บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยเรื่อง การพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้า เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์
    - 1.1 ความหมายและความสำคัญของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์
    - 1.2 ลักษณะของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์
    - 1.3 พัฒนาการของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์
    - 1.4 ขั้นตอนของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์
2. การคิดเชิงคณิตศาสตร์
    - 2.1 ความหมายและความสำคัญของการคิดเชิงคณิตศาสตร์
    - 2.2 องค์ประกอบการคิดเชิงคณิตศาสตร์
    - 2.3 วิธีการศึกษาการคิดเชิงคณิตศาสตร์
    - 2.4 แนวทางการพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์
    - 2.5 แนวทางการวัดและการประเมินผลการคิดเชิงคณิตศาสตร์
3. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
    - 3.1 งานวิจัยต่างประเทศ
    - 3.2 งานวิจัยในประเทศไทย

1. กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

1.1 ความหมายและความสำคัญของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์มาจากภาษาอังกฤษว่า Mathematizing Process ซึ่งได้มีนักการศึกษาได้ให้ความหมายของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ ดังนี้

Greer (อ้างถึงใน Grigoras, 2008: Online) ได้กล่าวถึงกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ไว้ว่าเป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นในขณะที่สร้างแบบจำลองสถานการณ์ในชีวิตจริง เช่น การแก้โจทย์ปัญหาด้วยวิธีการทางคณิตศาสตร์ เป็นการสร้างแบบจำลองสามารถมองผ่านการเชื่อมโยง 2 ด้าน ได้แก่ ด้านคณิตศาสตร์ และด้านชีวิตจริง และการพัฒนาโครงสร้างความรู้ตามรูปแบบนามธรรม

Freudenthal (อ้างถึงใน Grigoras,2008: Online) ได้กล่าวถึงกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ไว้ว่า เป็นกิจกรรมของมนุษย์ที่ประกอบด้วย การจัดระบบความคิดจากสถานการณ์ชีวิตจริงหรือสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์

Grigoras (2008: Oline) ได้กล่าวถึงกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ ไว้ว่า กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เป็นกิจกรรมของการสังเกต การกำหนดโครงสร้างความรู้ และการตีความชีวิตจริงด้วยวิธีการของตัวแบบทางคณิตศาสตร์

Organisation For Economic Co-Operation And Development (OECD,1999: 45) ได้กล่าวถึง กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ ไว้ว่า กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ คือการรับรู้และการดึงคณิตศาสตร์ที่ฝังอยู่ในสถานการณ์และการใช้คณิตศาสตร์เพื่อการแก้ปัญหา โดยใช้การวิเคราะห์ การตีความ พัฒนารูปแบบและกลยุทธ์ของตัวนักเรียนเองและนำเสนอข้อโต้แย้งทางคณิตศาสตร์รวมทั้งการพิสูจน์และการวางนัยทั่วไป

จากการศึกษาความหมายของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ตามที่นักการศึกษาได้กล่าวไว้ทำให้สรุปได้ว่า กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการคิดโดยการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์จากสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริงไปสู่ปัญหาทางคณิตศาสตร์และแก้ปัญหานั้นด้วยวิธีการทางคณิตศาสตร์ เพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบและนำคำตอบนั้นย้อนกลับไปตอบปัญหาในชีวิตจริง

นอกจากนี้ Freudenthal กล่าวว่า การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการหลักที่สำคัญของการศึกษาคณิตศาสตร์ด้วยเหตุผล 2 ประการ (Gravemeijer, 1997: 321-322) คือ

ประการที่หนึ่ง การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์นอกจากจะเป็นกิจกรรมหลักที่สำคัญของนักคณิตศาสตร์แล้ว การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ยังทำให้นักเรียนเกิดความคุ้นเคยกับวิธีการทางคณิตศาสตร์ในสถานการณ์ที่พบในชีวิตประจำวัน เช่น กิจกรรมทางคณิตศาสตร์ในการมองหาปัญหา นำไปสู่เจตคติทางคณิตศาสตร์ ทำให้รู้ถึงความเป็นไปได้และข้อจำกัดของวิธีการทางคณิตศาสตร์ และรู้ว่าสถานการณ์ใดมีความเหมาะสมในการนำวิธีการทางคณิตศาสตร์ไปใช้ และสถานการณ์ใดไม่เหมาะสม

ประการที่สอง เกี่ยวข้องกับการคิดค้นคณิตศาสตร์ ขั้นตอนสุดท้ายในคณิตศาสตร์เป็นการสร้างความเป็นแบบแผนโดยการสร้างสัจพจน์(axiomatising) ซึ่งขั้นตอนสุดท้ายนี้ไม่ควรเป็นจุดเริ่มต้นในการสอนคณิตศาสตร์ เนื่องจาก Freudenthal มองว่าการเริ่มต้นจากสัจพจน์ สวนทางกับกระบวนการที่นักคณิตศาสตร์ได้มาซึ่งข้อสรุป การจัดการศึกษาคณิตศาสตร์ควรใช้กระบวนการคิดค้นคณิตศาสตร์แบบได้รับคำแนะนำ (guided revientionn) ซึ่งนักเรียนจะได้รับประสบการณ์ เช่นเดียวกับกระบวนการที่นักคณิตศาสตร์ได้คิดค้นคณิตศาสตร์ขึ้นมา

จากความสำคัญของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ข้างต้น สรุปได้ว่ากระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์มีความสำคัญในแง่ของการเป็นเป้าหมายหลักของการศึกษาคณิตศาสตร์ อีกทั้งยังทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้การนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตจริง และยังสร้างคุณลักษณะของการเป็นนักคณิตศาสตร์ให้นักเรียนอีกทางหนึ่ง

1.2 ลักษณะของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ถูกจำแนกเป็นลักษณะต่าง ๆ โดยนักการศึกษาหลายท่าน ดังนี้

Treffer (อ้างถึงใน Van den Heuvel-Panhuizen, 2000: 4; 2003: 12) ได้แบ่งลักษณะของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ลักษณะ ดังนี้

1. การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวราบ (horizontal mathematization) เป็นกระบวนการที่นักเรียนใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์มาช่วยในการจัดการและแก้ปัญหาในสถานการณ์ในชีวิตจริง

2. การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวตั้ง (Vertical mathematization) เป็นกระบวนการสร้างความรู้(reorganization) ภายในระบบเชิงคณิตศาสตร์ เช่น การค้นหาวิธีลัดหรือค้นพบความเชื่อมโยงระหว่างมโนทัศน์และยุทธวิธี จากนั้นก็ประยุกต์ใช้ข้อค้นพบเหล่านั้น

Freudenthal (อ้างถึงใน Grigoras, 2008: Online) ได้แบ่งลักษณะของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ลักษณะ ได้แก่

1. การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวราบ (horizontal mathematization) เป็นกระบวนการนำโลกในชีวิตจริงไปสู่โลกของสัญลักษณ์

2. การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวตั้ง (Vertical mathematization) เป็นกระบวนการที่เคลื่อนย้ายภายในโลกสัญลักษณ์

OECD (1999: 47) ได้แบ่งลักษณะของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ลักษณะ ได้แก่

1. การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวราบ (horizontal mathematization) เป็นกระบวนการของการแปลงโลกจริง ไปสู่โลกทางคณิตศาสตร์

2. การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวตั้ง (Vertical mathematization) เป็นกระบวนการการทำงานบนปัญหาภายใต้โลกทางคณิตศาสตร์และใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์เพื่อแก้ปัญหาและนำคำตอบนั้นสะท้อนกลับไปในปัญหาเดิม

จากลักษณะของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ข้างต้น สรุปได้ว่า กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ประกอบด้วย 2 ลักษณะ ได้แก่ 1) การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวราบ(horizontal mathematization) โดยเป็นกระบวนการแปลงปัญหาในชีวิตจริงให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ และ 2) การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวตั้ง (Vertical mathematization) เป็นกระบวนการใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาภายในปัญหาทางคณิตศาสตร์และนำคำตอบนั้นกลับไปตอบในปัญหาชีวิตจริง

1.3 พัฒนาการของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

ผู้วิจัยได้ศึกษาเกี่ยวกับกระบวนคิดให้เป็นคณิตศาสตร์จากตำรา เอกสาร และงานวิจัยต่างๆ ซึ่งได้รวบรวมข้อมูลที่เกี่ยวกับกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ พัฒนาการของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

กว่า 40 ปีผ่านมา Freudenthal ได้กำหนดปัญหาที่ต้องการเชื่อมโยงระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์และสิ่งต่าง ๆ ที่อยู่ในชีวิตจริง สถาบัน Freudenthal จึงได้พัฒนากรอบทฤษฎีของแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงกับชีวิตจริง (Realistic Mathematics Education: RME) ซึ่งมีพื้นฐาน

มาจากแนวคิดของ Freudenthal ที่ว่าคณิตศาสตร์จะต้องถูกเชื่อมโยงในชีวิตจริง ซึ่งการใช้บริบทในชีวิตจริงกลายเป็นลักษณะหนึ่งของแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงกับ ชีวิตจริง โดย Freudenthal มองว่า คณิตศาสตร์ไม่ได้เป็นเพียงแค่ความรู้ทางคณิตศาสตร์เท่านั้น แต่คณิตศาสตร์เป็นกิจกรรมของการสร้างสถานการณ์จากชีวิตจริง หรือสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งกิจกรรมนี้เรียกว่า การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (mathematizing) โดยการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เป็นลักษณะที่สำคัญของแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงกับชีวิตจริง และบริบทในชีวิตจริงเป็นสิ่งที่ก่อให้เกิดการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (Shipulina, Liljedahl and Smith, 2012: Online) Treffers (1978, 1987 อ้างถึงใน Van den Heuvel-Panhuizen, 2000 4; 2003: 12) ได้สร้างแนวคิดของการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์โดยแบ่งการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ลักษณะ ได้แก่ การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวราบ การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวตั้ง

De Lang (1996: 68-70) ได้กำหนดการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ ในวิถีทางที่แตกต่างออกไป โดย De Lang มองว่าการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์นั้นเป็นแบบจำลอง (Modelling) ไม่ได้เป็นเพียงแค่ส่วนหนึ่งในแบบจำลองซึ่ง De Lang ได้อธิบายถึง กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เชิงมโนทัศน์ (Conceptual mathematization process) ประกอบด้วย 2 องค์ประกอบตามที่ Treffer และ Goffree (1985) ได้จำแนกไว้ ได้แก่ การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวราบ และการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวตั้ง โดย De Lang ได้ระบุเป้าหมายของการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวราบนั้นเป็นการแปลงปัญหาไปยังปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่กำหนดไว้ผ่านโครงสร้างความรู้ (schematizing) และการมองภาพ (visualizing) เพื่อพยายามค้นหากฎและความสัมพันธ์ซึ่งเป็นสิ่งจำเป็นสำหรับการระบุคณิตศาสตร์ในบริบททั่วไป

กิจกรรมที่เป็นองค์ประกอบการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวราบ ประกอบด้วย

