

บทที่ 3

ผลลัพธ์ที่สำคัญ

3.1 ความหมายของการแยกกราฟแบบ greedy k+1 separation

ในงานวิจัยนี้ต้องการแยกคอนเนคเตดกราฟ G เป็นคีสคอนเนคเตดกราฟโดยขยายแนวคิดของการแยกกราฟแบบ greedy triple separation ไปสู่กรณีทั่วไป คือ greedy k+1 separation ซึ่งมีความหมายดังนี้

ให้ G เป็นคอนเนคเตดกราฟที่มีอันดับ p และให้ k เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $1 \leq k \leq p-1$ แยกกราฟ G เป็น 2 คอมโพเนนต์ โดยลบด้านในเซต S_1 โดยที่ $S_1 \subset E(G)$, $|S_1| = \lambda(G)$ และ $G-S_1$ มี 2 คอมโพเนนต์ ต่อไปแยกคอมโพเนนต์ใดคอมโพเนนต์หนึ่งในสองคอมโพเนนต์ของกราฟ $G-S_1$ ออกเป็น 2 คอมโพเนนต์ โดยลบด้านออกน้อยที่สุดทำให้กราฟที่ได้มีคอมโพเนนต์เพิ่มขึ้น 1 คอมโพเนนต์ จำนวนด้านที่ลบออกนี้แทนด้วย $\lambda(G-S_1)$ และให้ S_2 เป็นเซตของด้านที่ลบออก จะได้ $G-(S_1 \cup S_2)$ มี 3 คอมโพเนนต์ ต่อไปแยกคอมโพเนนต์ใดคอมโพเนนต์หนึ่งในสามคอมโพเนนต์ของกราฟ $G-(S_1 \cup S_2)$ ออกเป็น 2 คอมโพเนนต์ โดยลบด้านออกน้อยที่สุดทำให้กราฟที่ได้มีคอมโพเนนต์เพิ่มขึ้น 1 คอมโพเนนต์ จำนวนด้านที่ลบออกนี้แทนด้วย $\lambda(G-(S_1 \cup S_2))$ และให้ S_3 เป็นเซตของด้านที่ลบออก จะได้ $G-(S_1 \cup S_2 \cup S_3)$ มี 4 คอมโพเนนต์ ดำเนินการแบบนี้ไปเรื่อยๆ จนถึงแยกคอมโพเนนต์ใดคอมโพเนนต์หนึ่งใน k คอมโพเนนต์ของกราฟ $G - \bigcup_{i=1}^{k-1} S_i$ ออกเป็น 2 คอมโพเนนต์ โดยลบด้านออกน้อยที่สุดทำให้กราฟที่ได้มีคอมโพเนนต์เพิ่มขึ้น 1 คอมโพเนนต์ จำนวนด้านที่ลบออกนี้แทนด้วย $\lambda(G - \bigcup_{i=1}^{k-1} S_i)$

และให้ S_k เป็นเซตของด้านที่ลบออก จะได้ $G - \bigcup_{i=1}^k S_i$ มี $k+1$ คอมโพเนนต์

การกระทำได้กล่าวข้างต้นเป็นการดำเนินการที่ก่อให้เกิดการลบ

$|S_1| + |S_2| + |S_3| + \dots + |S_k|$ ด้าน อย่างไรก็ตามค่าของ $|S_i|$ ขึ้นอยู่กับการเลือก

$S_1, S_2, \dots, S_{i-1}$ ทุก $i = 2, 3, \dots, k$ เมื่อเป็นเช่นนี้เราจึงกำหนดบทนิยามของตัวแปรเสริมเชิงกราฟที่แทนจำนวนด้านที่ลบออกจากกราฟ G เพื่อแยกกราฟ G ออกเป็น $k+1$

คอมโพเนนต์ ดังนี้

บทนิยาม 3.1.1 ให้ k เป็นจำนวนเต็ม ถ้า G เป็นคอนเนคเตดกราฟที่มีอันดับ p ซึ่ง $1 \leq k \leq p-1$ แล้วจะกำหนดให้

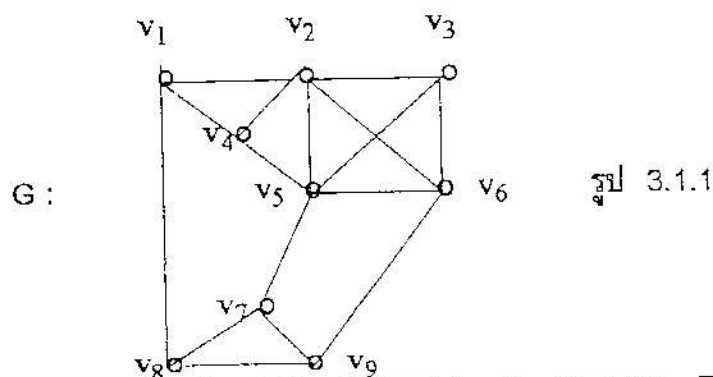
$$\sigma^{(k)}(G) = \min \left\{ \sum_{i=1}^k |S_i| \right\}$$

เมื่อค่าต่ำสุดนี้ครอบคลุม $S_1, S_2, \dots, S_{k-1}$ ทั้งหมด โดยที่ $S_i \subset E(G - \bigcup_{j=1}^{i-1} S_j)$

$|S_i| = \lambda(G - \bigcup_{j=1}^{i-1} S_j)$ และกราฟ $G - \bigcup_{j=1}^i S_j$ มี $i+1$ คอมโพเนนต์ เมื่อ $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$,

$i \geq 2$ และให้ $|S_1| = \lambda(G)$

ตัวอย่าง 3.1.1 ให้ G เป็นกราฟ ดังภาพ ถ้าแยกกราฟ G เป็น 4 คอมโพเนนต์ ($k=3$) สามารถเลือกเซต S_1, S_2, S_3 ที่ต่างกัน ตามตาราง



S_1	S_2	S_3	$ S_1 + S_2 + S_3 $
{v ₁ v ₂ , v ₁ v ₄ , v ₁ v ₈ }	{v ₂ v ₄ , v ₄ v ₅ }	{v ₅ v ₇ , v ₆ v ₉ }	3 + 2 + 2 = 7
		{v ₇ v ₈ , v ₈ v ₉ }	3 + 2 + 2 = 7
	{v ₅ v ₇ , v ₆ v ₉ }	{v ₂ v ₄ , v ₄ v ₅ }	3 + 2 + 2 = 7
		{v ₇ v ₈ , v ₈ v ₉ }	3 + 2 + 2 = 7
		{v ₇ v ₈ , v ₇ v ₉ }	3 + 2 + 2 = 7
		{v ₇ v ₉ , v ₈ v ₉ }	3 + 2 + 2 = 7
	{v ₇ v ₈ , v ₈ v ₉ }	{v ₂ v ₄ , v ₄ v ₅ }	3 + 2 + 2 = 7
		{v ₅ v ₇ , v ₇ v ₉ }	3 + 2 + 2 = 7
		{v ₅ v ₇ , v ₆ v ₉ }	3 + 2 + 2 = 7
		{v ₇ v ₉ , v ₆ v ₉ }	3 + 2 + 2 = 7

