

## บทที่ 4

### บทสรุป

จากทฤษฎีบท 3.4.1 จะเห็นว่าผลที่ได้ครอบคลุมทฤษฎีบท 1.1.4 ของ Goldsmith และคณะ ซึ่งแสดงไว้ดังนี้

ให้  $p \geq 6$  ถ้า  $\sigma^{(2)}(G) \geq 2p - \binom{4}{2} = 2p - 6 > p - 1$  แล้ว  $\lambda^{(2)}(G) = \sigma^{(2)}(G)$

### 4.1 ภาพที่ชัดเจนของทฤษฎีบท 3.4.1

จะหากราฟ  $G$  ที่มีผลการแยกเป็นภาพที่ชัดเจนของทฤษฎีบท 3.4.1

โดยที่  $\lambda^{(k)}(G) = \sigma^{(k)}(G)$  และ  $\sigma^{(k)}(G) = kp - \binom{k+2}{2}$

สำหรับจำนวนเต็ม  $k$  ซึ่ง  $k \geq 3$  พิจารณากราฟ  $K_p$  ซึ่ง  $p \geq 2k+2$  และมีจุดเป็น  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_{2k}, v_{2k+1}, v_{2k+2}, \dots, v_p$  จะสร้างกราฟ  $G$  จากการลบด้านบางด้านของ  $K_p$  ดังนี้

$$G = K_p - \{v_1 v_{k+1}, v_2 v_{k+2}, v_3 v_{k+3}, \dots, v_k v_{2k}, v_1 v_{2k+1}\}$$

จากการสร้างกราฟ  $G$  จะได้ จุดที่มีดีกรี  $p-3$  มีจำนวน 1 จุด คือ  $v_1$

จุดที่มีดีกรี  $p-2$  มีจำนวน  $2k$  จุด คือ  $v_2, v_3, \dots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_{2k}, v_{2k+1}$

จุดที่มีดีกรี  $p-1$  มีจำนวน  $p-(2k+1)$  จุดคือ  $v_{2k+2}, \dots, v_p$

$$4.1.1 \text{ จะแสดงว่า } \lambda^{(k)}(G) = \delta^{(k)}(G) = kp - \binom{k+2}{2}$$

เนื่องจาก  $p \geq 2k+2$  และ  $k \geq 3$  และ  $\delta(G) = \deg_G(v_1) = p-3$

จะได้  $\delta(G) = \deg_G(v_1) = p-3 > \frac{p+k-2}{2}$  โดยทฤษฎีบท 2.2.3 จะได้

$\lambda^{(k)}(G) = \delta^{(k)}(G)$  ต่อไปจะแยก  $G$  แบบ obvious  $k+1$  separation

กำหนดให้  $A$  เป็นเซตใด ๆ ซึ่ง  $A \subset V(G)$  และ  $|A| = k$  และให้  $v_{i_q}, v_{i_r}$

เป็นสองจุดใด ๆ ใน  $A$  และให้  $m, n$  และ  $r$  เป็นจำนวนจุดที่อยู่ใน  $A$  ที่มีดีกรี  $p-3$

$p-2$  และ  $p-1$  ตามลำดับ โดยที่  $0 \leq m \leq 1, 0 \leq r, m+n+r = k$

ถ้าลบด้านที่อื่นซึ่งติดกับจุดใน  $A$  ออก แล้วจำนวนด้านที่ลบออกเท่ากับ

$$\begin{aligned} m(p-3) + n(p-2) + r(p-1) &= \sum_{q=1}^k \sum_{t=1}^k \varepsilon(v_{1_q}, v_{1_t}) = \\ (m+n+r)p - 2(m+n+r) - m + r &= \sum_{q=1}^k \sum_{t=1}^k \varepsilon(v_{1_q}, v_{1_t}) = \\ kp - 2k - m + r &= \sum_{q=1}^k \sum_{t=1}^k \varepsilon(v_{1_q}, v_{1_t}) \quad , q < t \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ถ้า  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  ลบด้านที่อื่นซึ่งติดกับจุดใน  $A$  ออก แล้วจำนวนด้านที่ลบออกเท่ากับ  $(p-3) + (k-1)(p-2) - \binom{k}{2} = kp - 2k - 1 - \binom{k}{2}$   $\dots\dots\dots (2)$