- การระบุคณิตศาสตร์ในบริบททั่วไป
- โครงสร้างความรู้
- การใช้สูตรและการนึกภาพปัญหาในวิธีการที่แตกต่าง
- การค้นพบความสัมพันธ์
- การค้นพบกฎ
- การแปลงปัญหาในชีวิตจริงไปเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์
- การแปลงปัญหาในชีวิตจริงไปเป็นตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่รู้จัก

กิจกรรมที่เป็นองค์ประกอบการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวตั้งที่เข้มข้น ประกอบด้วย

- แสดงแทนความสัมพันธ์ในรูปแบบของสูตร
- พิสูจน์กฎ
- การปรับแต่งและปรับแบบจำลอง
- การใช้แบบจำลองที่แตกต่างกัน
- การบูรณาการและการรวมตัวแบบ
- การสร้างมโนทัศน์ใหม่ทางคณิตศาสตร์
- กระบวนการวางนัยทั่วไป

OECD (1999: 46) ได้กล่าวถึง การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เป็นองค์ประกอบของการเข้าใจชีวิตจริงผ่านการใช้แนวคิดและมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เป็นการสร้างกิจกรรมที่ได้มาซึ่งทักษะและความรู้จากการค้นพบกฎ โครงสร้างความรู้และความสัมพันธ์ที่ไม่รู้กระบวนการนี้เรียกว่า การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวนอน โดยการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวนอน ประกอบกิจกรรมดังต่อไปนี้

- การระบุเจาะจงคณิตศาสตร์ในบริบททั่วไป
- โครงสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์
- การใช้สูตรแสดงและการนึกภาพปัญหา
- การค้นพบความสัมพันธ์และกฎ
- การนึกถึงปัญหาที่คล้ายกัน

และเมื่อปัญหามีการเปลี่ยนไปเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ จะสามารถแก้ปัญหาด้วยเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ นั่นคือ เครื่องมือทางคณิตศาสตร์ดังกล่าวสามารถประยุกต์ใช้เพื่อจัดกระทำและทำให้กลายเป็นตัวแบบทางคณิตศาสตร์จากปัญหาในชีวิตจริง กระบวนการนี้เรียกว่าการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แนวตั้ง และสามารถยอมรับตามกิจกิจกรรมต่อไปนี้

- การแสดงแทนความสัมพันธ์ด้วยความหมายของสูตร
- การพิสูจน์กฎ
- การปรับแต่งและปรับแบบจำลอง
- การบูรณาการและการรวมตัวแบบ
- กระบวนการวางนัยทั่วไป

OECD (2009a: 158-159) ได้เสนอกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (Mathematizing Process) ซึ่งเป็นกระบวนการคิดจากสถานการณ์จริงสู่สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ OECD ได้นำเสนอกระบวนการนี้เป็นกระบวนการแก้ปัญหาในชีวิตจริง โดยกำหนดไว้เป็น 5 ลักษณะ ดังนี้

1. เริ่มด้วยปัญหาที่มีอยู่ในชีวิตจริง

2. จัดให้อยู่ในรูปแบบตามแนวคิดทางคณิตศาสตร์และระบุคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

3. ค่อยๆตัดข้อเท็จจริงที่เป็นปัญหาในชีวิตจริงออกไป ผ่านกระบวนการสร้างสมมุติฐาน การวางนัยทั่วไป และการทำให้เป็นแบบแผน ที่ส่งเสริมลักษณะทางคณิตศาสตร์ของสถานการณ์ และแปลงปัญหาในชีวิตจริงให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์

4. แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

5. สร้างความสมเหตุสมผลของคำตอบทางคณิตศาสตร์ในส่วนปัญหาในชีวิตจริง รวมทั้งการระบุข้อจำกัดของการแก้ปัญหา

1.4 ขั้นตอนของกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

เนื่องจาก PISA ต้องการตรวจสอบความสามารถของนักเรียนในด้านการแก้ปัญหา ซึ่งครอบคลุมการวิเคราะห์ การใช้เหตุผล และการสื่อสารแนวคิดทางคณิตศาสตร์อย่างมีประสิทธิภาพ ในการแก้ปัญหานั้น นักเรียนจะต้องใช้กระบวนการ ความรู้และทักษะคณิตศาสตร์ ทั้งที่เรียนมาในโรงเรียนและจากประสบการณ์ชีวิต สำหรับการประเมินผลของ PISA จะเรียกกระบวนการพื้นฐานที่นักเรียนใช้แก้ปัญหาที่ปรากฏในชีวิตจริงว่า กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (OECD, 2009b: 105) จึงได้เสนอขั้นของกระบวนการดังนี้

ขั้นที่ 1 เริ่มด้วยปัญหาในชีวิตจริง ขั้นนี้เป็นการแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ กระบวนการนี้เกี่ยวข้องกับการระบุแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหานั้น แสดงปัญหาในรูปที่แตกต่างไป ตลอดจนระบุข้อตกลงเบื้องต้นที่สอดคล้องเหมาะสมกับปัญหา

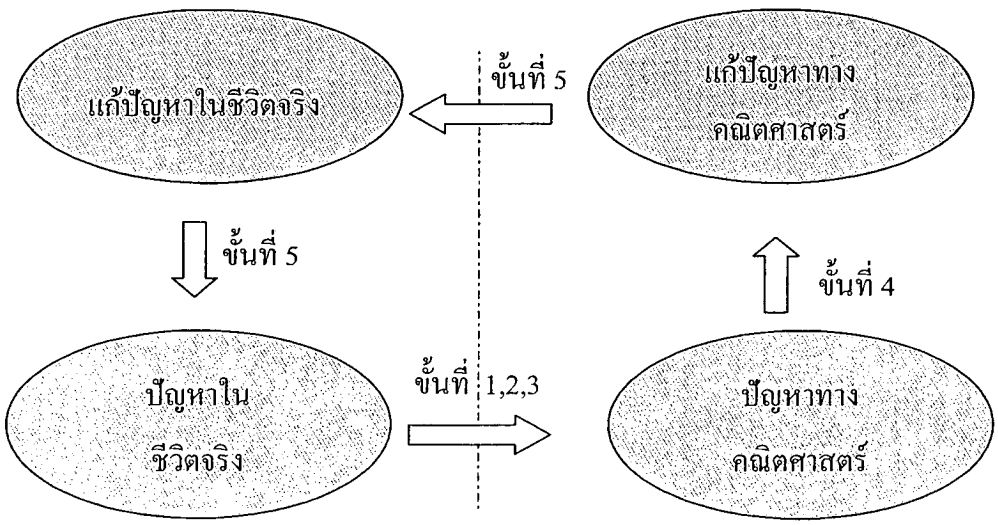
ขั้นที่ 2 จัดให้อยู่ในรูปแบบตามแนวคิดทางคณิตศาสตร์ โดยเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างภาษาของปัญหาในชีวิตจริงกับภาษา สัญลักษณ์ กฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ ทำให้เข้าใจปัญหานั้นในเชิงคณิตศาสตร์ มองหารูปแบบ ความสัมพันธ์และแบบรูปทางคณิตศาสตร์ จึงเป็นการมองหาลักษณะของปัญหาในเชิงคณิตศาสตร์

ขั้นที่ 3 ค่อยๆ ตัดข้อเท็จจริงที่เป็นปัญหาในชีวิตจริงออกไปก่อน เป็นการนำคณิตศาสตร์เข้ามาเชื่อมโยงกับปัญหา เช่น การสร้างข้อตกลงเบื้องต้น รวมทั้งการทำให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ การลงข้อสรุปและแปลงปัญหาให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์

ขั้นที่ 4 แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอนนี้เป็นการใช้และการแสดงแทนเปลี่ยนกลับไปมา การใช้สัญลักษณ์ กฎ ภาษาเฉพาะทาง และการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ใช้หรือปรับ

ตัวแบบทางคณิตศาสตร์ ผสมผสานและบูรณาการตัวแบบ ให้ความเห็นสนับสนุนโต้แย้ง รวมทั้งสรุปการแก้ปัญหา

ขั้นที่ 5 แปลผลจากการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้กลับไปเป็นปัญหาในชีวิตจริง รวมถึงการระบุข้อจำกัดของการแก้ปัญหานั้น ๆ ขั้นนี้นักเรียนต้องเข้าใจว่าคณิตศาสตร์ทำได้แค่ไหน และมีข้อจำกัดอย่างไร และอภิปราย โต้แย้ง และหาคำอธิบายถึงความใช้ได้ของผลการแก้ปัญหามีการสื่อสารทั้งกระบวนการคิดและผลที่ได้ รวมทั้งวิพากษ์ตัวแบบและข้อจำกัดการใช้ตัวแบบ ดังที่แสดงดังภาพที่ 1 ดังนี้



ภาพที่ 1 กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่ากระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย 5 ขั้นตอน คือ 1) ขั้นเสนอปัญหาในชีวิตจริง เป็นการแปลงปัญหาในชีวิตจริงให้เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ มีการระบุแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหานั้น แสดงปัญหาในรูปที่แตกต่างไป และระบุข้อตกลงเบื้องต้นที่สอดคล้องเหมาะสมกับปัญหา 2) ขั้นมองปัญหาในเชิงคณิตศาสตร์ เป็นการจัดการกับปัญหาให้อยู่ในรูปแบบตามแนวคิดทางคณิตศาสตร์โดยให้นักเรียนทำความเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างภาษาของปัญหาในชีวิตจริงกับภาษา สัญลักษณ์ และกฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ตลอดจนพยายามค้นหาความสัมพันธ์และแบบรูปทางคณิตศาสตร์จากปัญหา จึงเป็นการพิจารณาลักษณะของปัญหานั้นในเชิงคณิตศาสตร์ 3) ขั้นแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นการค่อยๆ ตัดข้อเท็จจริงที่เป็นปัญหาในชีวิตจริงออกไป โดยให้นักเรียนนำแนวคิดทางคณิตศาสตร์เข้ามาเชื่อมโยงกับปัญหา ซึ่งอาจมีการสร้างข้อตกลงเบื้องต้นและหาข้อสรุปเพื่อแปลงปัญหาให้เป็น

โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ จึงเป็นการมองปัญหาในรูปคณิตศาสตร์ล้วน ๆ เพื่อสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ 4) ขั้นแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นการใช้สัญลักษณ์ กฎเกณฑ์ ภาษาและวิธีการทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา มีการปรับตัวแบบทางคณิตศาสตร์ให้เหมาะสมกับปัญหาจนได้คำตอบของปัญหา 5) ขั้นสะท้อนคิด เป็นการแปลผลจากการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์กลับไปสู่ปัญหาในสถานการณ์ของชีวิตจริง รวมถึงการระบุข้อจำกัดของการแก้ปัญหานั้น ๆ โดยให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายและวิเคราะห์ถึงผลที่ได้และข้อจำกัดจากการใช้แนวคิดทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา รวมถึงมีการวิเคราะห์ความสมเหตุสมผลของตัวแบบที่ใช้ในการแก้ปัญหา

2. การคิดเชิงคณิตศาสตร์

2.1 ความหมายและความสำคัญของการคิดเชิงคณิตศาสตร์

การคิดเชิงคณิตศาสตร์มาจากภาษาอังกฤษว่า mathematical thinking ซึ่งได้มีนักการศึกษาได้ให้ความหมายของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ดังนี้