S_1	S_2	S_3	$ S_1 + S_2 + S_3 $
$\{v_2v_3, v_3v_5, v_3v_6\}$	$\{v_1v_2, v_1v_4, v_1v_8\}$	$\{v_2v_4, v_4v_5\}$	$3 + 3 + 2 = 8$
		$\{v_5v_7, v_6v_9\}$	$3 + 3 + 2 = 8$
		$\{v_7v_8, v_8v_9\}$	$3 + 3 + 2 = 8$
	$\{v_4v_1, v_4v_2, v_4v_5\}$	$\{v_1v_2, v_1v_8\}$	$3 + 3 + 2 = 8$
	$\{v_6v_2, v_5v_6, v_6v_9\}$	$\{v_5v_7, v_1v_8\}$	$3 + 3 + 2 = 8$
		$\{v_7v_9, v_8v_9\}$	$3 + 3 + 2 = 8$
	$\{v_7v_8, v_5v_7, v_7v_9\}$	$\{v_1v_8, v_6v_9\}$	$3 + 3 + 2 = 8$
		$\{v_1v_8, v_8v_9\}$	$3 + 3 + 2 = 8$
		$\{v_6v_9, v_8v_9\}$	$3 + 3 + 2 = 8$
	$\{v_8v_7, v_8v_1, v_8v_9\}$	$\{v_1v_2, v_1v_4\}$	$3 + 3 + 2 = 8$
		$\{v_5v_7, v_6v_9\}$	$3 + 3 + 2 = 8$
		$\{v_5v_7, v_7v_9\}$	$3 + 3 + 2 = 8$
		$\{v_7v_9, v_6v_9\}$	$3 + 3 + 2 = 8$
	$\{v_9v_7, v_9v_8, v_9v_6\}$	$\{v_5v_7, v_1v_8\}$	$3 + 3 + 2 = 8$
		$\{v_1v_8, v_7v_8\}$	$3 + 3 + 2 = 8$
		$\{v_5v_7, v_7v_8\}$	$3 + 3 + 2 = 8$
		$\{v_2v_6, v_5v_6\}$	$3 + 3 + 2 = 8$
	$\{v_1v_8, v_5v_7, v_6v_9\}$	$\{v_1v_2, v_1v_4\}$	$3 + 3 + 2 = 8$
		$\{v_2v_6, v_5v_6\}$	$3 + 3 + 2 = 8$
		$\{v_7v_8, v_7v_9\}$	$3 + 3 + 2 = 8$
		$\{v_7v_8, v_8v_9\}$	$3 + 3 + 2 = 8$
		$\{v_7v_9, v_8v_9\}$	$3 + 3 + 2 = 8$
$\{v_1v_4, v_2v_4, v_4v_5\}$	$\{v_1v_2, v_1v_8\}$	$\{v_5v_7, v_6v_9\}$	$3 + 2 + 2 = 7$
		$\{v_7v_8, v_8v_9\}$	$3 + 2 + 2 = 7$
$\{v_5v_7, v_7v_8, v_7v_9\}$	$\{v_1v_8, v_8v_9\}$	$\{v_6v_9\}$	$3 + 2 + 1 = 6$

S_1	S_2	S_3	$ S_1 + S_2 + S_3 $
	$\{v_8v_9, v_6v_9\}$	$\{v_1v_8\}$	$3 + 2 + 1 = 6$
	$\{v_1v_8, v_6v_9\}$	$\{v_8v_9\}$	$3 + 2 + 1 = 6$
$\{v_7v_8, v_1v_8, v_8v_9\}$	$\{v_1v_4, v_1v_2\}$	$\{v_2v_4, v_4v_5\}$	$3 + 2 + 2 = 7$
		$\{v_5v_7, v_6v_9\}$	$3 + 2 + 2 = 7$
		$\{v_5v_7, v_7v_9\}$	$3 + 2 + 2 = 7$
		$\{v_6v_9, v_7v_9\}$	$3 + 2 + 2 = 7$
	$\{v_5v_7, v_7v_9\}$	$\{v_6v_9\}$	$3 + 2 + 1 = 6$
	$\{v_6v_9, v_7v_9\}$	$\{v_5v_7\}$	$3 + 2 + 1 = 6$
	$\{v_5v_7, v_6v_9\}$	$\{v_7v_9\}$	$3 + 2 + 1 = 6$
$\{v_7v_9, v_8v_9, v_6v_9\}$	$\{v_1v_8, v_8v_7\}$	$\{v_5v_7\}$	$3 + 2 + 1 = 6$
	$\{v_7v_5, v_7v_8\}$	$\{v_1v_8\}$	$3 + 2 + 1 = 6$
	$\{v_1v_8, v_5v_7\}$	$\{v_7v_8\}$	$3 + 2 + 1 = 6$
$\{v_1v_8, v_5v_7, v_6v_9\}$	$\{v_1v_2, v_1v_4\}$	$\{v_2v_4, v_4v_5\}$	$3 + 2 + 2 = 7$
		$\{v_7v_9, v_7v_8\}$	$3 + 2 + 2 = 7$
		$\{v_8v_7, v_8v_9\}$	$3 + 2 + 2 = 7$
		$\{v_7v_9, v_8v_9\}$	$3 + 2 + 2 = 7$
	$\{v_7v_8, v_7v_9\}$	$\{v_8v_9\}$	$3 + 2 + 1 = 6$
	$\{v_8v_7, v_8v_9\}$	$\{v_7v_9\}$	$3 + 2 + 1 = 6$
	$\{v_7v_9, v_8v_9\}$	$\{v_7v_8\}$	$3 + 2 + 1 = 6$

จากตาราง จะได้ $\sigma^{(3)}(G) = \min\{|S_1| + |S_2| + |S_3|\} = 6$

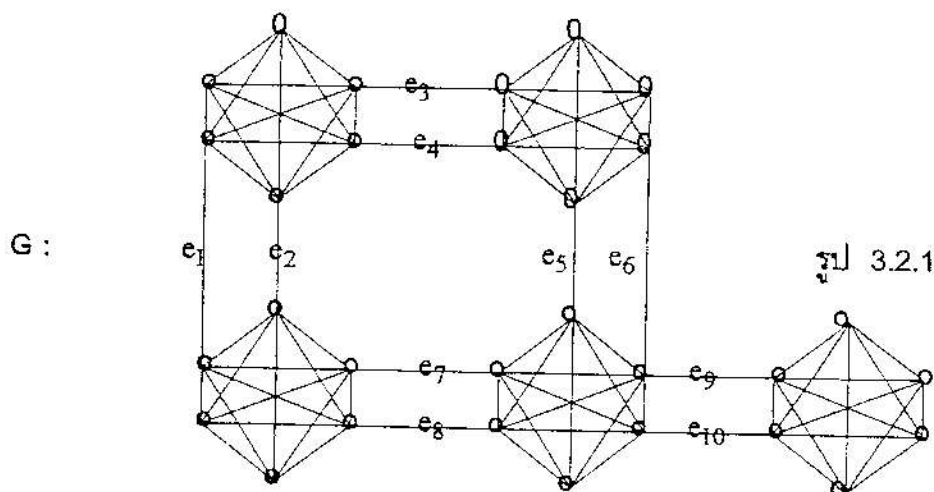
3.2 การแยกกราฟแบบ efficient $k+1$ separation

บทที่ 1 หัวข้อ 1.2 ได้กล่าวมาแล้วว่า Goldsmith และคณะ ได้กำหนดบทนิยามของ k^{th} order edge - connectivity และความหมายของการแยกกราฟแบบ efficient $k+1$ separation ดังนี้

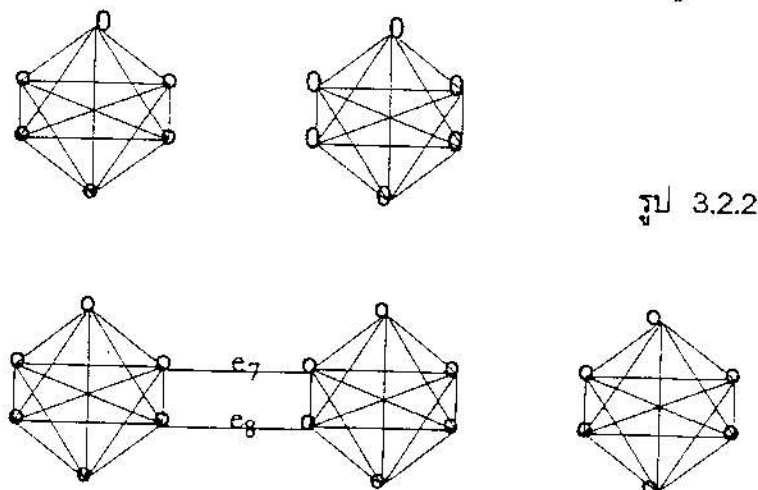
บทนิยาม 3.2.1 k^{th} order edge-connectivity หมายถึงจำนวนด้านที่น้อยที่สุดที่ลบออกจากคอนเนคเตดกราฟ G แล้วทำให้มีคอมโพเนนต์เพิ่มขึ้น k คอมโพเนนต์เขียนแทนด้วย $\lambda^{(k)}(G)$ การแยกกราฟ G ออกเป็น $k+1$ คอมโพเนนต์โดยลบด้านของ G ออก $\lambda^{(k)}(G)$ ด้าน เรียกว่า efficient $k+1$ separation

กำหนดให้ $T \subset E(G)$ โดยที่ $|T| = \lambda^{(k)}(G)$ และ $G - T$ มี $k+1$ คอมโพเนนต์ สำหรับแต่ละกราฟ G อาจจะมีเซต T หลายเซต ดังตัวอย่างต่อไปนี้