เนื่องจาก  $0 \leq m \leq 1$  ,  $0 \leq r$  ,  $\binom{k}{2} \geq \sum_{q=1}^k \sum_{t=1}^k \varepsilon(v_{1_q}, v_{1_t})$  และจาก (1) , (2) จะได้

$$kp - 2k - 1 - \binom{k}{2} \leq kp - 2k - m + r - \sum_{q=1}^k \sum_{t=1}^k \varepsilon(v_{1_q}, v_{1_t})$$

$$\text{ดังนั้น } \delta^{(k)}(G) = kp - 2k - 1 - \binom{k}{2} = kp - \binom{k+2}{2}$$

4.1.2 จะแสดงว่ามี  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_k$  ซึ่ง

$$|S_1| = \deg_{H_0}(v_1), |S_2| = \deg_{H_1}(v_2), |S_3| = \deg_{H_2}(v_3), \dots, |S_k| = \deg_{H_{k-1}}(v_k)$$

เนื่องจาก  $p \geq 2k+2$  และ  $k \geq 3$  จะได้

$$\delta(G) = \deg_G(v_1) = p-3 > \frac{p-1}{2} \quad \text{โดยทฤษฎีบท 2.2.2 จะได้}$$

$$\delta(G) = \deg_G(v_1) = p-3 = |S_1| \quad \text{และให้ } S_1 \text{ เป็นเซตของด้านที่อื่นซึ่งติดกับ } v_1$$

ต่อไปพิจารณา  $S_2, S_3, \dots, S_k$  ถ้ามี  $i \in \{2, 3, \dots, k\}$  ซึ่ง  $|S_i| = \deg_{H_{i-1}}(v_i)$  ให้  $i$

ตัวแรกซึ่ง  $|S_{i'}| = \deg_{H_{i'-1}}(v_{i'})$  เป็น  $i'$  เป็นผลให้  $|S_{i'}| = \deg_{H_{i'-1}}(v_{i'})$

ทุก  $i = 2, \dots, i'-1$  จะได้ว่ากราฟ  $H_{i'-1}$  ประกอบด้วย  $i'-1$  ทรีเวียลคอมโพเนนท์กับ 1 นอนทรีเวียลคอมโพเนนท์ ดังนั้นจำนวนจุดในนอนทรีเวียลคอมโพเนนท์เท่ากับ

$$p - (i' - 1) \text{ จุด} \quad \text{เนื่องจาก } |S_{i'}| \leq \deg_{H_{i'-1}}(v_{i'}) \text{ ดังนั้น}$$

$$|S_{i'}| < \deg_{H_{i'-1}}(v_{i'}) \quad \dots\dots\dots (3)$$

เนื่องจาก การสร้างกราฟ  $G$  คู่จุด  $v_i, v_{k+i}$  ,  $i = 1, 2, \dots, k$  มีจำนวน  $k$  คู่ และจำนวนทรีเวียลคอมโพเนนท์ของ  $H_{i'-1}$  มีจำนวน  $i'-1$  ซึ่ง  $i'-1 < k$  ดังนั้นจะมี

คู่จุด  $v_{i'}/v_{k+i'}$ ,  $i' \in \{2, 3, \dots, k\}$  ในอนุตรเวียลคอมโพเนนท์ของกราฟ  $H_{i'-1}$