Greenwood (1993) ได้กล่าวว่า การคิดเชิงคณิตศาสตร์ว่าเป็นความสามารถในการเข้าใจแบบรูป หาสถานการณ์ร่วมของปัญหา ระบุข้อผิดพลาด และการสร้างยุทธวิธีใหม่ การคิดเชิงคณิตศาสตร์ทำให้เกิดวิธีการเชิงระบบสำหรับปัญหาเชิงปริมาณที่เป็นผลของการเรียนรู้และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ เป็นการเน้นการเรียนรู้มากกว่าการมุ่งเพียงผลลัพธ์หรือคำตอบ และกล่าวย้ำว่า ถ้าสนับสนุนจุดเน้นนี้ให้เกิดขึ้นในการเรียนคณิตศาสตร์จะเป็นประโยชน์ ไม่เพียงแต่การเรียนรู้ในเนื้อหาวิชาเท่านั้น แต่จะเกิดความสามารถในการคิดและให้เหตุผลในตัวนักเรียนด้วย

Henderson et al. (2001: 1) ได้เสนอนิยามทั่วๆ ไปของ "การคิดทางคณิตศาสตร์" ว่าเป็นการใช้เทคนิคทางคณิตศาสตร์ ความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ และกระบวนการทางคณิตศาสตร์อย่างใดอย่างหนึ่งที่แสดงออกมาอย่างชัดเจน หรือแสดงออกมาเป็นนัย ในการหาคำตอบของปัญหา

Lutfiyya (1998: 55-56) กล่าวว่า การคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่รวมถึงการใช้ทักษะการคิดเชิงคณิตศาสตร์อย่างชาญฉลาด เพื่อที่จะนำไปสู่ความเข้าใจในแนวคิดนั้น ๆ ซึ่งจะต้องอาศัยการค้นพบความสัมพันธ์ที่อยู่ระหว่างแนวคิดนั้น ๆ อาจจะเป็นภาพหรือการได้รับการสนับสนุนจากเงื่อนไขที่เกี่ยวกับแนวคิดและความสัมพันธ์เหล่านั้น และการแก้ปัญหาที่รวมถึงแนวคิดนั้นๆ

Manouchehri (2005: Online) กล่าวว่าการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เป็นการใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์เพื่อทำความเข้าใจสิ่งต่างๆ รอบตัว กระบวนการทำความเข้าใจนี้ไม่ใช่คณิตศาสตร์แต่เป็นการคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ และการดำเนินการเพื่อให้ได้คำตอบเป็นการดำเนินการทาง

คณิตศาสตร์ เครื่องมือทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่เป็นนามธรรม เป็นสัญลักษณ์ การนำเสนอตัวแทนความคิด และการดำเนินการทางสัญลักษณ์ ซึ่งเครื่องมือทางการคิดเชิงคณิตศาสตร์ประกอบด้วย การแก้ปัญหา การนำเสนอตัวแทนความคิด และการให้เหตุผล

Mason, et al. (1994: 158) ได้ให้ความหมายของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ไว้ว่าเป็นกระบวนการคิดที่ดำเนินไปเป็นพลวัต ซึ่งจะช่วยให้เราสามารถจัดการสิ่งที่มีความซับซ้อนและขยายความเข้าใจของเราได้

O'Daffer and Thornquist. (1993: 43) ได้ให้ความหมายเกี่ยวกับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ว่าหมายถึงการใช้ทักษะทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่หลากหลายในการทำความเข้าใจแนวคิด ค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างแนวคิด สร้างข้อสรุปหรือสนับสนุนข้อสรุปเกี่ยวกับแนวคิดและความสัมพันธ์ของแนวคิดและแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับแนวคิดนั้น

พิเชาวน์ องค์อนุรักษ์ (2552: 24) ได้ให้ความหมาย "การคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียน" หมายถึง ผลิตผล (product) ที่เกิดขึ้นจากแนวคิดทางคณิตศาสตร์และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ (mathematical ideas and processes) ของนักเรียน (Bishop, 2007) ซึ่งนักเรียนจะแสดงออกในรูปแบบของยุทธวิธี หรือวิธีคิด หรือวิธีการต่างๆ ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ผ่านภาษาพูด การวาดเขียน หรือการแสดงอิริยาบถต่างๆที่เกี่ยวข้องกัน ตามสมมติฐานที่เชื่อว่าสิ่งที่มนุษย์พูดในระหว่างการแก้ปัญหาจะใกล้เคียงกับการคิดของคนๆ นั้นในขณะนั้นมากที่สุด (Schoenfeld, 1985 อ้างถึงในไมตรี อินทร์ประสิทธิ์, 2546)

รุ่งทิวา นาบำรุง (2550: 6) ได้ให้ความหมายไว้ว่า การคิดเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Thinking) เป็นวิธีการคิดของบุคคลทางด้านคณิตศาสตร์ การคิดแก้ปัญหาเกี่ยวกับปริมาณหรือจำนวน การให้เหตุผล โดยการใช้ความรู้ ทักษะและวิธีการที่หลากหลายทางคณิตศาสตร์ ในการทำความเข้าใจ ค้นหาคำตอบของปัญหาที่ไม่คุ้นเคย สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ให้บุคคลอื่นรับรู้ได้ โดยวัดจากการแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความคิด

จากความหมายของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ข้างต้น สรุปได้ว่า กระบวนการทางสมองของบุคคลที่เชื่อมโยงข้อมูลทางคณิตศาสตร์ มาใช้ในการคิดเพื่อทำความเข้าใจหรือหาคำตอบของปัญหาได้อย่างสมเหตุสมผล โดยมีการให้เหตุผลเกี่ยวกับกลยุทธ์ที่เลือกใช้ นำเสนอตัวแทนความคิดในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เพื่อสื่อสารความหมายทางคณิตศาสตร์ให้บุคคลอื่นเข้าใจ

ความสำคัญของการคิดเชิงคณิตศาสตร์

นักการศึกษาหลายท่านได้อธิบายถึงความสำคัญของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ไว้ ดังนี้

Sternberg (1987: 303) กล่าวถึงความสำคัญของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ไว้ว่า การคิดเชิงคณิตศาสตร์ เป็นการนิยามข้อมูลให้กระจ่าง ส่งผลให้เกิดความเข้าใจทางคณิตศาสตร์อย่างมีประสิทธิภาพของแต่ละบุคคล

Jackson et al. (1994: 1) กล่าวถึงความสำคัญของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ได้ว่า มนุษย์ได้ใช้แนวคิดทางคณิตศาสตร์ (Mathematical idea) เกี่ยวกับปัญหาในชีวิตประจำวันอยู่ตลอดเวลา แต่ไม่ได้สนใจศึกษาปัญหานั้นเท่าใดนัก แต่หากมีบางคนให้ความสนใจ สนุกกับปัญหาที่เกิดขึ้น มีความกระตือรือร้น พยายามศึกษารูปแบบโดยให้เหตุผลตามหลักตรรกศาสตร์ อาจกล่าวได้ว่าคน ๆ นั้นได้ใช้การคิดเชิงคณิตศาสตร์

Stacey (2007: Online) ได้กล่าวถึงความสำคัญของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ไว้ว่า การคิดเชิงคณิตศาสตร์ มีความสำคัญใน 3 วิถีทาง ได้แก่ 1) การคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นเป้าหมายที่สำคัญของการศึกษา 2) การคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นสิ่งสำคัญต่อวิธีการเรียนรู้คณิตศาสตร์ 3) การคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นสิ่งสำคัญสำหรับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

จากความสำคัญของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ดังที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่าการคิดเชิงคณิตศาสตร์มีความสำคัญต่อการจัดการข้อมูลที่มีความซับซ้อนในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และปัญหาในชีวิตจริง

2.2 องค์ประกอบการคิดเชิงคณิตศาสตร์

NCTM (2000: 52-71) กล่าวถึงกระบวนการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ว่ามีองค์ประกอบที่สำคัญ 5 ส่วนคือ

- การแก้ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์
- การให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์
- การสื่อสารความคิดเชิงคณิตศาสตร์
- การเชื่อมโยงสาระหลักเชิงคณิตศาสตร์
- การนำเสนอตัวแทนความคิดเชิงคณิตศาสตร์

กรองทอง ไกรีรี (อ้างถึงใน รุ่งทิวา นาบำรุง, 2550: 18) ได้วิเคราะห์ว่าองค์ประกอบทั้ง 5 ประการ ดังกล่าวนั้นเกี่ยวข้องกับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยระบุว่า ในการแก้ปัญหาผู้เรียนต้องใช้ความสามารถในการสำรวจ (Explore) รวมทั้งมีการคิดเกี่ยวกับตัวปัญหาและการใช้เหตุผลในการหาคำตอบของปัญหาทั้งแบบธรรมดา (Routine Problem) หรือปัญหาที่

แปลกใหม่ (Non-Routine Problem) นอกจากนี้ผู้ที่ใช้เหตุผลและใช้การคิดเชิงคณิตศาสตร์ในกระบวนการแก้ปัญหามักจะแสดงพฤติกรรมต่อไปนี้คือ ใช้การสังเกตอย่างรอบคอบเพื่อค้นหาแบบรูปโครงสร้างหรือสิ่งที่ไม่เป็นไปตามธรรมดาจากสภาพการณ์หรือปัญหาในชีวิตจริง หรือในสถานการณ์ปัญหาที่อยู่ในรูปสัญลักษณ์ ตั้งคำถามต่อตนเองว่าแบบรูปเหล่านี้เกิดขึ้นโดยบังเอิญหรือเกิดขึ้นอย่างมีเหตุผล สร้างข้อคาดการณ์ และพิสูจน์ข้อคาดการณ์ของตนเอง กิจกรรมการแก้ปัญหาจะทำให้เด็กเกิดทักษะทางภาษาและสังคม เกิดทักษะการทำงานร่วมกัน ตลอดจนมีทักษะการสื่อสารการคิดเชิงคณิตศาสตร์เกิดขึ้น ทั้งนี้เนื่องจากการสื่อสารเป็นวิธีการที่บุคคลแลกเปลี่ยนความคิดซึ่งกันและกัน มีการทำความเข้าใจแนวคิด (Ideas) ซึ่งแนวคิดต่างๆ เป็นสิ่งที่สะท้อนความรู้และความเข้าใจของแต่ละบุคคล การอภิปรายโต้แย้งถกเถียงจะเป็นประเด็นสำคัญที่นำไปสู่การปรับปรุงแก้ไขปัญหาที่ถูกต้องสมบูรณ์ยิ่งขึ้น นอกจากนี้การนำเสนอตัวแทนการคิดเชิงคณิตศาสตร์ยังมีความเกี่ยวข้องกับกระบวนการและผลผลิตของการคิดซึ่งสามารถสังเกตเห็นได้จากภายนอกและเกิดขึ้นภายในสมองของผู้เรียนที่กำลังทำคณิตศาสตร์