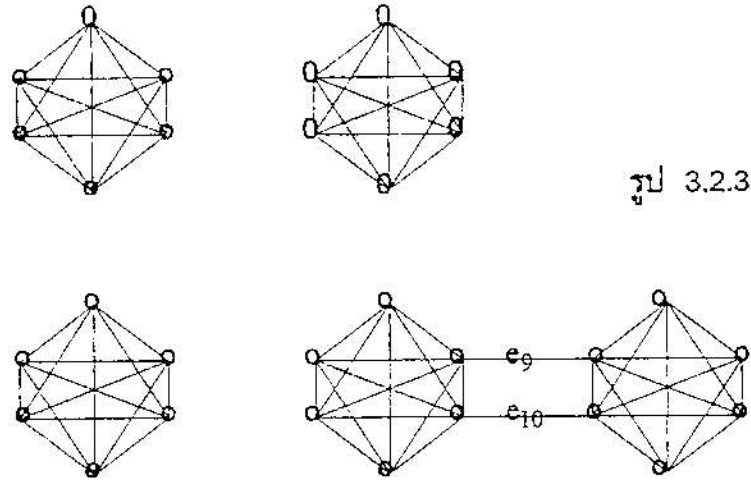
ตัวอย่าง 3.2.1 กำหนดให้กราฟ G ดังภาพ ถ้าแยกกราฟ G ออกเป็น 4 คอมโพเนนต์โดยลบด้านออก $\lambda^{(3)}(G) = 8$ ด้าน จะแสดงให้เห็นว่ามีหลายเซต T



แยกโดยเซต T แบบที่ 1 $T = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_9, e_{10}\}$ ได้ดังรูป 3.2.2



แยกโดยเซต T แบบที่ 2 $T = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ ได้ดังรูป 3.2.3



รูป 3.2.3

จะกำหนดสัญลักษณ์ที่เกี่ยวข้องกับการแยกกราฟแบบ efficient $k+1$ separation เพิ่มเติม ดังนี้

สำหรับคอมโพเนนต์ A ใดๆ ของกราฟ $G-T$ ซึ่งมีจำนวน $k+1$ คอมโพเนนต์ จะเขียนแทนเป็น $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{k+1}$ โดยกำหนดตามลำดับ และเป็นไปตามเงื่อนไขต่อไปนี้

จะกำหนดเป็น A_1 เมื่อ

$$|E_G(V(A_1), V(G - V(A_1)))| \leq |E_G(V(A), V(G - V(A)))|$$

สำหรับทุกคอมโพเนนต์ A ที่ต่างจาก A_1

จะกำหนดเป็น A_2 เมื่อ

$$|E_G(V(A_2), V(G - V(A_1 \cup A_2)))| \leq |E_G(V(A), V(G - V(A_1 \cup A)))|$$

สำหรับทุกคอมโพเนนต์ A ที่ต่างจาก A_2, A_1

จะกำหนดเป็น A_3 เมื่อ

$$|E_G(V(A_3), V(G - V(A_1 \cup A_2 \cup A_3)))| \leq |E_G(V(A), V(G - V(A_1 \cup A_2 \cup A)))|$$

สำหรับทุกคอมโพเนนต์ A ที่ต่างจาก A_3, A_2, A_1

.

.

.

จะกำหนดเป็น A_{k-1} เมื่อ

$$|E_G(V(A_{k-1}), V(G - V(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i)))| \leq |E_G(V(A), V(G - V(\bigcup_{i=1}^{k-2} A_i \cup A)))|$$

สำหรับทุกคอมโพเนนต์ A ที่ต่างจาก $A_{k-1}, \dots, A_3, A_2, A_1$

เนื่องจากจำนวนคอมโพเนนต์ของกราฟ $G-T$ มี $k+1$ คอมโพเนนต์ จึงเหลืออีก 2 คอมโพเนนต์ที่ยังไม่ได้กำหนด และสามารถให้คอมโพเนนต์ใดเป็น A_k หรือ A_{k+1} ก็ได้เพราะว่า

$$\left| E_G(V(A_k), V(G - V(\bigcup_{i=1}^k A_i))) \right| = \left| E_G(V(A_{k+1}), V(G - V(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \cup A_{k+1}))) \right|$$

เพื่อความสะดวกในการใช้สัญลักษณ์ จะกำหนดให้

$$T_1^0 = E_G(V(A_1), V(G - V(A_1))) \text{ เมื่อ } i = 1, 2, \dots, k+1$$

$$T_i^1 = T_i^0 - T_1^0 \text{ เมื่อ } i = 2, 3, \dots, k+1$$

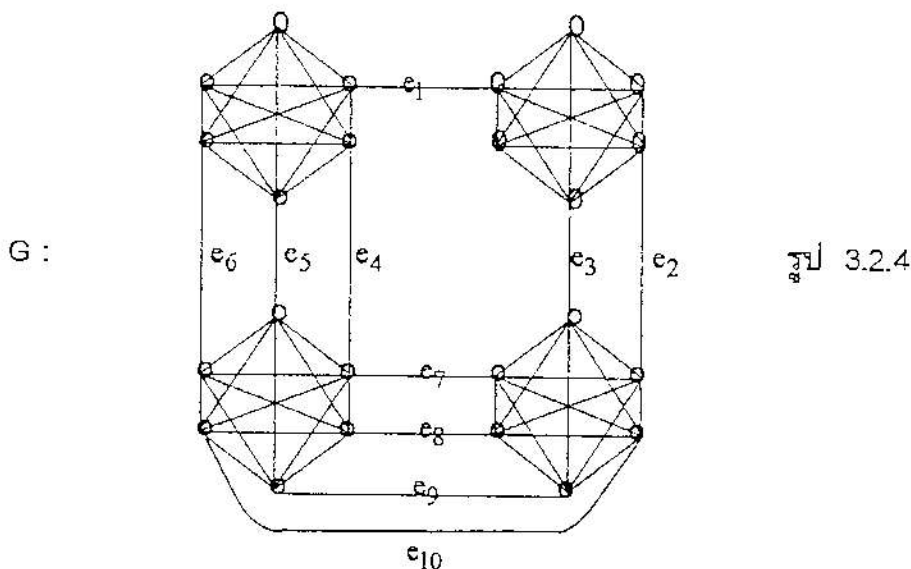
$$T_i^2 = T_i^0 - (T_1^0 \cup T_2^0) \text{ เมื่อ } i = 3, 4, \dots, k+1$$

$$T_i^3 = T_i^0 - (T_1^0 \cup T_2^0 \cup T_3^0) \text{ เมื่อ } i = 4, 5, \dots, k+1$$

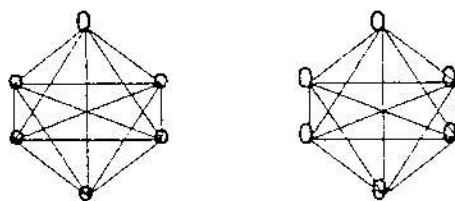
$$T_k^{k-1} = T_{k+1}^{k-1} = T_k^0 - (T_1^0 \cup T_2^0 \cup \dots \cup T_{k-1}^0)$$

สัญลักษณ์เหล่านี้จะนำไปใช้ในทฤษฎีบทประกอบต่อไป

ตัวอย่าง 3.2.2 กำหนดให้กราฟ G ดังภาพ จะแยกกราฟ G ออกเป็น 4 คอมโพเนนต์ ตามวิธี efficient 4 separation

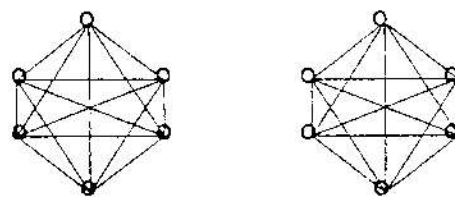


จะได้ $T = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$ ซึ่ง $|T| = 10$

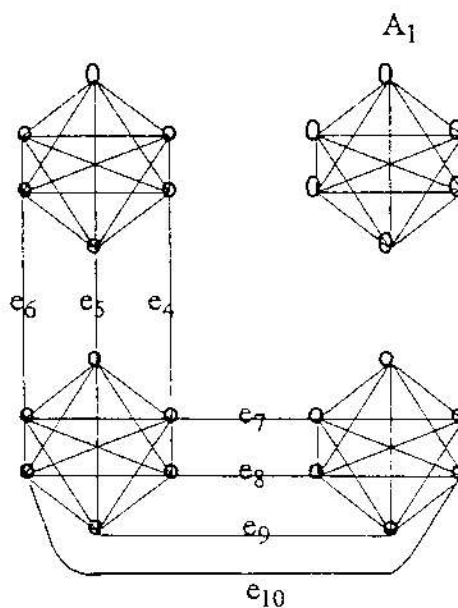


G - T :

