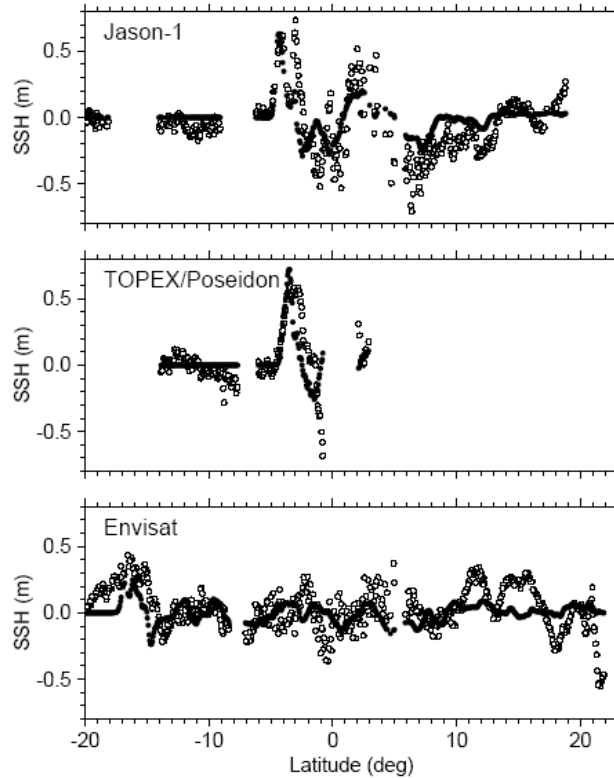
ตารางที่ 3 ค่าการเคลื่อนตัวของรอยเลื่อนย่อยที่ค่าความเร็วการเคลื่อนตัวของรอยเลื่อนต่างๆ (Fujii และ Satake, 2006)

No.	Tide Gauge data			Satellite Altimeter data			TG+SA data		
	1.0 km/s	1.5 km/s	2.0 km/s	1.0 km/s	1.5 km/s	2.0 km/s	1.0 km/s	1.5 km/s	2.0 km/s
1	0.0±0.2	0.0±1.3	1.1±10.5	10.4±4.9	10.4±5.0	8.0±4.2	0.0±0.2	0.0±0.4	0.0±1.4
2	0.0±0.3	1.9±1.2	8.5±4.5	0.0±1.7	0.0±0.0	0.0±0.0	4.3±2.2	15.8±7.8	19.6±16.6
3	30.3±15.5	25.4±11.6	20.8±9.2	1.0±0.6	1.2±0.6	3.6±1.6	24.6±13.7	18.6±10.3	16.4±7.0
4	0.0±0.0	0.0±0.0	0.0±0.0	2.5±1.1	0.7±0.3	1.3±0.6	0.0±0.0	0.0±0.0	0.0±0.0
5	24.6±10.0	25.5±11.0	25.4±9.1	30.2±13.7	27.4±16.3	24.3±12.6	24.6±9.8	26.6±11.5	25.5±10.2
6	7.4±3.5	0.6±0.4	0.0±1.0	30.2±15.4	35.0±16.5	32.2±16.0	12.3±5.5	7.1±3.2	3.9±3.8
7	13.2±5.9	16.6±6.3	17.5±7.8	19.7±15.7	15.8±7.4	18.1±13.1	12.8±7.6	15.7±7.0	16.8±8.0
8	1.7±1.4	6.8±3.4	4.9±2.3	0.5±0.8	3.0±7.1	6.4±7.4	1.8±2.8	6.0±3.2	4.7±2.3
9	1.6±1.2	0.0±0.3	0.7±0.2	15.4±6.6	18.1±8.3	17.5±6.7	1.9±3.9	0.0±0.4	0.8±0.4
10	4.2±1.8	2.4±1.6	2.6±1.4	8.0±4.1	11.3±4.8	11.5±5.1	4.5±2.0	3.0±1.3	3.3±1.7
11	6.2±3.2	0.8±0.8	0.0±0.5	14.9±6.6	8.7±4.6	9.8±4.6	6.0±3.3	1.0±1.1	0.0±0.5
12	3.9±4.1	3.3±3.5	3.2±3.6	0.0±0.2	0.0±1.0	0.7±0.5	3.2±3.7	3.2±3.7	2.7±3.4
13	6.6±2.8	2.8±2.1	0.0±0.7	7.4±3.5	7.2±3.5	8.6±4.3	6.5±2.6	2.4±1.1	0.0±0.5
14	0.0±0.2	0.8±2.4	1.2±2.1	0.0±0.0	0.0±0.5	0.0±0.2	0.0±0.0	0.1±0.2	0.9±2.2
15	6.5±3.0	3.1±3.3	0.0±0.5	12.7±5.7	5.7±2.3	8.3±3.6	7.1±2.9	3.6±1.2	0.2±0.2
16	2.8±2.2	3.5±1.4	2.5±1.7	8.0±3.8	14.2±6.4	16.2±7.4	3.5±3.5	4.1±1.4	2.7±1.6
17	3.0±1.8	0.0±0.3	0.0±0.0	6.1±3.1	12.4±5.1	11.0±4.7	3.2±1.9	0.0±0.0	0.0±0.0
18	2.5±1.5	4.2±2.7	3.9±2.0	0.0±0.4	4.6±2.5	5.2±2.8	2.7±1.9	4.3±2.5	4.0±2.2
19	0.1±0.2	1.6±1.1	1.8±1.0	0.0±0.4	0.0±1.0	0.0±0.0	0.0±0.3	1.7±1.0	1.8±1.0
20	0.0±0.7	0.0±0.0	0.0±0.0	10.4±5.2	0.0±0.7	0.0±1.6	0.0±0.3	0.0±0.0	0.0±0.0
21	0.0±0.2	0.0±0.1	0.0±0.3	0.0±0.6	0.0±0.0	0.0±0.3	0.0±0.1	0.0±0.1	0.0±0.4
22	0.7±0.3	2.2±1.0	2.5±1.2	13.3±6.4	9.7±5.0	7.1±4.1	1.0±0.4	2.3±1.1	2.6±1.3
<i>M<sub>w</sub></i>	9.3	9.2	9.3	9.1	9.1	9.1	9.1	9.1	9.1
VR (%)	38.2	35.5	34.2	34.2	29.8	29.7	32.1	27.8	27.4