Kriegler (2004: Online) ได้กล่าวว่าทักษะการแก้ปัญหา (Problem Solving Skills) ประกอบด้วย การใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหา การแก้ปัญหาที่หลากหลาย ทักษะการนำเสนอตัวแทนความคิด (Representation Skills) ใช้การนำเสนอความสัมพันธ์ที่สามารถมองเห็น สัญลักษณ์ ตัวเลข ภาษา และทักษะการให้เหตุผล (Reasoning Skills) พิจารณาในส่วนของการให้เหตุผลอุปนัยและนิรนัย เป็นเครื่องมือที่ช่วยในการคิดเชิงคณิตศาสตร์รวมถึงการคิดวิเคราะห์ของนักเรียน

Swan and Ridgway (2005, Online) กล่าวถึงการคิดเชิงคณิตศาสตร์ขึ้นอยู่กับองค์ประกอบที่แตกต่างกัน ได้แก่ ความรู้หลักที่เด่น ๆ วิธีการแก้ปัญหา การใช้แหล่งข้อมูลที่ได้ผล มีการรับรู้ทางคณิตศาสตร์ และการลงมือปฏิบัติเกี่ยวกับการคิดเชิงคณิตศาสตร์

จากองค์ประกอบการคิดเชิงคณิตศาสตร์ข้างต้นผู้วิจัยได้กำหนดองค์ประกอบของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ดังนี้ 1) การแก้ปัญหาซึ่งผู้เรียนต้องสามารถวิเคราะห์ปัญหา เลือกใช้กลยุทธ์และสรุปคำตอบให้สอดคล้องกับปัญหา 2) การให้เหตุผล ผู้เรียนสามารถใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์และข้อมูลในการวิเคราะห์ปัญหา อธิบายเหตุผลในการเลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหา รวมทั้งอธิบายความสมเหตุสมผลของคำตอบ และ 3) การนำเสนอตัวแทนความคิด ผู้เรียนสามารถใช้ตัวแทนความคิดเพื่อทำความเข้าใจปัญหา ใช้ตัวแทนความคิดเพื่อแสดงกระบวนการแก้ปัญหาและใช้ตัวแทนความคิดเพื่อสรุปปัญหาโดยใช้ รูปภาพ ข้อความ ตัวแปร สัญลักษณ์ ตัวเลข

2.3 วิธีการศึกษาการคิดเชิงคณิตศาสตร์

การศึกษาการคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นการศึกษาสิ่งที่เป็นนามธรรม และเป็นการศึกษากระบวนการในสมอง จึงจำเป็นต้องอาศัยเครื่องมือต่าง ๆ เพื่อศึกษาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ โดยมีนักการศึกษาได้เสนอไว้ดังนี้

Kriegler (2004: Online) ได้กล่าวว่าทักษะการแก้ปัญหา (Problem Solving Skills) ทักษะการนำเสนอตัวแทนความคิด (Representation Skills) และ ทักษะการให้เหตุผล (Reasoning Skills) เป็นเครื่องมือที่ช่วยในการคิดเชิงคณิตศาสตร์รวมถึงการคิดวิเคราะห์ของนักเรียน

Manouchehri (2005: Online) กล่าวว่าเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่ช่วยในการทำความเข้าใจสิ่งต่างๆ รอบตัวคือ 1) การแก้ปัญหา 2) การนำเสนอตัวแทนความคิดในรูปแบบที่มองเห็นได้ เช่น แผนภูมิ รูปภาพ หรือกราฟ ในรูปตัวเลข เช่น ตาราง การทำรายการ ในรูปสัญลักษณ์และในรูปคำพูด 3) การให้เหตุผล ได้แก่ การสร้างกรณีทั่วไป การสรุปที่สมเหตุสมผล วิธีการอุปนัยซึ่งเป็นการตรวจสอบกรณีเฉพาะ การจำแนกแบบรูปและความสัมพันธ์ การขยายแบบรูปและความสัมพันธ์

Cai (2003: 720) ได้กล่าวถึงการตรวจสอบการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนจากการใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหา การแสดงขอบเขตความรู้ทางคณิตศาสตร์ การนำเสนอตัวแทนความคิดของกระบวนการแก้ปัญหา การสนับสนุนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ และการตั้งปัญหาใหม่บนพื้นฐานของสถานการณ์ปัญหาเดิม

จากวิธีการศึกษาการคิดเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่าต้องอาศัยเครื่องมือต่อไปนี้ในการศึกษา คือ การแก้ปัญหา การนำเสนอตัวแทนความคิด และการให้เหตุผล

2.4 แนวทางการพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์

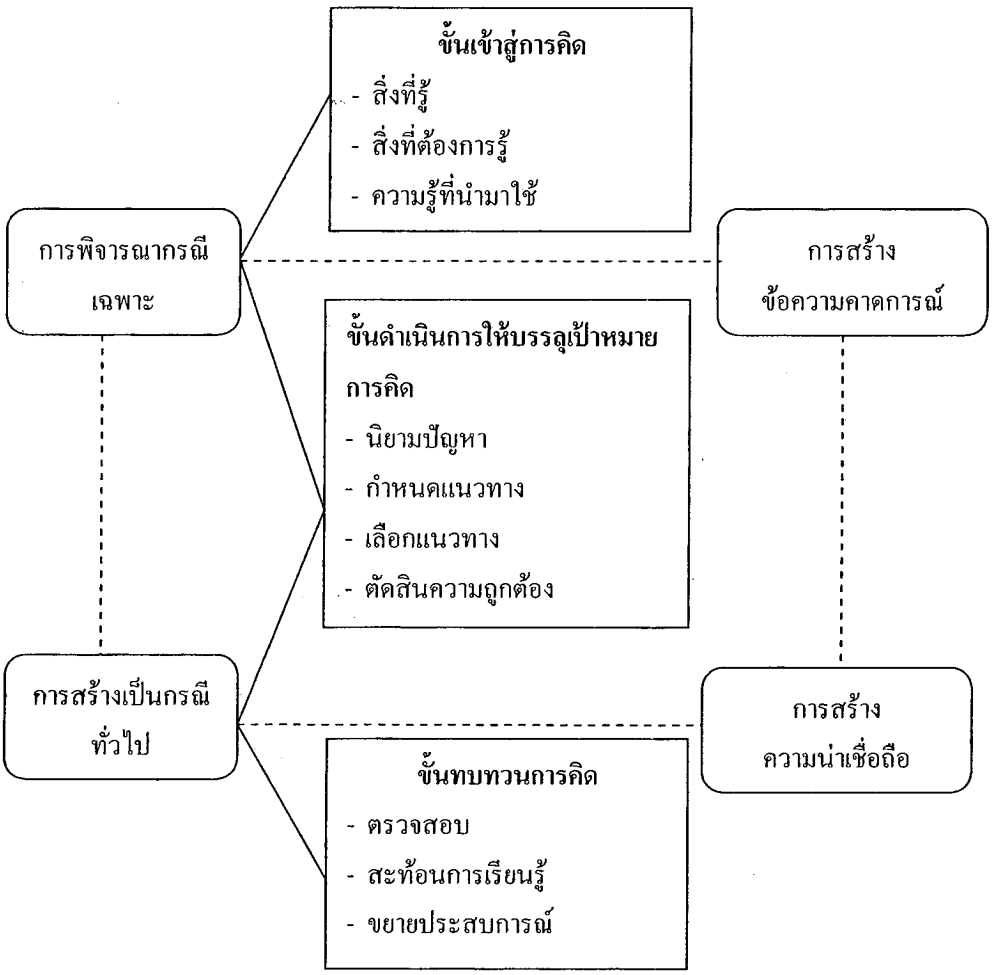
มีนักการศึกษาได้เสนอแนวทางในการพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ดังต่อไปนี้

อัมพร ม้าคะนอง (2553: 36) ได้เสนอแนวทางในการพัฒนาการคิดไว้ว่าการพัฒนาการคิดเป็นการพัฒนากระบวนการคิดที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ ซึ่งอาจทำได้ง่าย ๆ ด้วยการพยายามใช้คำถามให้ผู้เรียนได้คิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ และให้ผู้เรียนได้ฝึกการคิดจากสถานการณ์ปัญหา นอกจากนี้ผู้สอนอาจฝึกให้ผู้เรียนรักการคิดโดยเริ่มจากสิ่งที่ทำได้ไม่ยากนัก ดังนี้

1. ให้ผู้เรียนคิดในสิ่งที่พอคิดได้ หรือไม่ยากเกินไปจนคิดอย่างไรก็คิดไม่ได้
2. พยายามถามหาเหตุผลกับผู้เรียนบ่อย ๆ เพื่อฝึกให้ผู้เรียนได้คิด
3. ให้ผู้เรียนคิดในสิ่งที่สนใจและต้องการคิด
4. ฝึกให้คิดบ่อย ๆ เพื่อให้ผู้เรียนเกิดความคุ้นเคยและมีความพยายามในการคิด
5. ฝึกการคิดที่หลากหลาย เช่น การคิดวิเคราะห์ การคิดสังเคราะห์ การคิดนอกกรอบ การคิดเชื่อมโยง การคิดไตร่ตรอง การคิดเชิงตรรก

6. ปรับเปลี่ยนสถานการณ์หรือเงื่อนไขของปัญหาให้ท้าทายการคิด
7. ถามคำถามที่น่าสนใจ น่าคิด และไม่ใช้คำถามธรรมดาที่ผู้เรียนคุ้นเคย
8. ค่อย ๆ ฝึกจากการคิดระดับต่ำสู่การคิดระดับสูง

Mason, et al. (1994; 131; 146-159) ได้เสนอรูปแบบในการพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์บนความเชื่อที่ว่ากระบวนการสำคัญที่อยู่เบื้องหลังการคิดเชิงคณิตศาสตร์ คือ การพิจารณากรณีเฉพาะ การสรุปนัยทั่วไป การสร้างข้อความคาดการณ์และการสร้างความน่าเชื่อถือ กระบวนการดังกล่าวแบ่งออกเป็น 3 ระยะ ได้แก่ 1) ขั้นเข้าสู่การคิด 2) ขั้นดำเนินการให้บรรลุเป้าหมายการคิด 3) ขั้นทบทวนการคิด แต่ละระยะจะมีเกณฑ์บ่งชี้ เพื่อเป็นแนวทางในการบันทึกการคิดที่เกิดขึ้น ซึ่งจะช่วยเสริมประสิทธิภาพในการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ดังภาพประกอบที่ 2



ภาพที่ 2 แสดงกระบวนการคิดเชิงคณิตศาสตร์

การพิจารณากรณีเฉพาะ เมื่อเผชิญคำถามหรือสถานการณ์เชิงคณิตศาสตร์ ถ้าบุคคลสามารถหา หรือหยิบยกตัวอย่างของสิ่งที่กล่าวถึงในคำถามได้จะทำให้เกิดความเข้าใจและอาจมองเห็น

ลู่ทางในการหาคำตอบได้มากขึ้น การพิจาณากรณีเฉพาะจึงมีบทบาทสำคัญยิ่งในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ การเลือกกรณีเฉพาะมาพิจารณาอาจเลือกโดยการสุ่ม เลือกอย่างเป็นระบบ หรือเลือกในลักษณะผู้เชี่ยวชาญ