จากการสร้าง  $G$  จุด  $v_{i'}$  และ จุด  $v_{k+i'}$  ไม่ประชิดกันจะได้

$\deg_{H_{i'-1}}(v_{i'}) = \delta'(H_{i'-1}) = p - (i' + 1)$  เนื่องจาก  $p \geq 2k + 2$ ,  $i' \leq k$ ,  $k \geq 3$  จะได้

$$\deg_{H_{i'-1}}(v_{i'}) = \delta'(H_{i'-1}) = p - (i' + 1) > \frac{p - (i' - 1) - 1}{2} \quad \text{โดยทฤษฎีบท 2.2.2}$$

$$\deg_{H_{i'-1}}(v_{i'}) = \delta'(H_{i'-1}) = |S_{i'}| \quad \text{ซึ่งขัดแย้งกับ (3)}$$

$$4.1.3 \text{ จะแสดงว่า } \sigma^{(k)}(G) = kp - \binom{k+2}{2}$$

จาก 4.1.2 จะได้ว่า  $|S_1| + |S_2| + |S_3| + \dots + |S_k|$  เท่ากับจำนวนด้านที่อินซิดেন্টกับจุดในเซต  $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_k\}$  จาก 4.1.1 และจากนิยามของ  $\sigma^{(k)}(G)$  จะได้

$$\sigma^{(k)}(G) \leq |S_1| + |S_2| + |S_3| + \dots + |S_k| = kp - \binom{k+2}{2} = \lambda^{(k)}(G) \quad \text{เนื่องจาก}$$

$$\lambda^{(k)}(G) \leq \sigma^{(k)}(G) \quad \text{ดังนั้น } \lambda^{(k)}(G) = kp - \binom{k+2}{2} = \sigma^{(k)}(G) \quad \square$$

## 4.2 ข้อเสนอแนะ

จากการศึกษาการแยกคอนเนคเตดกราฟ  $G$  โดยการลบด้านออก ทำให้กราฟที่เหลือเป็นคิสคอนเนคเตดกราฟ มีการแยกหลายวิธีและได้กล่าวรายละเอียดไว้แล้วในตอนต้น ซึ่งแต่ละวิธีก็ได้กำหนดตัวแปรเสริมเชิงกราฟแทนจำนวนด้านที่น้อยที่สุดที่ลบออกจากกราฟ  $G$  พร้อมทั้งแสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ของตัวแปรเสริมเชิงกราฟเหล่านั้น เช่น

แยกกราฟ  $G$  ออกเป็น 2 คอมโพเนนท์ จากทฤษฎีบท 2.2.1 ได้

$$\lambda(G) \leq \delta(G)$$

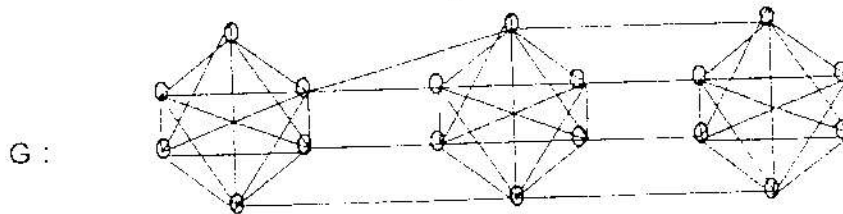
แยกกราฟ  $G$  ออกเป็น 3 คอมโพเนนท์ จากทฤษฎีบทประกอบ 1 ใน [4] ได้

$$\sigma^{(2)}(G) \leq \delta^{(2)}(G)$$

ผู้วิจัยพบว่าในการแยกคอนเนคเตดกราฟ  $G$  ออกเป็น 4 คอมโพเนนท์ นั้นความสัมพันธ์ของตัวแปรเสริมเชิงกราฟระหว่าง  $\sigma^{(3)}(G)$  กับ  $\delta^{(3)}(G)$  ค่าใดอาจมากกว่า หรือเท่ากันกับอีกค่าหนึ่งก็ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.2.1 จะแสดงให้เห็นว่า  $\sigma^{(3)}(G) > \delta^{(3)}(G)$