รูป 3.2.5



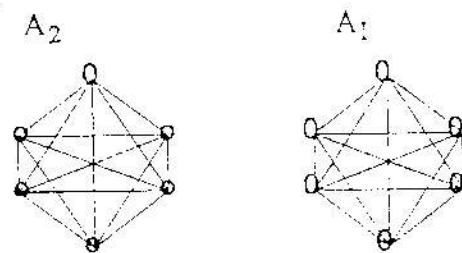
เลือกคอมโพเนนต์ A_1 ดังรูป 3.2.6



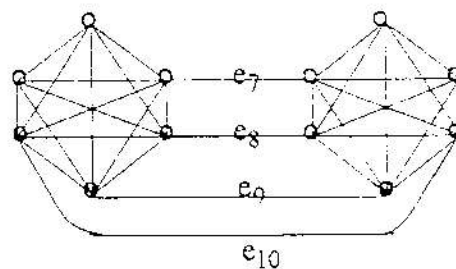
รูป 3.2.6

เพราะว่า $|E_G(V(A_1), V(G - V(A_1)))| = |\{e_1, e_2, e_3\}| = 3$ ส่วน A อื่นที่ต่างจาก A_1
 จะมี $|E_G(V(A), V(G - V(A)))| = |\{e_1, e_4, e_5, e_6\}| = 4$ หรือ
 $|E_G(V(A), V(G - V(A)))| = |\{e_2, e_3, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}| = 6$ หรือ
 $|E_G(V(A), V(G - V(A)))| = |\{e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}| = 7$
 ดังนั้น $|E_G(V(A_1), V(G - V(A_1)))| \leq |E_G(V(A), V(G - V(A)))|$ สำหรับทุก
 คอมโพเนนต์ A ที่ต่างจาก A_1

เลือกคอมโพเนนต์ A_2 ดังรูป 3.2.7



รูป 3.2.7

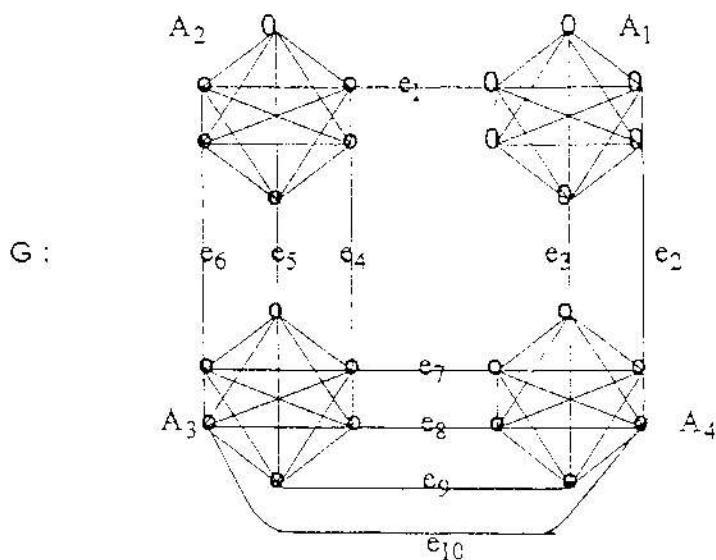


เพราะว่า $|E_G(V(A_2), V(G - V(A_1 \cup A_2)))| = |\{e_4, e_5, e_6\}| = 3$ ส่วน A อื่นที่
 ต่างจาก A_2, A_1 จะมี $|E_G(V(A), V(G - V(A_1 \cup A)))| = |\{e_7, e_8, e_9, e_{10}\}| = 4$
 ดังนั้น $|E_G(V(A_2), V(G - V(A_1 \cup A_2)))| \leq |E_G(V(A), V(G - V(A_1 \cup A)))|$
 สำหรับทุกคอมโพเนนต์ A ที่ต่างจาก A_2, A_1

เนื่องจากกราฟ $G-T$ มี 4 คอมโพเนนต์ จึงเหลืออีก 2 คอมโพเนนต์ที่ยังไม่ถูก
 กำหนด และสามารถกำหนดให้คอมโพเนนต์ใดเป็น A_3 หรือ A_4 ก็ได้ เพราะว่า

$$|E_G(V(A_3), V(G - V(A_1 \cup A_2 \cup A_3)))| = |E_G(V(A_4), V(G - V(A_1 \cup A_2 \cup A_4)))|$$

รูป 3.2.8 แสดงคอมโพเนนต์ทั้ง 4 คอมโพเนนต์ของกราฟ $G-T$



รูป 3.2.8

แล้วจะได้ $T_1^0 = \{e_1, e_2, e_3\}$, $T_2^0 = \{e_1, e_4, e_5, e_6\}$, $T_3^0 = \{e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$,
 $T_4^0 = \{e_2, e_3, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$, $T_2^1 = \{e_4, e_5, e_6\}$, $T_3^1 = \{e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$,
 $T_4^1 = \{e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$, $T_3^2 = \{e_7, e_8, e_9, e_{10}\} = T_4^2$

ข้อสังเกต จากความหมายข้างต้น สามารถแสดงได้ว่า

- 1 $T_{i-1}^i \cup T_{i+2}^i \cup \dots \cup T_k^i = (T_{i-1}^0 \cup T_{i+2}^0 \cup \dots \cup T_k^0) - (T_1^0 \cup T_2^0 \cup \dots \cup T_i^0)$
- 2 $T_1^0 \cup T_2^0 \cup \dots \cup T_k^{k-1} = T$

3.3 ทฤษฎีบทประกอบ

เนื่องจากจุดประสงค์สำคัญของการศึกษาการแยกกราฟแบบ greedy $k+1$ separation เพื่อต้องการหาเงื่อนไขที่จะทำให้จำนวนด้านที่ลบออกในการแยกกราฟออกเป็น $k+1$ คอมโพเนนต์ แบบ greedy $k+1$ separation เท่ากับแบบ efficient $k+1$ separation ซึ่งจะแสดงในทฤษฎีบท 3.4.1 และการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.4.1 ต้องอาศัยทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 3.3.1 ถ้า G เป็นคอนเนคเตดกราฟที่มีอันดับ p ซึ่ง $p \geq k+1$ แล้ว $|T_{i+1}^i \cup T_{i+2}^i \cup \dots \cup T_k^i|$ เป็นจำนวนด้านที่น้อยที่สุดที่ลบออกจากกราฟ $G - (T_1^0 \cup T_2^0 \cup \dots \cup T_i^{i-1})$ เพื่อให้จำนวนคอมโพเนนต์เพิ่มขึ้น $k-i$ คอมโพเนนต์ เมื่อ $i = 1, 2, \dots, k+1$

พิสูจน์ สมมติว่ามีเซต $M \subset E(G - (T_1^0 \cup T_2^0 \cup \dots \cup T_i^{i-1}))$ โดยที่ $|M| < |T_{i+1}^i \cup T_{i+2}^i \cup \dots \cup T_k^i|$ และทำให้กราฟ $G - (T_1^0 \cup T_2^0 \cup \dots \cup T_i^{i-1} \cup M)$ มีจำนวนคอมโพเนนต์เพิ่มขึ้น $k-i$ คอมโพเนนต์

เนื่องจากกราฟ $G - (T_1^0 \cup T_2^0 \cup \dots \cup T_i^{i-1})$ มีอย่างน้อย $i+1$ คอมโพเนนต์ ดังนั้นกราฟ $G - (T_1^0 \cup T_2^0 \cup \dots \cup T_i^{i-1} \cup M)$ มีอย่างน้อย $k+1$ คอมโพเนนต์ จะได้ว่า $|T_1^0 \cup T_2^0 \cup \dots \cup T_i^{i-1} \cup M| \leq |T_1^0 \cup T_2^0 \cup \dots \cup T_i^{i-1}| + |M| < |T_1^0 \cup T_2^0 \cup \dots \cup T_i^{i-1}| + |T_{i+1}^i \cup T_{i+2}^i \cup \dots \cup T_k^i| = |T| = \chi^{(k)}(G)$ ซึ่งขัดแย้งกับนิยามของ $\chi^{(k)}(G)$ □

จากบทนิยามของ $\chi^k(G)$ และของ $\sigma^k(G)$ จะได้ $\chi^k(G) \leq \sigma^k(G)$
 ต่อไปจะกล่าวถึงผลที่ได้จากการแยกกราฟ G ที่ทำให้ $\chi^k(G) < \sigma^k(G)$
 และจะนำผลนี้ไปช่วยพิสูจน์ทฤษฎีบทประกอบต่อไป

ทฤษฎีบทประกอบ 3.3.2 ให้ G เป็นคอนเนคเตดกราฟที่มีอันดับ p ซึ่ง $p \geq k+1$
 ถ้า $\chi^k(G) < \sigma^k(G)$ แล้วจะมี $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ ซึ่ง $|S_i| < |T_i^{i-1}|$

พิสูจน์ สมมุติว่า $\chi^k(G) < \sigma^k(G)$ และ $|S_i| \geq |T_i^{i-1}|$ ทุก $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$