ตัวอย่างการพิจารณากรณีเฉพาะ เช่น "ถ้าร้านขายส่งแห่งหนึ่งให้ส่วนลด 20% แก่ผู้ซื้อและต้องชำระภาษีการค้า 15% ของราคาสินค้าด้วย ลูกค้าผู้หนึ่งกำลังตัดสินใจหลังจากซื้อสินค้าว่าควรเลือกวิธีใดในการคำนวณราคาสินค้า ระหว่างการคิดคำนวณส่วนลดก่อน หรือคิดคำนวณการชำระภาษีก่อนเพื่อจะได้ประหยัดเงินมากที่สุด"

แนวทางการคำนวณ : ทดลองกำหนดราคาสินค้าขึ้นมาเพื่อพิจารณาการคำนวณ เช่น ให้สินค้าที่ต้องการซื้อชนิดหนึ่งมีราคา 100 บาท

วิธีที่ 1 คิดส่วนลด 20% ก่อน แล้วชำระภาษี 15%

ราคาสินค้าไม่รวมภาษีคือ 80 บาท (80% ของ 100 บาท)

เมื่อรวมภาษีต้องจ่ายเงิน 1.15 x 80 = 92 บาท [1.15 x (0.80 x 100)]

วิธีที่ 2 คิดภาษี 15% ก่อน แล้วจึงคิดส่วนลด 20%

ราคาสินค้าก่อนคิดส่วนลดคือ 115 บาท (115% ของ 100 บาท)

เมื่อหักส่วนลดต้องจ่ายเงิน 0.80 x 115 = 92 บาท [0.80 x (1.15 x 100)]

จะเห็นว่าการคำนวณทั้งสองวิธีจะจ่ายเงินเท่ากัน

[1.15 x (0.80 x 100) = 0.80 x (1.15 x100)]

ดังนั้นการเลือกกรณีเฉพาะโดยใช้ราคาสินค้า 100 บาท ทำให้สามารถค้นพบความจริงบางอย่างได้

การสร้างกรณีทั่วไป เป็นการขยายจากการยกตัวอย่างเพียงไม่กี่กรณีไปสู่ความคาดหมายที่ครอบคลุมกรณีต่างๆ ที่กว้างขวาง หรือมีลักษณะทั่วไปมากขึ้น เช่น การซื้อสินค้าในราคาขายส่งที่ได้กล่าวมาข้างต้น หากพิจารณาราคาสินค้าอื่นๆ อีก หนึ่งหรือสองชนิด จะเริ่มเห็นแบบรูปที่เกิดขึ้น คือ "ลำดับของการคิดคำนวณส่วนลดก่อน หรือคำนวณภาษีก่อนไม่ส่งผลที่แตกต่างกันต่อราคาสินค้าที่ผู้ซื้อต้องจ่ายจริง" แบบรูปนี้เป็นตัวอย่างหนึ่งของการสรุปกรณีทั่วไปของสถานการณ์เชิงคณิตศาสตร์ที่กล่าวมา

กรณีเฉพาะที่นำมาพิจารณาจะช่วยให้สามารถเชื่อมโยงไปสู่การสรุปกรณีทั่วไปสำหรับสินค้าราคาใด ๆ (กำหนดให้เป็น P) ได้คือ

$$1.15 \times (0.80 \times P) = 0.80 \times (1.15 \times P)$$

การสร้างกรณีทั่วไปตามทรรศนะของเมสันและคณะ หมายถึง การพบและการนำเสนอแบบรูปที่นำไปสู่

– สิ่งที่คาดหมายว่าน่าจะถูกต้อง (ข้อคาดการณ์ (conjecture))
– สาเหตุที่ทำให้คาดหมายว่าน่าจะถูกต้อง (การตัดสินความถูกต้อง(justifying))
– ขอบเขตที่คาดหมายว่าน่าจะถูกต้อง คือ เป็นความจริงที่ครอบคลุมปัญหาอื่นทั่ว ๆ ไปมากขึ้น

การสร้างข้อความคาดการณ์ หมายถึง การเสนอสิ่งที่คาดหมายว่าน่าจะถูกต้อง แต่ยังไม่มีผู้ใดสรุปหรือแสดงเหตุผลให้เป็นที่ยอมรับ ข้อคาดการณ์ที่มีชื่อเสียงและมีความโดดเด่นในทางคณิตศาสตร์มีอยู่หลากหลาย หนึ่งในจำนวนนั้นคือ ข้อคาดการณ์ของโกลด์บาค (Goldbach's conjecture) ที่กล่าวว่า "จำนวนคู่ทุกจำนวนที่มีค่ามากกว่า 2 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลบวกของจำนวนเฉพาะสองจำนวนได้" จากข้อคาดการณ์นี้ทำให้มีการสำรวจจำนวนคู่ที่มากกว่า 2 จำนวนนับล้าน ๆ และทุก ๆ จำนวนคู่ที่นำมาทดสอบ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลบวกของจำนวนเฉพาะสองจำนวนได้ อย่างไรก็ตามยังไม่มีใครสามารถพิสูจน์ได้ว่าทุก ๆ จำนวนคู่มีสมบัติตามข้อคาดการณ์ของโกล์ดบาค จึงยังไม่มีใครกล้ายืนยันว่าข้อคาดการณ์ของโกลด์บาคเป็นจริง

ดังนั้น ข้อคาดการณ์จึงเป็นเพียงคำกล่าว ข้อความ หรือประโยคที่พบว่ามีความเป็นไปได้ แต่ยังไม่มีการตัดสินความถูกต้องอย่างน่าเชื่อถือ ข้อคาดการณ์ส่วนใหญ่มักตั้งหรือสร้างขึ้นง่าย ๆ แล้วพยายามตัดสินความถูกต้องเพื่อนำไปสนับสนุนผลลัพธ์หรือวิธีการบางอย่างเท่านั้น การตั้งข้อคาดการณ์จึงเป็นกระบวนการของความรู้สึก (Sensing) หรือการเดาว่าบางสิ่งน่าจะถูก แล้วสำรวจความถูกต้องของสิ่งนั้น

การสร้างความเชื่อมั่น ระหว่างการดำเนินการแก้ปัญหา กระบวนการค้นหาคำตอบที่ถูกต้องเพื่อปะติดปะต่อเป็นข้อคาดการณ์ ยังมีอีกกระบวนการหนึ่งที่เกิดควบคู่ไปด้วย คือ กระบวนการค้นหาเหตุผลว่าทำไมสิ่งเหล่านั้นจึงถูกต้อง (หรือไม่ถูกต้องสำหรับบางกรณี) ซึ่งจะช่วยสร้างความน่าเชื่อถือให้กับคำตอบหรือข้อค้นพบต่าง ๆ ตัวอย่างเช่น ข้อคาดการณ์ของโกล์ดบาค จะเห็นว่ามีการพิจารณากรณีเฉพาะเป็นจำนวนมาก จนกระทั่งคนจำนวนมากมีความเชื่อว่าเป็นข้อคาดการณ์ที่สมเหตุสมผล แต่ยังไม่มีการตรวจสอบความถูกต้องที่จะทำให้มีการยอมรับอย่างไม่มีข้อโต้แย้ง ความน่าเชื่อถือจึงมีขอบเขตที่จำกัด ในการสร้างความน่าเชื่อถือเกี่ยวกับประเด็นต่าง ๆ จากคำถามหรือปัญหา สิ่งที่ต้องการจึงไม่ใช่แค่เพียงการยกตัวอย่างแบบผิวเผิน แต่ควรเป็นเหตุผลที่เกี่ยวกับแบบรูปหรือโครงสร้างบางอย่างเพื่อเป็นกรอบในการอธิบายเพื่อให้เกิดความน่าเชื่อถืออย่างแท้จริงมากกว่า

กระบวนการที่อยู่เบื้องหลังการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่กล่าวมา จะดำเนินไปตามระยะของการคิด 3 ระยะ ได้แก่

1. ระยะเข้าสู่การคิด เป็นระยะการหาข้อมูลเพื่อตอบคำถามต่างๆ เช่น รู้อะไรบ้าง ต้องการอะไร นำความรู้ใดมาใช้ได้บ้าง

2. ระยะดำเนินการให้บรรลุเป้าหมายการคิด เป็นระยะการดำเนินการแก้สถานการณ์ปัญหา โดยใช้กระบวนการสร้างข้อคาดการณ์ การคิดหาเหตุผล การตัดสินความถูกต้อง และการสร้างความน่าเชื่อถือ

3. ระยะทบทวนการคิด เป็นระยะที่ต้องตรวจสอบการแก้ปัญหา สะท้อน และขยายความรู้และประสบการณ์ที่ได้จากการแก้ปัญหา

เมสันและคณะมีความคิดว่า แนวทางการฝึกการคิดไปพร้อมกับการสะท้อนการเรียนรู้จากการคิด เป็นแนวทางที่ช่วยพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพและเชื่อมโยงกับการแก้ปัญหาและการคิดอย่างมีวิจารณญาณโดยตรง

2.5 แนวทางการวัดและการประเมินผลการคิดเชิงคณิตศาสตร์

ชนาธิป พรกุล (219-220: 2554) ได้กล่าวถึงการวัดและประเมินความสามารถในการคิดว่าการคิดเป็นสิ่งที่เกิดขึ้นภายในสมอง เมื่อต้องการวัดการคิดจึงเป็นการวัดความสามารถในการคิด ซึ่งแสดงออกในลักษณะต่างๆ หรืออาจกล่าวได้ว่า การวัดการคิดเป็นการวัดสิ่งที่แสดงร่องรอยของการคิด ซึ่งแบ่งสิ่งที่วัดออกเป็น 3 ประเภท ได้แก่ 1) ผลของการคิด แสดงให้เห็นเป็นความคิด ผลงานหรือการกระทำ โดยสามารถวัดจากแบบทดสอบ แบบสัมภาษณ์ แบบตรวจผลงานการคิด และแบบสังเกตพฤติกรรมการคิด 2) กระบวนการของการคิด แสดงให้เห็นเป็นขั้นตอนการปฏิบัติงาน หรือการแก้ปัญหา วัดจากแบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงาน แบบสังเกตพฤติกรรมการแก้ปัญหา 3) คุณลักษณะของบุคคล หรือเจตคติ สังเกตเห็นได้จากลักษณะการเป็นผู้ใฝ่รู้ คิดไกล คิดลึกซึ้ง คิดรอบคอบ คิดชัดเจน มีวิจารณญาณ คิดสร้างสรรค์ วัดจากแบบสังเกตพฤติกรรมการคิดและแบบสัมภาษณ์ โดยเวลาที่วัดความสามารถในการคิดควรวัดก่อนการสอน ระหว่างการสอน (ทุกบทเรียน/หน่วยการเรียนรู้) และหลังการสอน โดยทำอย่างสม่ำเสมอและต่อเนื่อง ซึ่งในการวัดคิดอาจวัดรวมไปกับเนื้อหาวิชาในแบบสอบตามปกติ หรือแยกต่างหาก