*M<sub>w</sub>*: Moment magnitude  
 VR: Variance reduction

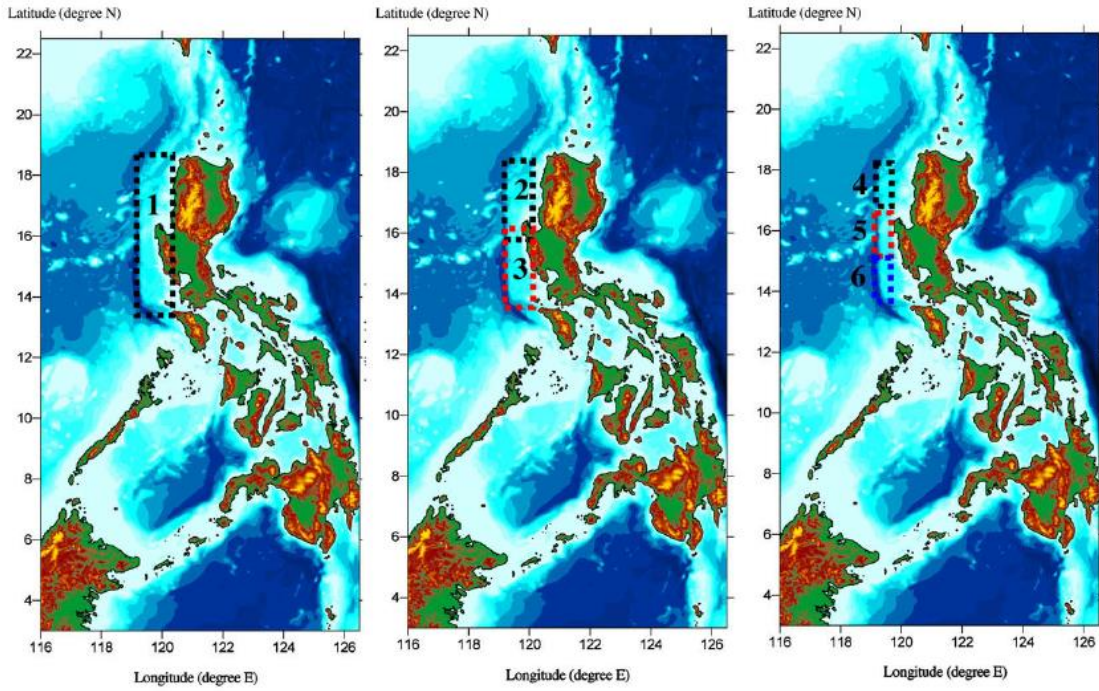


รูปที่ 21 ผลการสอบเทียบแบบจำลองกับข้อมูลจากสถานีวัดน้ำ (Fujii และ Satake, 2006)