เนื่องจาก $|S_1| \leq |T_1^0|$ ดังนั้น $|S_1| = |T_1^0|$ ให้ $S_1 = T_1^0$ จะได้ $G - T_1^0$ มี 2
 คอมโพเนนท์

เนื่องจาก $|S_2| \leq |T_2^1|$ ดังนั้น $|S_2| = |T_2^1|$ ให้ $S_2 = T_2^1$ จะได้ $G - (T_1^0 \cup T_2^1)$
 มี 3 คอมโพเนนท์

กระทำแบบนี้ไปเรื่อยๆ จนถึง $i = k-1$

เนื่องจาก $|S_{k-1}| \leq |T_{k-1}^{k-2}|$ ดังนั้น $|S_{k-1}| = |T_{k-1}^{k-2}|$ ให้ $S_{k-1} = T_{k-1}^{k-2}$ จะได้
 $G - (T_1^0 \cup T_2^1 \cup \dots \cup T_{k-2}^{k-3} \cup T_{k-1}^{k-2})$ มี k คอมโพเนนท์

โดยทฤษฎีบทประกอบ 3.3.1 จะได้ $|T_k^{k-1}|$ เป็นจำนวนด้านที่น้อยที่สุดที่ลบออกจาก
 กราฟ $G - (T_1^0 \cup T_2^1 \cup \dots \cup T_{k-1}^{k-2})$ ที่ทำให้จำนวนคอมโพเนนท์เพิ่มขึ้น 1 คอมโพเนนท์

ดังนั้น $|T_k^{k-1}| = |S_k| = \chi(G - (T_1^0 \cup T_2^1 \cup \dots \cup T_{k-1}^{k-2}))$ นั่นคือ

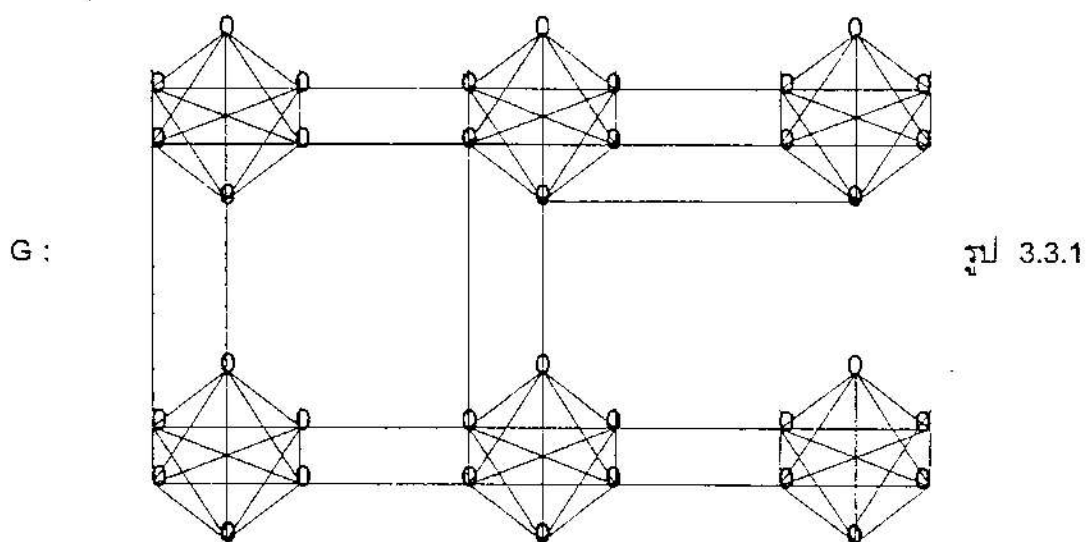
$$\sigma^k(G) \leq |S_1| + |S_2| + \dots + |S_k| = |T_1^0| + |T_2^1| + \dots + |T_k^{k-1}| = |T| = \chi^k(G)$$

ซึ่งขัดแย้งกับสมมุติฐาน $\square$

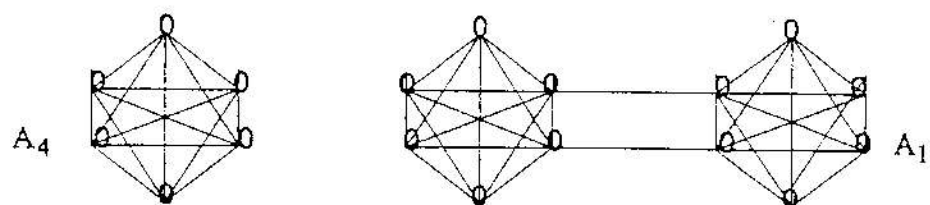
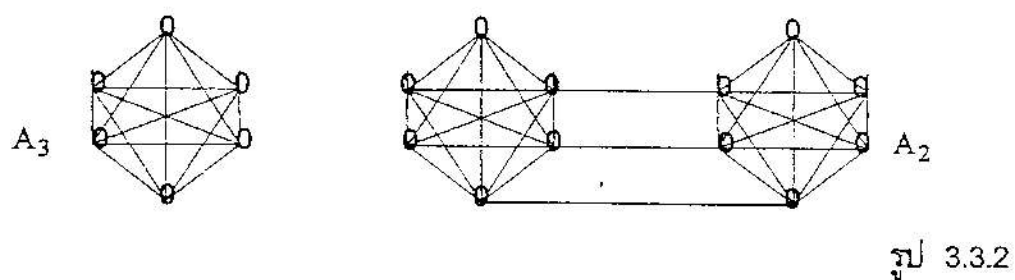
จากทฤษฎีบทประกอบ 3.3.2 จะได้ว่า ถ้า $\chi^k(G) < \sigma^k(G)$ แล้วจะมี
 $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ ซึ่งทำให้ $|S_i| < |T_i^{i-1}|$ ดังนั้นจะมี $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ ตัวแรกที่ทำให้
 $|S_i| < |T_i^{i-1}|$ กำหนดให้ i ตัวแรกที่เป็นดังข้างต้น เป็น i^*

การแยกกราฟ G ออกเป็น $k+1$ คอมโพเนนท์โดยวิธี efficient $k+1$
 separation โดยที่ $T \subset E(G)$, $|T| = \chi^k(G)$ และ $G - T$ มี $k+1$ คอมโพเนนท์นั้น
 เซต T อาจมีได้หลายเซต และแต่ละเซต T อาจทำให้ได้ค่า i^* แตกต่างกัน
 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

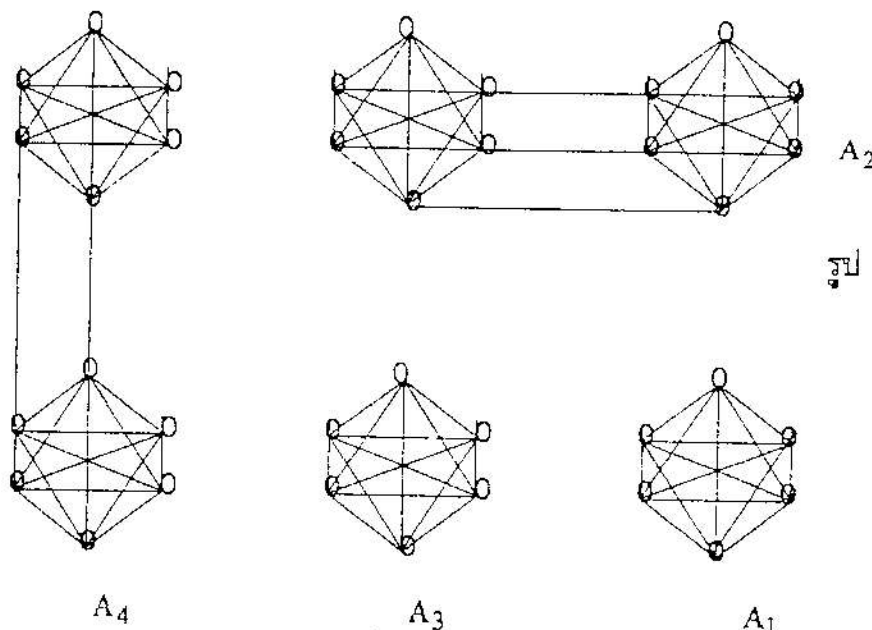
ตัวอย่าง 3.3.1 แยกกราฟ G ดังรูป 3.31 ออกเป็น 4 คอมโพเนนต์



$$\sigma^{(3)}(G) = |S_1| + |S_2| + |S_3| = 2 + 3 + 4 = 9$$



G-T แบบที่ 1 $\lambda^{(3)}(G) = |T| = 8$



G-T แบบที่ 2 $\chi^{(3)}(G) = |T| = 8$

จะเห็นว่า $\chi^{(3)}(G) < \sigma^{(3)}(G)$ กราฟ G-T แบบที่ 1 ได้ $i^* = 1$ ซึ่ง $|S_1| < |T_1^0|$ กราฟ G-T แบบที่ 2 ได้ $i^* = 2$ ซึ่ง $|S_2| < |T_2^1|$