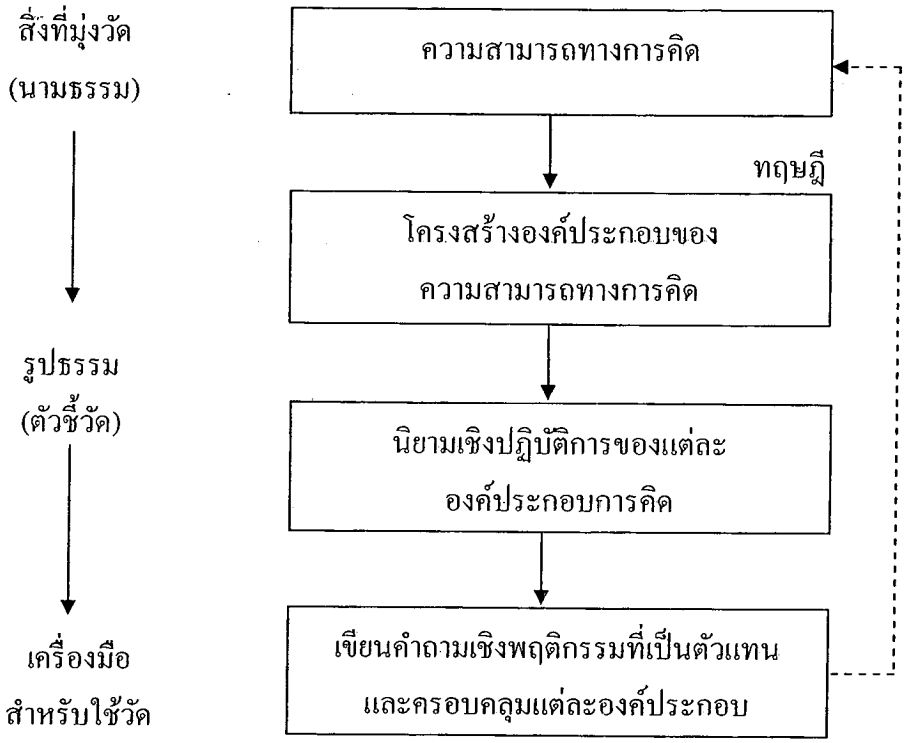
ศิริชัย กาญจนวาสี (58-63 : 2551) ได้เสนอการวัดความสามารถในการคิดเป็น 2 ลักษณะ คือ แบบสอบมาตรฐานที่ใช้สำหรับการวัดความสามารถในการคิด และแบบสอบสำหรับสำหรับวัดความสามารถทางการคิดที่สามารถสร้างขึ้นใช้เอง โดยมีรายละเอียดดังนี้

1. แบบสอบมาตรฐานที่ใช้สำหรับวัดความสามารถในการคิด เป็นแบบสอบมาตรฐานที่มีผู้สร้างไว้แล้ว สำหรับใช้วัดความสามารถในการคิด สามารถจัดกลุ่มได้เป็น 2 ประเภท ได้แก่ แบบสอบการคิดทั่วไป และแบบสอบการคิดเฉพาะด้าน

2. การสร้างแบบวัดการคิดขึ้นใช้เอง ในการสร้างสร้างแบบวัดการคิดขึ้นใช้เอง เป็นการสร้างแบบวัดการคิดเพื่อให้เหมาะสมกับความต้องการในการวัดการคิดที่ต้องการวัด โดยมีหลักการสร้างและขั้นตอนการพัฒนาแบบวัดความสามารถทางการคิด ดังนี้

2.1 หลักการสร้างแบบวัดความสามารถทางการคิด

การวัดความสามรถทางการคิดของบุคคล ผู้สร้างเครื่องมือจะต้องมีความรอบรู้ในแนวคิดหรือทฤษฎีเกี่ยวกับ "การคิด" เพื่อนำมาเป็นกรอบหรือโครงสร้างของการคิด เมื่อมีการกำหนดนิยามเชิงปฏิบัติการของโครงสร้าง/องค์ประกอบการคิดแล้ว จะทำให้ได้ตัวชี้วัดหรือลักษณะพฤติกรรมเฉพาะที่เป็นรูปธรรม ซึ่งสามารถบ่งชี้ถึงโครงสร้าง/องค์ประกอบการคิด จากนั้นจึงเขียนข้อความตามตัวชี้วัดหรือลักษณะพฤติกรรมเฉพาะของแต่ละองค์ประกอบของการคิดนั้นๆ ดังภาพที่ 3



ภาพที่ 3 แสดงหลักการสร้างแบบวัดความสามารถทางการคิด

2.2 ขั้นตอนการพัฒนาแบบวัดความสามารถทางการคิด มีขั้นตอนในการดำเนินการที่สำคัญ ดังนี้

1) กำหนดจุดมุ่งหมายของแบบวัด

การกำหนดจุดมุ่งหมายสำคัญของการสร้างแบบวัดความสามารถทางการคิดผู้พัฒนาแบบวัดจะต้องพิจารณาจุดมุ่งหมายของการนำแบบวัดไปใช้ด้วยว่า ต้องการวัดความสามารถความสามารถทางการคิดทั่ว ๆ ไป หรือต้องการวัดความสามารถทางการคิดเฉพาะวิชา (Aspect-Specific) การวัดมุ่งติดตามความก้าวหน้าของความสามารถทางการคิด(Formative) หรือต้องการเน้นการประเมินผลสรุปรวม (Summative) สำหรับการตัดสินใจ รวมทั้งการแปลผลการวัด เน้นการเปรียบเทียบกับมาตรฐานของกลุ่ม (Norm-Referenced) หรือต้องการเปรียบเทียบกับเกณฑ์หรือมาตรฐานที่กำหนดไว้ (Criterion-Referenced)

2) กำหนดกรอบของการวัดและนิยามเชิงปฏิบัติการ

ผู้พัฒนาแบบวัดควรศึกษาเอกสาร แนวคิด ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับความสามารถทางการคิดตามจุดมุ่งหมายที่ต้องการ และควรคัดเลือกแนวคิดหรือทฤษฎีที่เหมาะสมกับบริบทและจุดมุ่งหมายที่ต้องการเป็นหลัก แล้วศึกษาให้เข้าใจอย่างลึกซึ้ง เพื่อกำหนดโครงสร้าง/องค์ประกอบของความสามารถทางการคิดตามทฤษฎีและให้นิยามเชิงปฏิบัติการ (operational definition) ของแต่ละองค์ประกอบในเชิงรูปธรรมของพฤติกรรมที่สามารถบ่งชี้ถึงลักษณะแต่ละองค์ประกอบของการคิดนั้นได้

3) สร้างผังข้อสอบ (Table of Specification)

การสร้างผังข้อสอบเป็นการกำหนดเค้าโครงของแบบวัดความสามารถทางการคิดที่ต้องการให้ครอบคลุม โครงสร้างหรือองค์ประกอบใดบ้างตามทฤษฎีและกำหนดว่าแต่ละส่วนมีน้ำหนักความสำคัญมากน้อยเพียงใด ในกรณีที่ต้องการสร้างแบบวัดความสามารถทางการคิดสำหรับใช้เฉพาะวิชาใดวิชาหนึ่ง ผู้พัฒนาแบบวัดจะต้องกำหนดเนื้อหาวิชานั้นด้วยว่าจะใช้เนื้อหาใดบ้างที่เหมาะสมนำมาใช้วัดความสามารถทางการคิด พร้อมทั้งกำหนดน้ำหนักความสำคัญของแต่ละเนื้อหาในแต่ละองค์ประกอบความสามารถทางการคิดเป็นผังข้อสอบสำหรับนำไปใช้เขียนข้อสอบต่อไป

4) เขียนข้อสอบ

กำหนดรูปแบบของการเขียนข้อสอบ ตัวคำถาม ตัวคำตอบ และวิธีการตรวจให้คะแนนโดยมีการกำหนดเกณฑ์การตรวจไว้ เมื่อกำหนดรูปแบบของข้อสอบแล้ว ลงมือร่างข้อสอบตามผังข้อสอบที่กำหนดไว้จนครบทุกองค์ประกอบ ภาษาที่ใช้ควรเป็นไปตามหลักการเขียนข้อสอบที่ดีโดยทั่วไป หลังจากร่างข้อสอบเสร็จแล้ว ควรมีการทบทวนข้อสอบถึงความเหมาะสมของการวัดและความชัดเจนของภาษาที่ใช้ โดยผู้เขียนข้อสอบเองและผู้ตรวจสอบที่มีความเชี่ยวชาญในการสร้างข้อสอบวัดความสามารถในการคิด

5) นำแบบวัดไปทดลองใช้ วิเคราะห์คุณภาพและปรับปรุงจริง หรือกลุ่มใกล้เคียง นำผลการตอบมาทำการวิเคราะห์คุณภาพ โดยทำการวิเคราะห์ข้อสอบและวิเคราะห์แบบสอบ

วิเคราะห์ข้อสอบเพื่อตรวจสอบคุณภาพของข้อสอบเป็นรายข้อในด้านความยาก (p) และอำนาจจำแนก (r) เพื่อคัดลอกข้อสอบที่มีความยากพอเหมาะและมีอำนาจจำแนกสูงไว้ และปรับปรุงข้อที่ไม่เหมาะสม

คัดเลือกข้อสอบที่มีคุณภาพเหมาะสม และ/หรือข้อสอบที่ปรับปรุงแล้วให้ได้จำนวนตามผังข้อสอบ เพื่อให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจความตรงตามเนื้อหา และนำไปทดลองใช้อีกครั้งเพื่อวิเคราะห์แบบสอบในด้านความเที่ยง (Reliability) แบบสอบควรมีความเที่ยงเบื้องต้นอย่างน้อย 0.50 จึงเหมาะที่จะนำไปใช้ได้ ส่วนการตรวจสอบความตรง (Validity) ของแบบสอบถ้าสามารถหาเครื่องมือวัดความสามารถทางการคิดที่เป็นมาตรฐานสำหรับใช้เปรียบเทียบได้ ก็ควรคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ความตรงตามสภาพ (Concurrent Validity) ของแบบสอบด้วย

6) นำแบบวัดไปใช้จริง

หลังจากวิเคราะห์คุณภาพของข้อสอบเป็นรายข้อ และวิเคราะห์คุณภาพของแบบสอบทั้งฉบับว่าเป็นไปตามเกณฑ์คุณภาพที่ต้องการแล้ว จึงนำแบบวัดความสามารถทางการคิดไปใช้กับกลุ่มเป้าหมายจริง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2556: Online) กล่าวว่า การสร้างข้อสอบวัดความสามารถในการคิดนั้นจำเป็นต้องมีสถานการณ์ที่น่าสนใจและกระตุ้นให้เกิดการคิด สถานการณ์ที่นำมาใช้อาจเป็นสถานการณ์จริง สถานการณ์จำลอง เหตุการณ์ ปรากฏการณ์ หรือประเด็นที่สังคมให้ความสนใจ หรือเป็นเรื่องราวที่สมมติขึ้นอย่างมีเหตุมีผล ซึ่งอยู่ในรูปของข้อความ แผนภาพ รูปภาพ หรือตารางข้อมูล ที่สามารถหาได้จากแหล่งข้อมูลต่าง ๆ เช่น บทความจากหนังสือหรือวารสาร หรือข่าวจากหนังสือพิมพ์ โดยผลคะแนนที่ได้จากการวัดความสามารถในการคิดนั้นสามารถใช้เป็นแนวทาง ในการพัฒนาและส่งเสริมการคิดด้านอื่น ๆ ของผู้เรียนต่อไป