รูปที่ 22 ผลการสอบเทียบแบบจำลองกับข้อมูลภาพถ่ายดาวเทียม (Fujii และ Satake, 2006)

Ruangrassamee และ Saelem (2009) ได้ทำการศึกษาผลของสึนามิในบริเวณอ่าวไทย ตลอดแนวชายฝั่งด้านตะวันออกของประเทศไทย รวมไปถึงโครงสร้างกลางทะเลที่อาจจะได้รับผลกระทบในอ่าวไทย เนื่องจากรอยเลื่อนที่มะนิลา ประเทศฟิลิปปินส์ การศึกษาได้จำลองสึนามิจากรอยเลื่อนรวม 6 กรณี ที่มีแผ่นดินไหวขนาด 8.0, 8.5 และ 9.0 ดังแสดงในรูปที่ 23 แบบจำลองใช้ทฤษฎีคลื่นน้ำตื้นเชิงเส้นในพิกัดทรงกลมในพื้นที่ทะเลจีนใต้ และใช้ทฤษฎีคลื่นน้ำตื้นไม่เชิงเส้นในพิกัดฉากในพื้นที่อ่าวไทย จากผลการศึกษาพบว่าคลื่นลูกแรกที่เดินทางมาถึงภาคใต้ของประเทศไทยจะใช้เวลาเดินทาง 13 ชั่วโมงหลังจากการเกิดแผ่นดินไหว และจะใช้เวลาเดินทางถึงกรุงเทพฯ 19 ชั่วโมง หลังการเกิดแผ่นดินไหว ดังแสดงในรูปที่ 24

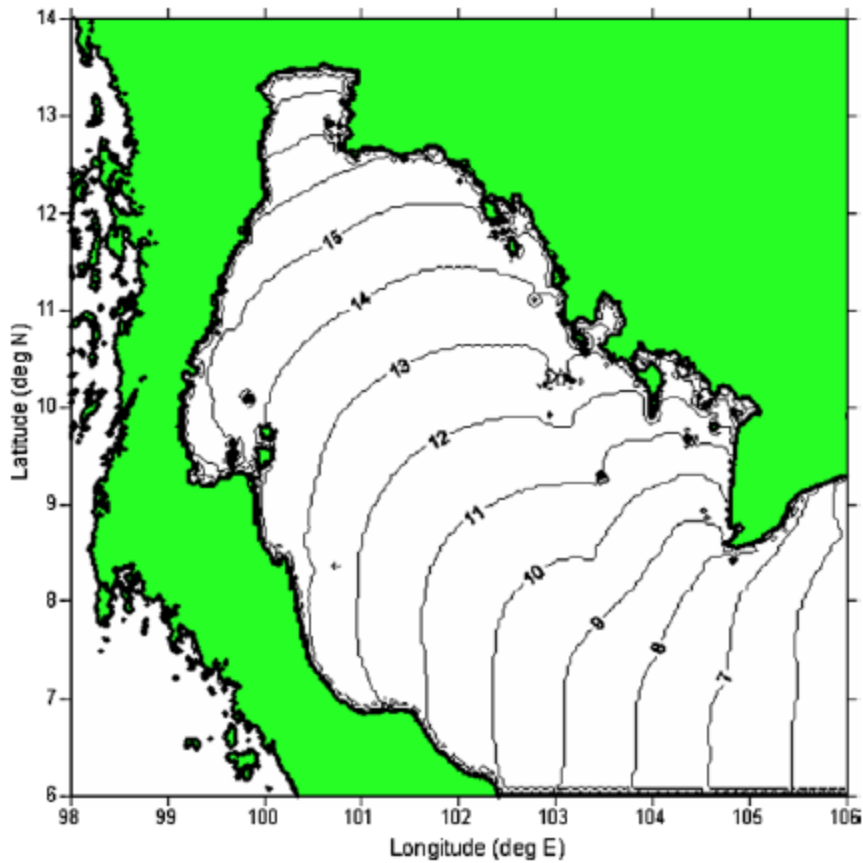


(ก) Mw 9.0

(ข) Mw 8.5

(ค) Mw 8.0

รูปที่ 23 รอยเลื่อนที่ใช้สำหรับการจำลองสึนามิทั้ง 6 กรณี (Ruangrassame และ Saelem, 2009)



รูปที่ 24 เส้นแสดงเวลาเดินทางของสึนามิบริเวณอ่าวไทยเนื่องจากแผ่นดินไหวขนาด 9.0 หน่วยเป็นชั่วโมง (Ruangrassame และ Saelem, 2009)