ในกรณีที่ $\chi^{(k)}(G) < \sigma^{(k)}(G)$ ต่อไปเมื่อกล่าวถึง $i^* \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ ซึ่ง $|S_{i^*}| < |T_{i^*}^{i^*-1}|$ i^* จะหมายถึง i^* ที่กำหนดดังนี้

$$i^* = \max \{ i_T | i_T \text{ เป็นตัวแรกสำหรับแต่ละ } T \}$$

และเนื่องจาก i^* เป็นตัวแรก ซึ่ง $|S_{i^*}| < |T_{i^*}^{i^*-1}|$ ดังนั้น $|S_i| \geq |T_i^{i-1}|$ ทุก $i = 1, 2, \dots, i^*-1$ นั่นคือ $|S_i| = |T_i^{i-1}|$ ทุก $i = 1, 2, \dots, i^*-1$

เนื่องจาก $|S_{i^*}| < |T_{i^*}^{i^*-1}| \leq |T_{i^*}^{i^*-1}|$ ทุก $i = i^*+1, i^*+2, \dots, k+1$ ดังนั้น

$$S_{i^*} \cap E(A_i) \neq \emptyset, i \in \{i^*, i^*+1, \dots, k+1\} \text{ จะได้ว่า } S_{i^*} - (T_{i^*}^{i^*-1} \cup T_{i^*+1}^{i^*-1} \cup \dots \cup T_{k+1}^{i^*-1}) \neq \emptyset$$

ถ้ากำหนดให้ $|S_{i^*} - (T_{i^*}^{i^*-1} \cup T_{i^*+1}^{i^*-1} \cup \dots \cup T_{k+1}^{i^*-1})| = b$ จะได้ $b > 0$

เนื่องจาก $|E_G(V(A_i), V(A_j))| \geq 0$ สำหรับ i, j ที่ต่างกัน

$i, j \in \{i^*, i^*+1, \dots, k+1\}$ และถ้ากำหนดให้ $|E_G(V(A_i), V(A_j)) - S_{i^*}| = a_{ij}$ จะได้

$$a_{ij} \geq 0$$

ทฤษฎีบทประกอบต่อไปจะแสดงให้เห็นว่า $a_{ij} < b$ ทุก $i, j \in \{i^*, i^*+1, \dots, k+1\}$

ทฤษฎีบทประกอบ 3.3.3 ให้ G เป็นคอนเนคเตดกราฟที่มีอันดับ p ซึ่ง $p \geq k+1$ ถ้า $\chi^{(k)}(G) < \sigma^{(k)}(G)$ แล้ว $a_{ij} < b$ ทุก i, j ที่ต่างกัน $i, j \in \{i^*, i^*+1, \dots, k+1\}$

พิสูจน์ สมมติให้ $\chi^{(k)}(G) < \sigma^{(k)}(G)$ โดยทฤษฎีบทประกอบ 3.3.2 จะมี

$$i^* \in \{1, 2, \dots, k-1\} \text{ ซึ่ง } |S_{i^*}| < |T_{i^*}^{i^*-1}|$$

ถ้ามี $i', j' \in \{i^*, i^*+1, \dots, k+1\}$ ซึ่ง $a_{i'j'} \geq b$ เนื่องจากกราฟ

$G - ((T - E_G(V(A_{i'}), V(A_{j'}))) \cup S_{i^*})$ มีอย่างน้อย $k+1$ คอมโพเนนต์ และ

$$|(T - E_G(V(A_{i'}), V(A_{j'}))) \cup S_{i^*}| = |T| + b - a_{i'j'}$$

โดยนิยามของ T จะได้

$$|T| \leq |T| + b - a_{i'j'} \text{ ดังนั้น } a_{i'j'} = b \text{ นั่นคือ } |(T - E_G(V(A_{i'}), V(A_{j'}))) \cup S_{i^*}| = |T|$$

เป็นผลให้เซต $(T - E_G(V(A_{i'}), V(A_{j'}))) \cup S_{i^*}$ เป็นเซต T อีกแบบหนึ่ง แสดงว่า
สามารถเลือก T ใหม่ที่ทำให้ i^* มากกว่าเดิมได้ซึ่งขัดแย้งกับที่ i^* เป็นตัวที่มากที่สุด
ที่มีคุณสมบัติดังกล่าว □

เพื่อความสะดวกในการอ้างอิงต่อไปจะเขียนแทนกราฟ $G - \bigcup_{r=1}^i S_r$ ด้วย H_i

ซึ่งเป็นกราฟที่มี $i+1$ คอมโพเนนต์ $i = 1, 2, \dots, k$

สัญลักษณ์ข้างต้นนี้จะนำไปช่วยพิสูจน์ทฤษฎีบทประกอบต่อไป

ทฤษฎีบทประกอบ 3.3.4 ให้ G เป็นคอนเนคเตดกราฟที่มีอันดับ p ซึ่ง $p \geq k+1$

ถ้าแยกกราฟ G โดยวิธี greedy $k+1$ separation จนเป็นกราฟ H_k ที่ประกอบด้วย k ทรีเวียลคอมโพเนนต์กับอีก 1 คอมพลีตคอมโพเนนต์ แล้ว $\chi^{(k)}(G) = \sigma^{(k)}(G)$

พิสูจน์ สมมติให้คอนเนคเตดกราฟ G แยกโดยวิธี greedy $k+1$ separation จนเป็น
กราฟ H_k ที่ประกอบด้วย k ทรีเวียลคอมโพเนนต์กับอีก 1 คอมพลีตคอมโพเนนต์

ให้ k ทริแวลคอมโพเนนต์ของกราฟ H_k แทนด้วยจุด $v_1, v_2, \dots, v_k$ กับอีก 1 คอมพลีตคอมโพเนนต์แทนด้วย K_{p-k} และให้ u_i เป็นจุด ซึ่ง $u_i \in V(K_{p-k})$, $i \in \{1, 2, \dots, p-k\}$ และกำหนดให้ B, C เป็นเซตของด้านใน G ซึ่ง $B \cup C = \bigcup_{i=1}^k S_i$ โดยที่ $B = \{v_i v_j | i, j \in \{1, 2, \dots, k\}, i \neq j\}$ และ

$$C = \{v_i u_j | i \in \{1, 2, \dots, k\}, j \in \{1, 2, \dots, p-k\}\}$$

จาก $B \cup C = (T \cap (B \cup C)) \cup (E(G-T) \cap (B \cup C))$ จะได้

$$\sigma^{(k)}(G) \leq |B \cup C| = |T \cap (B \cup C)| + |E(G-T) \cap (B \cup C)| \quad (1)$$

ต่อไปจะพิจารณาขอบเขตของจำนวน $|E(G-T) \cap (B \cup C)|$

กำหนดให้ $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n}$ เป็นคอมโพเนนต์ใน $G-T$ ซึ่งบรรจุจุด v_i , $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ เป็นจำนวน $c_1, c_2, \dots, c_n$ ตามลำดับ เมื่อ $1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$ โดยให้จุด $v_{i_{11}}, v_{i_{12}}, \dots, v_{i_{1c_1}} \in V(A_{i_1})$ และจุด $v_{i_{21}}, v_{i_{22}}, \dots, v_{i_{2c_2}} \in V(A_{i_2}) \dots$ และจุด $v_{i_{n1}}, v_{i_{n2}}, \dots, v_{i_{nc_n}} \in V(A_{i_n})$ และให้ u_i บรรจุใน $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n}$ เป็นจำนวน $m_1, m_2, \dots, m_n$ ตามลำดับ เมื่อ $m_i \geq 0$ ทุก $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ โดยให้จุด $u_{i_{11}}, u_{i_{12}}, \dots, u_{i_{1m_1}} \in V(A_{i_1})$ และจุด $u_{i_{21}}, u_{i_{22}}, \dots, u_{i_{2m_2}} \in V(A_{i_2}) \dots$ และจุด $u_{i_{n1}}, u_{i_{n2}}, \dots, u_{i_{nm_n}} \in V(A_{i_n})$