สุวิทย์ มูลคำ (2548: 157-160) กล่าวถึง การประเมิลผลกระบวนการคิดว่าสามารถจำแนกได้เป็น 2 แนวทาง ได้แก่ 1) การประเมินผลโดยการใช้แบบทดสอบ ซึ่งอาจเป็นแบบสอบมาตรฐานหรือ แบบทดสอบที่สร้างขึ้นมาเองซึ่งเป็นแบบวัดการคิดที่เหมาะสมกับความต้องการในการวัด และ 2) ใช้การประเมินผลตามสภาพจริง ซึ่งมีแนวทางในการประเมิน 2 ลักษณะ ดังนี้

ลักษณะที่ 1 ประเมินจากพฤติกรรมการแสดงออก ได้แก่ การพูด การฟัง การอภิปราย การร่วมกิจกรรมตามที่กำหนด การเก็บข้อมูลเพื่อประเมินผลกระบวนการคิดจากพฤติกรรมการแสดงออกควรใช้วิธีการที่หลากหลาย เช่น การสังเกต การสัมภาษณ์ การใช้ผลการบันทึกจากผู้ที่เกี่ยวข้อง เช่น เพื่อนร่วมชั้น ผู้สอน เป็นต้น

ลักษณะที่ 2 ประเมินจากผลงานและชิ้นงานที่เกิดขึ้น การประเมินผลกระบวนการคิดในลักษณะที่สองนี้สามารถใช้วิธีการที่หลากหลายได้ เช่น การตรวจงานหรือผลงานของนักเรียน การรายงานตนเองของผู้เรียน การใช้บันทึกจากผู้ที่เกี่ยวข้อง และการใช้แฟ้มสะสมงาน

เกณฑ์การให้คะแนน (Scoring Rubric) คือเกณฑ์การให้คะแนนที่ถูกพัฒนาโดยครูหรือผู้ประเมินที่ใช้วิเคราะห์ผลงานหรือกระบวนการที่ผู้เรียนได้พยายามสร้างขึ้น การประเมินผลงานของนักเรียนจะมี 2 ลักษณะคือ ผลงานที่ได้จากกระบวนการของนักเรียน และกระบวนการที่นักเรียนใช้เพื่อให้เกิดผลงาน จะประเมินในลักษณะใดขึ้นอยู่กับจุดมุ่งหมายในการเรียนรู้ อาจจะประเมินลักษณะใดลักษณะหนึ่งหรือประเมินทั้งสองลักษณะก็ได้ ผู้ประเมินจะต้องตัดสินคุณภาพของผลงานหรือกระบวนการปฏิบัติงานของผู้เรียนแต่ละคนที่มีระดับที่แตกต่างกันหลายระดับ ระดับที่แตกต่างกันอาจจะเป็นระดับคุณภาพของชิ้นงานที่ได้สร้างขึ้น หรือระดับของกระบวนการต่าง ๆ ที่ผู้เรียนแต่ละคนได้ใช้เพื่อให้เกิดผลงาน โดยการให้คะแนนแบบรูบริคมี 3 รูปแบบคือ 1) Holistic Rubrics เป็นเกณฑ์การให้คะแนนผลงานหรือกระบวนการแบบไม่ได้แยกส่วน โดยเป็นการประเมินในภาพรวมของผลงานหรือกระบวนการนั้น 2) Analytic Rubrics เป็นเกณฑ์การให้คะแนนแบบแยกส่วน หรือองค์ประกอบคุณลักษณะของผลงานหรือกระบวนการ แล้วนำแต่ละส่วนหรือองค์ประกอบของคุณลักษณะมารวมกันเป็นคะแนนรวม 3) Annotated Holistic Rubrics ผู้ประเมินจะประเมินแบบ holistic rubrics ก่อนแล้วจึงประเมินแยกส่วนอีกบางคุณลักษณะที่เด่น ๆ เพื่อใช้เป็นผลสะท้อนในบางคุณลักษณะของผู้เรียน (ฉัตรศิริ ปิยะพิมลสิทธิ์, 2554: Online)

จากการศึกษาแนวทางการวัดและการประเมินผลการคิดเชิงคณิตศาสตร์ข้างต้น งานวิจัยนี้ได้ใช้แนวทางในการวัดและประเมินผลการการคิดเชิงคณิตศาสตร์จากการสร้างแบบวัดการคิดขึ้นใช้เอง โดยได้กำหนดองค์ประกอบการคิดเชิงคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของ Kriegler ซึ่งองค์ประกอบการคิดเชิงคณิตศาสตร์ประกอบด้วย การแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการนำเสนอตัวแทนความคิด และสร้างเกณฑ์การให้คะแนนแบบแยกส่วน ตามนิยามเชิงปฏิบัติการของแต่ละองค์ประกอบการคิดแต่ละองค์ประกอบ และทำการวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนจากแบบวัดการคิดเชิงคณิตศาสตร์ 3 ระยะ ได้แก่ ก่อนเรียน ระหว่างเรียน และหลังเรียน นอกจากนี้ยังศึกษาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ระหว่างเรียนจากใบกิจกรรม เพื่อทำการศึกษาพัฒนาการการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียน

3. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

3.1 งานวิจัยต่างประเทศ

Schielack, et al. (2000: 398-420) ได้ศึกษาเรื่องการออกแบบคำถามเพื่อส่งเสริมการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2-4 โดยมีการกำหนดคำถามเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนหาหนทางที่จะใช้การคิดเชิงคณิตศาสตร์ในการจัดกิจกรรมต่าง ๆ มีการแนะนำที่จะสรุป การอภิปรายเพื่อหาเหตุผลรวมถึงการประเมินผลการเรียนรู้ของนักเรียน การจัดประสบการณ์จะเน้นคำถามที่ใช้กระบวนการในการหาคำตอบ ซึ่งผลการศึกษาพบว่านักเรียนสามารถพัฒนาทักษะการคิดเชิงคณิตศาสตร์ได้

Fraivillig (2001: 454-459) ได้ศึกษาเรื่องกลวิธีทางการสอนสำหรับส่งเสริมการคิดเชิงคณิตศาสตร์ โดยศึกษาเกี่ยวกับบทบาทของครูที่สอนในชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 เพื่อหากลวิธีการส่งเสริมการคิดเชิงคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียน โดยใช้รูปแบบ ACT ได้แก่ครูพยายามล้วงเอาความคิดของนักเรียนเพื่อให้แสดงวิธีในการแก้ปัญหาที่หลลากหลาย ให้เวลานักเรียนในการคิดกระตุ้นให้นักเรียนได้ร่วมอธิบายรายละเอียด เปิดโอกาสให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการอภิปราย การส่งเสริมให้นักเรียนเข้าใจในความคิดรวบยอดของตนเอง โดยครูทบทวนความรู้เดิมและย้ำเตือนถึงวิธีการในการแก้ปัญหาในลักษณะที่คล้ายกัน ให้นักเรียนยอมรับความช่วยเหลือเมื่อมีปัญหาและไม่สามารถแก้ปัญหาได้ การขยายความคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียน ครูกระตุ้นให้นักเรียนเขียนเป็นหลักการทั่วไป ผลักดันให้นักเรียนแก้ปัญหาโดยวิธีการอื่นๆ และส่งเสริมให้ใช้วิธีการหาคำตอบที่มีประสิทธิภาพ

Cai (2003:719) ได้การศึกษาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนสิงคโปร์ในระดับ เกรด 4-6 ในการแก้ปัญหาและตั้งปัญหา ซึ่งผลของการศึกษานี้แสดงให้เห็นว่า นักเรียนสิงคโปร์ระดับ เกรด 4 เกรด 5 และเกรด 6 ส่วนใหญ่สามารถเลือกกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่เหมาะสมในการแก้ปัญหาและเลือกใช้ตัวแทนความคิดแสดงกระบวนการแก้ปัญหาเพื่อสื่อสารกระบวนการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม นักเรียนสิงคโปร์ส่วนใหญ่สามารถตั้งปัญหาแบบรูปในแบบรูปเริ่มต้นได้ นอกจากนี้ยังพบว่า ในภาระงาน 4 ภาระงาน นักเรียนเกรด 4-6 มีการแสดงคำตอบที่ถูกต้องแตกต่างกัน โดยนักเรียนเกรด 5 มีการแสดงคำตอบที่ถูกต้องสูงกว่านักเรียนเกรด 4 และนักเรียนเกรด 5 และเกรด 6 มีการแสดงคำตอบที่ถูกต้องไม่แตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ เมื่อเทียบกับผลการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนสหรัฐอเมริกาและจีน พบว่านักเรียนสิงคโปร์มีลักษณะการคิดเชิงคณิตศาสตร์คล้ายกับนักเรียนจีนมากกว่านักเรียนสหรัฐอเมริกา

Kamii (2003: 20-6) ได้ปรับเปลี่ยนกระดานเกมเพื่อส่งเสริมการคิดทางคณิตศาสตร์ในเชิงตรรกวิทยากับนักเรียนอนุบาลในประเทศญี่ปุ่นจำนวน 12 คน เพื่อพัฒนาทักษะการคิดของนักเรียน

โดยครูมีหน้าที่เป็นผู้แนะนำการเล่นเกม และนำเสนอสิ่งที่นักเรียนแสดงออกมาขณะเล่นเกม ผลการวิจัยพบว่า การปรับเปลี่ยนกระดานเกมช่วยกระตุ้นให้นักเรียนพัฒนาความสามารถในการคิดให้สูงขึ้น

Kashei et al. (2012 : Abstract) ได้ศึกษาการส่งเสริมการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีชั้นปีที่ 1 ในการเรียนฟังก์ชันสองตัวแปรด้วยการเรียนรู้แบบผสมผสาน ผลการวิจัยพบว่า การเรียนรู้แบบผสมผสานส่งเสริมการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักศึกษา และช่วยให้นักศึกษาเอาชนะอุปสรรคในการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งการขาดความรู้พื้นฐานในเรื่องฟังก์ชันตัวแปรเดียวและการดำเนินการทางพีชคณิตยังเป็นเหตุผลหลักที่เป็นอุปสรรคในการเรียนรู้ฟังก์ชันสองตัวแปรของนักศึกษา

Yoon (2009 : Abstract) ได้ศึกษาการสร้างตัวแบบความสูงของปฏิยานุพันธ์ จากกระบวนการ 2 กระบวนการที่เกี่ยวข้องกับการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ กระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์จากสถานการณ์จริง และการใช้เทคนิคทางคณิตศาสตร์ไปสู่สถานการณ์จริงที่กำหนดให้ โดยการศึกษานี้เป็นการนำเสนอและวิเคราะห์งานจาก นักศึกษาระดับปริญญาตรีจำนวน 4 คนและครูโรงเรียนมัธยมศึกษาจำนวน 2 คน ที่มีส่วนร่วมในกระบวนการดังกล่าวจากงานการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่ต้องการให้กลุ่มตัวอย่างการวิจัยหาปฏิยานุพันธ์ของฟังชันก์ที่นำเสนอโดยกราฟ เมื่อกำหนดความสูงของปฏิยานุพันธ์ กลุ่มตัวอย่างการวิจัยมีการคิดสถานการณ์ให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อพัฒนาวิธีการพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ และพยายามที่จะใช้ความคิดบางอย่างเกี่ยวกับการอินทิเกรตแบบจำกัดเขต ที่กลุ่มตัวอย่างเคยเรียนมาแล้ว ซึ่งงานวิจัยนี้แสดงให้เห็นว่านักเรียนจะได้ประโยชน์จากกิจกรรมการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่ส่งเสริมให้มีการพัฒนาในด้านการแสดงออกทางความคิดหรือความรู้สึก โดยใช้คำพูดแก้ไขความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ของมโนทัศน์แคลคูลัส และการมีส่วนร่วมในกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์