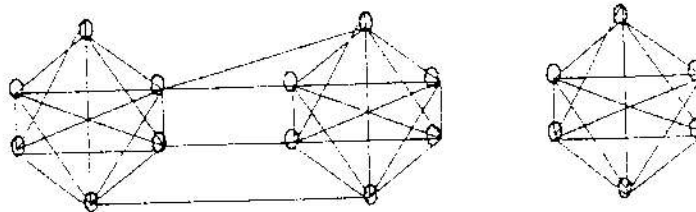
กำหนดให้กราฟ  $G$  ดังรูป 4.2.1



รูป 4.2.1

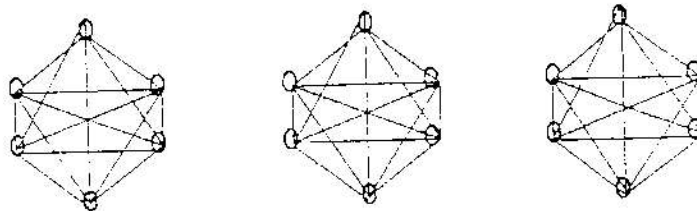
ต่อไปจะแยกด้วยวิธี greedy 4 separation

รูป 4.2.2 แสดง กราฟ  $G - S_1$  ซึ่ง  $|S_1| = 4$



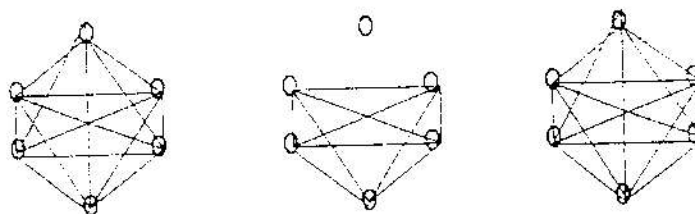
รูป 4.2.2

รูป 4.2.3 แสดง กราฟ  $G - (S_1 \cup S_2)$  ซึ่ง  $|S_2| = 4$



รูป 4.2.3

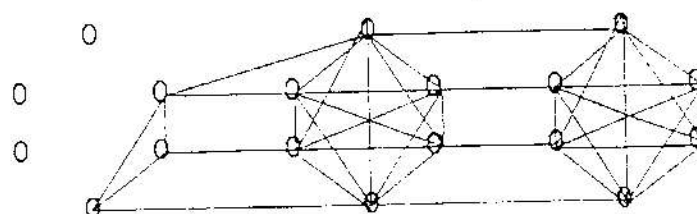
รูป 4.2.4 แสดงกราฟ  $G - (S_1 \cup S_2 \cup S_3)$  ซึ่ง  $|S_3| = 5$



รูป 4.2.4

จากการแยกกราฟ  $G$  ตามข้างต้น จะได้  $\sigma^{(3)}(G) = |S_1| + |S_2| + |S_3| = 4 + 4 + 5 = 13$