เนื่องจากจุด v_i มีจำนวน k จุด และจากการกำหนดให้ จะได้

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n = k \quad (2)$$

และเนื่องจาก $1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$ จะได้

$$c_1 + c_2 + \dots + c_{n-1} \geq n-1$$

ดังนั้น

$$c_n \leq k - n + 1 \quad (3)$$

จาก (2) และ (3) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |E(G-T) \cap (B \cup C)| &= |E_{G-T}(\{v_{i_{11}}\}, \{v_{i_{12}}\}, \dots, \{v_{i_{1c_1}}\})| + \\ &|E_{G-T}(\{v_{i_{21}}\}, \{v_{i_{22}}\}, \dots, \{v_{i_{2c_2}}\})| + \dots + |E_{G-T}(\{v_{i_{n1}}\}, \{v_{i_{n2}}\}, \dots, \{v_{i_{nc_n}}\})| \\ &+ |E_{G-T}(\{v_{i_{11}}, v_{i_{12}}, \dots, v_{i_{1c_1}}\}, \{u_{i_{11}}, u_{i_{12}}, \dots, u_{i_{1m_1}}\})| + \\ &|E_{G-T}(\{v_{i_{21}}, v_{i_{22}}, \dots, v_{i_{2c_2}}\}, \{u_{i_{21}}, u_{i_{22}}, \dots, u_{i_{2m_2}}\})| + \dots + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| E_{G-T}(\{v_{i_{n1}}, v_{i_{n2}}, \dots, v_{i_{nc_n}}\}, \{u_{i_{n1}}, u_{i_{n2}}, \dots, u_{i_{nm_n}}\}) \right| \leq \binom{c_1}{2} + \binom{c_2}{2} + \dots + \binom{c_n}{2} \\
& + c_1 m_1 + c_2 m_2 + \dots + c_n m_n \leq \frac{c_1(c_1-1)}{2} + \frac{c_2(c_2-1)}{2} + \dots + \frac{c_n(c_n-1)}{2} + \\
& (k-n+1)m_1 + (k-n+1)m_2 + \dots + (k-n+1)m_n \leq \frac{c_n(c_1-1)}{2} + \frac{c_n(c_2-1)}{2} + \dots + \\
& \frac{c_n(c_n-1)}{2} + (k-n+1)m_1 + (k-n+1)m_2 + \dots + (k-n+1)m_n = \\
& \frac{c_n((c_1-1) + (c_2-1) + \dots + (c_n-1))}{2} + (k-n+1)m_1 + (k-n+1)m_2 + \dots + (k-n+1)m_n \leq \\
& \frac{(k-n+1)(k-n)}{2} + (k-n+1)m_1 + (k-n+1)m_2 + \dots + (k-n+1)m_n \\
& = \binom{k-n+1}{2} + (k-n+1)m_1 + (k-n+1)m_2 + \dots + (k-n+1)m_n \quad (4)
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $G-T$ มี $k+1$ คอมโพเนนต์ ดังนั้นคอมโพเนนต์ใน $G-T$ ที่บรรจุเฉพาะจุด u_i มีจำนวน $k-n+1$ คอมโพเนนต์ ให้คอมโพเนนต์เหล่านั้นเป็น

$A_{i_{n+1}}, A_{i_{n+2}}, \dots, A_{i_{k+1}}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
& \chi^{(k)}(G) = |T| = \left| E_G(V(A_{i_1}), V(A_{i_2}), \dots, V(A_{i_n})) \right| + \\
& \left| E_G(V(A_{i_{n+1}}), V(A_{i_{n+2}}), \dots, V(A_{i_{k+1}})) \right| + \left| E_G(V(A_{i_1}) \cup V(A_{i_2}) \cup \dots \cup V(A_{i_n}), \right. \\
& \left. V(A_{i_{n+1}}) \cup V(A_{i_{n+2}}) \cup \dots \cup V(A_{i_{k+1}})) \right| \geq |T \cap (B \cup C)| + \binom{k-n+1}{2} + \\
& \left| E_G(\{u_{i_{11}}, u_{i_{12}}, \dots, u_{i_{1m_1}}\}, V(A_{i_{n+1}}) \cup V(A_{i_{n+2}}) \cup \dots \cup V(A_{i_{k+1}})) \right| + \\
& \left| E_G(\{u_{i_{21}}, u_{i_{22}}, \dots, u_{i_{2m_2}}\}, V(A_{i_{n+1}}) \cup V(A_{i_{n+2}}) \cup \dots \cup V(A_{i_{k+1}})) \right| + \dots + \\
& \left| E_G(\{u_{i_{n1}}, u_{i_{n2}}, \dots, u_{i_{nm_n}}\}, V(A_{i_{n+1}}) \cup V(A_{i_{n+2}}) \cup \dots \cup V(A_{i_{k+1}})) \right| \geq \\
& |T \cap (B \cup C)| + \binom{k-n+1}{2} + (k-n+1)m_1 + (k-n+1)m_2 + \dots + (k-n+1)m_n \quad (5)
\end{aligned}$$

จาก (1), (4) และ (5) จะได้ $\chi^{(k)}(G) \geq \sigma^{(k)}(G)$ เนื่องจาก $\chi^{(k)}(G) \leq \sigma^{(k)}(G)$ ดังนั้น $\chi^{(k)}(G) = \sigma^{(k)}(G)$ □

3.4 ผลลัพธ์ที่สำคัญ

ทฤษฎีบทที่จะกล่าวต่อไปเป็นเงื่อนไขที่จะทำให้จำนวนด้านที่ลบออกจากการแยกกราฟโดยวิธี greedy $k+1$ separation เท่ากับจำนวนด้านที่ลบออกจากการแยกกราฟโดยวิธี efficient $k+1$ separation

ต่อไปจะให้กราฟ H_0 หมายถึงกราฟ G และสำหรับคิสคอนเนคเตดกราฟ H_i ดิกรีที่น้อยที่สุดของจุดในอนทรีเวียลคอมโพเนนท์ของกราฟ H_i เขียนแทนด้วย $\delta'(H_i)$ ซึ่งจะนำไปใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไป

ทฤษฎีบท 3.4.1 ให้ G เป็นคอนเนคเตดกราฟที่มีอันดับ p ซึ่ง $p \geq k+4$ ถ้า

$$\sigma^{(k)}(G) \geq kp - \binom{k+2}{2} \text{ แล้ว } \lambda^{(k)}(G) = \sigma^{(k)}(G)$$

พิสูจน์ จะพิจารณาโดยแยกเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 จะแสดงว่า ถ้า $\lambda^{(k)}(G) < \sigma^{(k)}(G)$ แล้ว $|S_i| \leq p - (i+1)$

ทุก $i \in \{1, 2, \dots, k\}$

สมมติให้ $|S_i| > p - (i+1)$ สำหรับบาง $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ นั่นคือ $|S_i| \geq p - i$ โดยทฤษฎีบทที่ 2.2.1 จะได้ $|S_i| \leq \delta'(H_{i-1})$ และเนื่องจาก H_{i-1} มี i คอมโพเนนท์ ดังนั้นจำนวนจุดในอนทรีเวียลคอมโพเนนท์ของ H_{i-1} มีไม่เกิน $p - (i-1)$ จะได้ $\delta'(H_{i-1}) \leq p - i$ เพราะฉะนั้น $|S_i| = p - i$ ถ้า $i = 1$ แสดงว่ากราฟ G เป็นคอมพลิตกราฟ ถ้า $i = 1$ กราฟ H_{i-1} จะประกอบด้วย $i-1$ ทรีเวียลคอมโพเนนท์ กับ 1 คอมพลิตคอมโพเนนท์ จากทั้งสองกรณีถ้าดำเนินการแยกกราฟ H_{i-1} ด้วยวิธี greedy $k+1$ separation ต่อไป จะได้กราฟ H_k ที่ประกอบด้วย k ทรีเวียลคอมโพเนนท์ กับอีก 1 คอมพลิตคอมโพเนนท์ โดยทฤษฎีบทประกอบ 3.3.4 จะได้ $\lambda^{(k)}(G) = \sigma^{(k)}(G)$

ขั้นตอนที่ 2 จะแสดงว่า ถ้า $\lambda^{(k)}(G) < \sigma^{(k)}(G)$ แล้ว $|S_1| \leq p - 4$ หรือ

$$|S_{i^*}| \leq p - (i^* - 1) - 4, \quad i^* \in \{1, 2, \dots, k-1\}$$

ถ้า $|S_1| > p - 4$ และ $|S_{i^*}| > p - (i^* - 1) - 4$ นั่นคือ $|S_1| \geq p - 3$ และ

$$|S_{i^*}| \geq p - (i^* - 1) - 3, \quad i^* \in \{1, 2, \dots, k-1\}$$

2.1 จะแสดงว่ามี T ที่ทำให้กราฟ $G-T$ มีทรีเวียลคอมโพเนนต์อยู่จำนวน k คอมโพเนนต์

โดยสมมุติฐานและ $k+4 \leq p$ และทฤษฎีบท 2.2.1 จะได้

$$\frac{p+k-2}{2} \leq p-3 \leq |S_1| \leq \delta(G) \quad (1)$$

จาก (1) และโดยทฤษฎีบท 2.2.3 จะได้ว่ามี T ที่ทำให้กราฟ $G-T$ มี

$A_1, A_2, \dots, A_{k+1}$ เป็นทรีเวียลคอมโพเนนต์อยู่จำนวน k คอมโพเนนต์

$$2.2 \text{ จะแสดงว่า } |T_1^{i^*-1}| = p - (i^* - 1) - 2$$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 3.3.2 จะมี $i^* \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ ซึ่ง $|S_{i^*}| < |T_1^{i^*-1}|$