Grigoras (2010: Abstract) ได้ศึกษาการสร้างตัวแบบในสภาพแวดล้อมที่ไม่มีตัวเลข ของนักเรียนอายุ 13-14 ปี พบว่า นักเรียนมีส่วนร่วมในการปฏิสัมพันธ์ทางสังคม มีการโต้แย้งและกล่าวแย้งในแนวความคิด โดยเฉพาะอย่างยิ่ง เป็นการอภิปรายถึงการประเมินค่าของงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน รวมไปถึงมโนทัศน์พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการจัดโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นในผลงานของนักเรียนคิดให้สูงขึ้น

3.2 งานวิจัยในประเทศไทย

สุรินทร สวนทอง (2534: 105-108) ศึกษาผลของการฝึกสมรรถภาพทางสมองที่มีต่อทักษะการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ปีการศึกษา 2553 แบ่งเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม กลุ่มทดลองได้รับการฝึกสมรรถภาพทางสมอง ส่วนกลุ่มควบคุมไม่ได้รับการฝึกสมรรถภาพทางสมอง เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย คือ แบบฝึกสมรรถภาพทางสมองและแบบทดสอบวัดทักษะการคิดทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการฝึกสมรรถภาพทางสมองแบบเข้ม แบบปานกลาง และไม่ได้รับการฝึกสมรรถภาพทางสมอง มีทักษะการคิดทางคณิตศาสตร์ระดับความรู้ความจำอยู่ในระดับดีมาก ระดับปานกลาง และระดับต่ำ ตามลำดับ นักเรียนที่ได้รับการฝึกสมรรถภาพทางสมองแบบเข้ม แบบปานกลาง และไม่ได้รับการฝึกสมรรถภาพทางสมอง มีทักษะการคิดทางคณิตศาสตร์ระดับสูงกว่าความรู้ ความจำ อยู่ในระดับปานกลาง ระดับต่ำ และระดับต่ำสุด ตามลำดับ นักเรียนที่ได้รับการฝึกสมรรถภาพทางสมองแตกต่างกัน มีทักษะการคิดทางคณิตศาสตร์ระดับระดับความรู้ความจำ และระดับสูงกว่าความรู้ความจำ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

แวววลี สิริวรจรรยาดี (2548: บทคัดย่อ) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับ การเปรียบเทียบการสอนกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนกับการสอนแบบปกติ ประชากรได้แก่นักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ปีการศึกษา 2547 โรงเรียนแสนศิริอนุสรณ์ อำเภอเมือง จังหวัดบุรีรัมย์ จำนวน 40 คน โดยแบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม ใช้การสุ่มอย่างง่ายเป็นกลุ่มทดลอง 20 คน กลุ่มควบคุม 20คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ แผนการสอนแบบปกติ แบบทดสอบวัดกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ และแบบสอบถามความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ผลการวิจัยพบว่า กระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนทั้งสองกลุ่มหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนโดยการใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนสูงกว่านักเรียนที่เรียนโดยการสอนแบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

รุ่งทิวา คนการณ์ (2549: บทคัดย่อ) ศึกษาการใช้กิจกรรมการแก้ปัญหาปลายเปิดเพื่อพัฒนาหลักสูตรที่เน้นกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ กลุ่มเป้าหมายในการวิจัย คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนกู่แก้ววิทยา สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาอุดรธานี เขต 3 ประจำภาคเรียนที่ 1 จำนวน 2 ห้องเรียน ห้องเรียนละ 44 คน โดยแต่ละห้องเรียนแบ่งเป็น 8 กลุ่มๆ ละ 5–6 คน ตามความสมัครใจของนักเรียน โดยครูนำเสนอปัญหา (Posing) และจัดอุปกรณ์ให้กลุ่มเป้าหมายทำกิจกรรมการแก้ปัญหาปลายเปิดร่วมกันในกลุ่ม ในระหว่างที่กลุ่มเป้าหมายทำ

กิจกรรมการแก้ปัญหานี้ มีการบันทึกเทปเสียงและวีดีทัศน์ในชั้นเรียนตลอดเวลา การวิเคราะห์ข้อมูลใช้วิธีการบรรยายเชิงวิเคราะห์ตามกรอบเชิงทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์โดยเน้นกระบวนการนำเสนอของเลช (Lesh, 1979 อ้างถึงใน ศิริมาส ศรีลำดวน, 2546) ผลการวิจัยพบว่า กระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะกระบวนการนำเสนอ พบว่า การออกเสียง (Verbal symbols) เป็นวิธีการที่นักเรียนใช้เป็นตัวแทนแนวคิดทางคณิตศาสตร์มากที่สุด กล่าวคือ ในระหว่างการแก้ปัญหา สมาชิกในกลุ่มส่วนใหญ่ได้ร่วมกันเสนอแนวคิดโดยการออกเสียงเป็นภาษาถิ่นที่เกี่ยวข้องกับบริบทในชีวิตจริง พร้อมทั้งมีการใช้อุปกรณ์ช่วยในการวาดรูป จากนั้นจึงนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ออกมาในรูปของการเขียน เพื่อลองผิดลองถูกและตรวจสอบข้อความคาดการณ์ที่เกิดขึ้นในระหว่างการแก้ปัญหา และในช่วงนำเสนอผลงานนักเรียนใช้การออกเสียงหรือคำพูด เพื่อเป็นตัวแทนแนวคิดทางคณิตศาสตร์อีกครั้ง

กิตติศักดิ์ ใจอ่อน (2550: บทคัดย่อ) ศึกษาการพัฒนากระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนด้วยแผนการสอนแบบเปิดที่เน้นการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad โดยใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพเน้นการวิเคราะห์โปรโตคอล (Protocol Analysis) และการบรรยายเชิงวิเคราะห์ (Analytic Description) ผลการวิจัยพบว่า การใช้แผนการสอนแบบเปิดที่เน้นการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) สะท้อนให้เห็นลักษณะกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ในด้านต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

1. การสำรวจ คือ การอาศัยการเคลื่อนไหวองค์ประกอบของรูปเรขาคณิตโดยใช้โปรแกรม GSP ทำให้นักเรียนสามารถสำรวจความสัมพันธ์ขององค์ประกอบของรูปเรขาคณิตได้ ซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นของการแก้ปัญหาคิดเป็น 83.33 เปอร์เซ็นต์ของสถานการณ์ปัญหา

2. การให้เหตุผล คือ จากการอาศัยการเปลี่ยนแปลงของรูปเรขาคณิตที่สร้างขึ้นโดยใช้โปรแกรม GSP ทำให้นักเรียนสามารถให้เหตุผลกับการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นซึ่งเกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์ขององค์ประกอบของรูปเรขาคณิตคิดเป็น 100 เปอร์เซ็นต์ของสถานการณ์ปัญหา

3. การตรวจสอบ คือ ก่อนการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับเรขาคณิตในสถานการณ์ปัญหาต่าง ๆ ที่กำหนดให้หรือหลังจากที่แก้ปัญหาไปได้ระยะหนึ่งนักเรียนตรวจสอบแนวคิดทุกครั้งโดยใช้คำสั่งที่สร้างขึ้นโดยโปรแกรม GSP คิดเป็น 50 เปอร์เซ็นต์ของสถานการณ์ปัญหา

4. การแก้ปัญหาได้อย่างหลากหลาย คือ นักเรียนมีพฤติกรรมในการแก้ปัญหาโดยหาวิธีการให้ได้มากกว่าหนึ่งวิธีและมีความแตกต่างกันตามเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหาโดยมีเหตุผลประกอบ คิดเป็น 100 เปอร์เซ็นต์ของสถานการณ์ปัญหา

รุ่งทิวา นาบำรุง (2550: บทคัดย่อ) ได้ศึกษาและวิเคราะห์วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เรื่องการคูณและการหารจำนวนนับของนักเรียนที่มีอายุตั้งแต่ 7 - 10 ปี จากการศึกษาพบว่า นักเรียนสามารถแสดงการคิดเชิงคณิตศาสตร์ตามธรรมชาติได้อย่างหลากหลาย โดยนิยมใช้การนับดำเนินการแก้ปัญหามากที่สุด รองลงมาคือการบวก/การลบ และการใช้ตัวแบบใช้การนับจำนวนทั้งหมดจากหนึ่งจนถึงผลรวม โดยวิธีการนับมีทั้งใช้การวาดภาพหรือใช้ตัวแบบ สำหรับการให้เหตุผลนักเรียนมองเห็นโครงสร้างที่คล้ายคลึงกับปัญหาที่ผ่านมา สามารถระลึกได้ทันทีว่าปัญหานั้นคล้ายกับปัญหาเดิม สามารถใช้การประมาณหรือการลองผิดลองถูกเพื่อหาคำตอบบอกได้ว่าคำตอบที่ได้มาของตนเองสมเหตุสมผลหรือไม่ ส่วนการนำเสนอตัวแทนความคิดพบว่านักเรียนสามารถนำเสนอตัวแทนความคิดได้หลากหลายทั้งในรูปคำพูด ผ่านสถานการณ์ที่สัมผัสได้โดยอาจใช้ตัวแบบ ผ่านสถานการณ์ที่ใช้ภาพเป็นสื่อ หรือผ่านสถานการณ์ที่ใช้สัญลักษณ์ โดยการนำเสนอตัวแทนความคิดนี้จะขึ้นอยู่กับวุฒิภาวะ หรือความสามารถทางภาษาของนักเรียนเป็นสำคัญ และพบว่า นักเรียนมีลักษณะเฉพาะของการคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นของตนเองใช้การหยั่งรู้ด้วยตนเอง สามารถแสดงการคิดโดยธรรมชาติของตนเองได้ทั้งที่เป็นเรื่องที่ไม่คุ้นเคยและยังไม่ได้เรียนมา และการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนมีทั้งในระดับที่ต่ำจนถึงระดับที่สูง

จากการศึกษางานวิจัยต่างประเทศและในประเทศในเรื่องการคิดเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า การคิดเชิงคณิตศาสตร์ สามารถศึกษาและพัฒนาผ่านการแก้ปัญหา ซึ่งในการพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์สามารถทำได้หลากหลายวิธีด้วยกัน อาทิเช่น การสอนแบบเปิด การใช้สื่อเทคโนโลยี และการใช้เกม ส่วนในการประเมินการการคิดเชิงคณิตศาสตร์สามารถทำได้หลายวิธี ได้แก่ ใช้แบบทดสอบ การใช้คำถาม การสัมภาษณ์ และการสังเกตพฤติกรรม