ต่อไปจะแยกด้วยวิธี obvious 4 separation ดังรูป 4.2.5



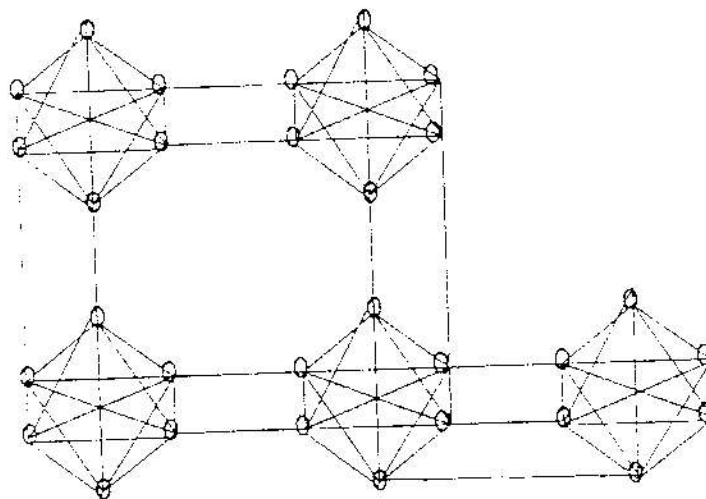
รูป 4.2.5

จะได้  $\delta^{(3)}(G) = 12$

ตัวอย่าง 4.2.2 จะแสดงให้เห็นว่า  $\sigma^{(3)}(G) < \delta^{(3)}(G)$

กำหนดให้กราฟ  $G$  ดังรูป 4.2.6

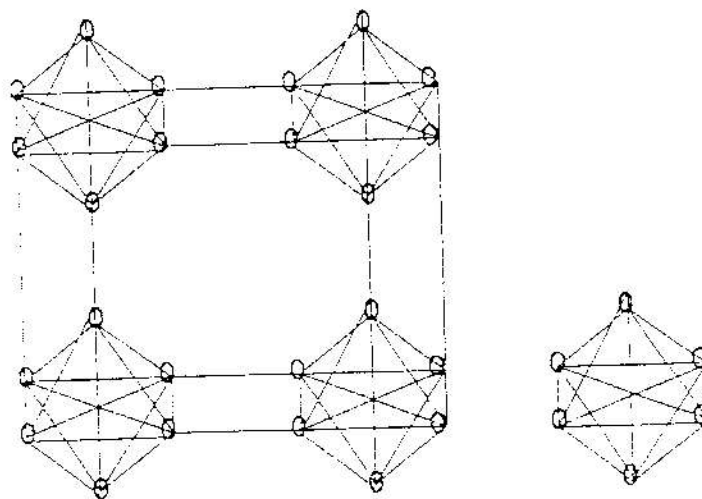
$G :$



รูป 4.2.6

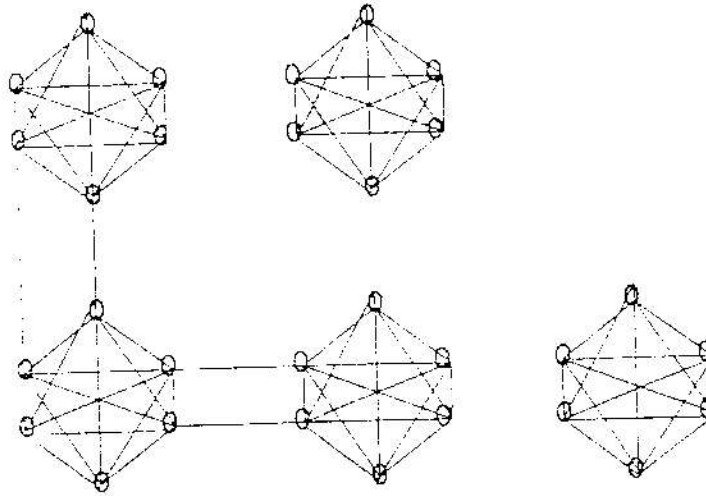
ต่อไปจะแยกด้วยวิธี greedy 4 separation รูป 4.2.7 แสดงกราฟ  $G - S_1$  ซึ่ง