โดยที่ $|S_i| = |T_1^{i-1}|$ ทุก $i \in \{1, 2, \dots, i^*-1\}$ ให้ $T_1^0 = S_1, T_1^2 = S_2, \dots, T_1^{i^*-2} = S_{i^*-1}$

จากข้อ 2.1 จะได้ว่า $A_{i^*-1}, A_{i^*}, \dots, A_{k+1}$ มีทรีเวียลคอมโพเนนต์อยู่ $k+1-i^*$

คอมโพเนนต์ให้เป็นจุด $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{k+1-i^*}}$ เนื่องจาก $|S_{i^*}| < |T_1^{i^*-1}| \leq \deg_{H_{i^*-1}}(v_j)$

ทุก $j \in \{i_1, i_2, \dots, i_{k+1-i^*}\}$ จะได้ว่า $A_{i^*-1}, A_{i^*}, \dots, A_{k+1}$ มีนอนทรีเวียลคอมโพเนนต์

1 คอมโพเนนต์ให้เป็น A_{i^*} จะได้

$$|V(A_{i^*-1} \cup A_{i^*} \cup \dots \cup A_{k+1})| = p - (i^* - 1) \quad (2)$$

เนื่องจาก $i^* \leq k-1$ จะได้

$$i^* + 4 < k - 4 \leq p \quad (3)$$

จาก (2) และ (3) และสมมุติฐาน จะได้ว่า

$$\frac{p - (i^* - 1) - 1}{2} < p - (i^* - 1) - 3 \leq |S_{i^*}| \leq \delta'(H_{i^*-1}) \quad (4)$$

โดย (4) และทฤษฎีบท 2.2.2 จะได้ $|S_{i^*}| = \delta'(H_{i^*-1})$

เนื่องจาก $|S_{i^*}| < |T_1^{i^*-1}|$ จะมี $w \in V(A_{i^*})$ ซึ่ง $\deg_{H_{i^*-1}}(w) = \delta'(H_{i^*-1})$ และให้

S_{i^*} เป็นเซตของด้านที่อินซิเดนซ์กับ w ในกราฟ H_{i^*-1} เนื่องจาก

$$|V(A_{i^*}) - \{w\}| = p - k - 1 \text{ จะได้}$$

$$b = |E_{H_{i^*-1}}(\{w\}, V(A_{i^*}) - \{w\})| \leq p - k - 1 \quad (5)$$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 3.3.3 และ (5) จะได้

$$a_{ji'} = |E_{H_{i'-1}}(\{v_j\}, V(A_{i'}) - \{w\})| < b \leq p-k-1 \text{ ดังนั้น } a_{ji'} \leq p-k-2 \quad (6)$$

โดยสมมุติฐานและทฤษฎีบทประกอบ 3.3.2 จะได้

$$p-(i^*-1)-3 \leq |S_{i^*}| < |T_{i^*}^{i^*-1}| \leq \deg_{H_{i^*-1}}(v_j) \text{ ทุก } j \in \{i_1, i_2, \dots, i_{k+1-i^*}\} \\ \text{ดังนั้น } p-(i^*-1)-2 \leq \deg_{H_{i^*-1}}(v_j) \quad (7)$$

จะได้ว่า สำหรับทุก $j \in \{i_1, i_2, \dots, i_{k+1-i^*}\}$

$$\deg_{H_{i^*-1}}(v_j) = |E_{H_{i^*-1}}(\{v_j\}, \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{k+1-i^*}\} - \{v_j\})| + \\ |E_{H_{i^*-1}}(\{v_j\}, V(A_{i'}) - \{w\})| + |E_{H_{i^*-1}}(\{w\}, \{v_j\})| \quad (8)$$

$$\text{และ } |E_{H_{i^*-1}}(\{v_j\}, \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{k+1-i^*}\} - \{v_j\})| \leq k-(i^*-1)-1 \quad (9)$$

$$\text{และ } |E_{H_{i^*-1}}(\{w\}, \{v_j\})| \leq 1 \quad (10)$$

จาก (6), (7), (8), (9) และ (10) จะได้ สำหรับทุก $j \in \{i_1, i_2, \dots, i_{k+1-i^*}\}$,

$$p-(i^*-1)-2 \leq \deg_{H_{i^*-1}}(v_j) \leq (k-(i^*-1)-1) + (p-k-2) + 1 = p-(i^*-1)-2 \quad (11)$$

$$\text{ดังนั้น } |T_{i^*}^{i^*-1}| = \deg_{H_{i^*-1}}(v_j) = p-(i^*-1)-2$$

โดยสมมุติฐานและทฤษฎีบทประกอบ 3.3.2 และข้อ 2.2 จะได้

$$p-(i^*-1)-3 \leq |S_{i^*}| < |T_{i^*}^{i^*-1}| = \deg_{H_{i^*-1}}(v_j) = p-(i^*-1)-2 \text{ นั่นคือ} \\ |S_{i^*}| = p-(i^*-1)-3 \quad (12)$$

โดย (11) จะได้ว่า

$$(i) \ a_{ji'} = |E_{H_{i^*-1}}(\{v_j\}, V(A_{i'}) - \{w\})| = p-k-2 \text{ ทุก } j \in \{i_1, i_2, \dots, i_{k+1-i^*}\}$$

$$\text{และ } (ii) \ |E_{H_{i^*-1}}(\{w\}, \{v_j\})| = 1 \text{ สำหรับทุก } j \in \{i_1, i_2, \dots, i_{k+1-i^*}\}$$

$$\text{ดังนั้น } b = |E_{H_{i^*-1}}(\{w\}, V(A_{i'}) - \{w\})| = p-k-1 \quad (13)$$

$$\text{และ } |E_{H_{i^*-1}}(\{w\}, \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{k+1-i^*}}\})| = k-(i^*-1) \quad (14)$$

เนื่องจาก $|S_{i^*}| = \deg_{H_{i^*-1}}(w) = |E_{H_{i^*-1}}(\{w\}, V(A_{i^*}) - \{w\})| +$
 $|E_{H_{i^*-1}}(\{w\}, \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{k+1-i^*}}\})|$ และจาก (13), (14) จะได้ $|S_{i^*}| = p - (i^* - 1) - 1$
 ซึ่งขัดแย้งกับ (12) ดังนั้น $|S_1| \leq p - 4$ หรือ $|S_{i^*}| \leq p - (i^* - 1) - 4$

เนื่องจาก $|S_1| \leq p - 4$ หรือ $|S_{i^*}| \leq p - (i^* - 1) - 4$ ถ้า $|S_1| \leq p - 4$ เป็นเท็จ
 โดยขั้นตอนที่ 1 จะได้ $|S_1| \leq p - 2$ ถ้า $|S_{i^*}| \leq p - (i^* - 1) - 4$ เป็นเท็จ โดยขั้นตอนที่
 1 จะได้ $|S_{i^*}| \leq p - (i^* + 1)$ ดังนั้น

$$|S_1| + |S_{i^*}| \leq 2p - i^* - 5 \quad (15)$$

จากขั้นตอนที่ 1 และ (15) จะได้

$$\begin{aligned} \sigma^{(k)}(G) &\leq |S_1| + |S_2| + |S_3| + \dots + |S_{i^*-1}| + |S_{i^*}| + |S_{i^*+1}| + |S_{i^*+2}| + \dots + |S_k| \leq |S_1| + (p-3) + \\ &(p-4) + \dots + (p-i^*) + |S_{i^*}| + (p-(i^*+2)) + (p-(i^*+3)) + \dots + (p-(k+1)) \leq (2p-i^*-5) + (p-3) \\ &+ (p-4) + \dots + (p-i^*) + (p-(i^*+2)) + (p-(i^*+3)) + \dots + (p-(k+1)) = kp - \frac{(k+1)(k+2)}{2} - 1 \\ &= kp - \binom{k+2}{2} - 1 \end{aligned}$$

□