$$|S_1| = 3$$



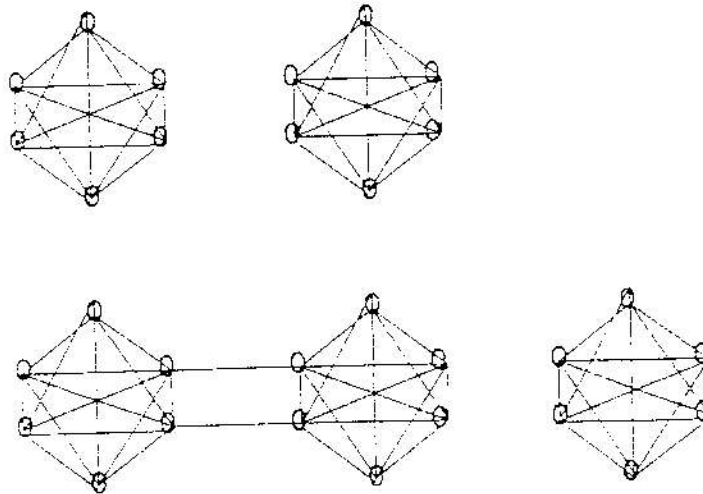
รูป 4.2.7

รูป 4.2.8 แสดง กราฟ  $G - (S_1 \cup S_2)$  ซึ่ง  $|S_2| = 4$



รูป 4.2.8

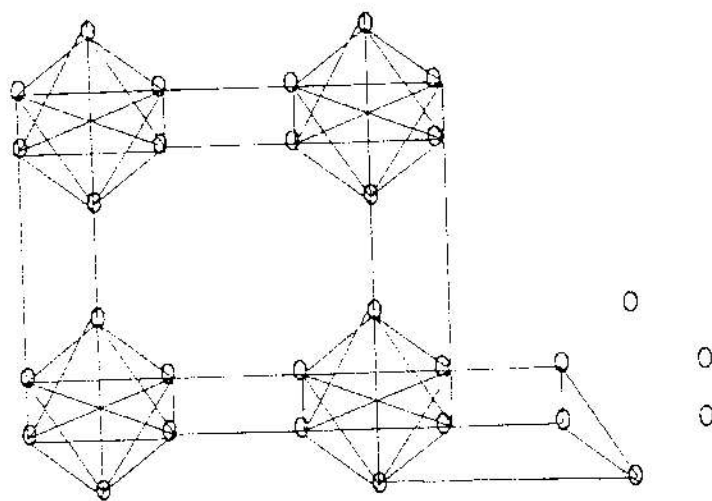
รูป 4.2.9 แสดง กราฟ  $G - (S_1 \cup S_2 \cup S_3)$  ซึ่ง  $|S_3| = 2$



รูป 4.2.9

จากการแยกกราฟ  $G$  ตามข้างต้น จะได้  $\sigma^{(3)}(G) = |S_1| + |S_2| + |S_3| = 3 + 4 + 2 = 9$

ต่อไปจะแยกด้วยวิธี obvious 4 separation ดังรูป 4.2.10

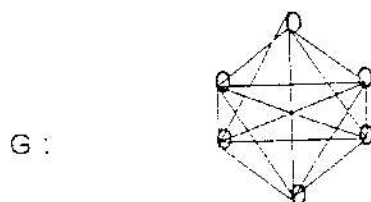


รูป 4.2.10

จะได้  $\delta^{(3)}(G) = 12$

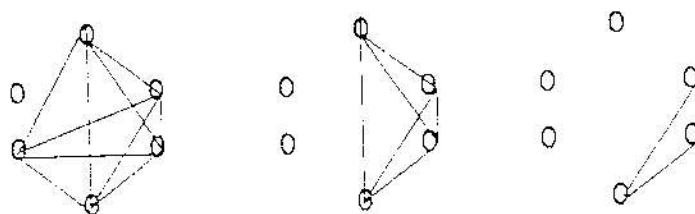
ตัวอย่าง 4.2.3 จะแสดงให้เห็นว่า  $\sigma^{(3)}(G) = \delta^{(3)}(G)$

กำหนดให้  $G$  ดังรูป 4.2.11



รูป 4.2.11

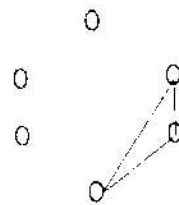
รูป 4.2.12 แสดงการแยกกราฟ  $G$  ด้วยวิธี greedy 4 separation



รูป 4.2.12

$G - S_1, |S_1| = 5$        $G - (S_1 \cup S_2), |S_2| = 4$        $G - (S_1 \cup S_2 \cup S_3), |S_3| = 3$   
 จะได้  $\sigma^{(3)}(G) = |S_1| + |S_2| + |S_3| = 5 + 4 + 3 = 12$

รูป 4.2.13 แสดงการแยกกราฟ  $G$  ด้วยวิธี obvious 4 separation



รูป 4.2.13

จะได้  $\delta^{(3)}(G) = 12$

ผู้วิจัยใคร่ขอเสนอแนะแนวทางแก่ผู้ที่สนใจศึกษาเรื่องนี้ โดยศึกษาหาความสัมพันธ์ของตัวแปรเสริมเชิงกราฟ ในกรณีทั่วไประหว่าง  $\sigma^{(k)}(G)$  กับ  $\delta^{(k)}(G)$  ซึ่งผลที่ได้อาจนำไปสู่การเลือกวิธีแยกที่เหมาะสมสำหรับแต่ละกราฟ  $G$