

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

2.1 บทนิยามพื้นฐาน

หัวข้อนี้จะกล่าวถึงบทนิยามพื้นฐานในวิชาทฤษฎีกราฟ เพื่อนำไปใช้ในการพิสูจน์ในบทต่อไป

กราฟ คือเซตของคู่อันดับ $(V(G), E(G))$ โดยที่ $V(G)$ เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $E(G)$ เป็นเซตของสับเซตที่มี 2 สมาชิกของ $V(G)$ เรียก $V(G)$ ว่าเซตของจุดของ G และเรียก $E(G)$ ว่าเซตของด้านของ G ในที่นี้จะศึกษาเฉพาะกรณี $V(G)$ เป็นเซตจำกัด

ให้ G เป็นกราฟ และ $\{u, v\}$ เป็นด้านของ G เนื่องจากเซต $\{u, v\}$ เท่ากับเซต $\{v, u\}$ ดังนั้นจะเขียนแทนด้าน $\{u, v\}$ ของ G ด้วย uv หรือ vu

ลูป (loop) คือด้านของ G ที่อยู่ในรูป vv เมื่อ $v \in V(G)$

มัลติเพิลเอดจ์ (multiple edge) คือด้านที่มากกว่าหนึ่งด้านซึ่งเชื่อมจุดคู่เดียวกัน

ซิมเปิลกราฟ (Simple graph) คือกราฟที่ไม่มีมัลติเพิลเอดจ์ และไม่มีลูป ในที่นี้จะศึกษาเฉพาะกราฟ G ที่เป็นซิมเปิลกราฟ

ถ้า uv เป็นด้านของ G แล้วจะกล่าวว่า u และ v เป็นจุดประชิดกัน (adjacent) และเรียกจุด u หรือจุด v ว่าเป็นจุดที่อินซิเดนท์ (incident) กับด้าน uv จะเรียกจำนวนด้านของกราฟ G ที่อินซิเดนท์กับจุด v ว่าดีกรี (degree) ของจุด v เขียนแทนด้วย $\deg_G(v)$ ค่าดีกรีที่น้อยที่สุดของจุดในกราฟ G เขียนแทนด้วย $\delta(G)$

จำนวนสมาชิกของเซต $V(G)$ เรียกว่าอันดับของกราฟ G เขียนแทนด้วย $|V(G)|$ และจำนวนด้านของ G เรียกว่าขนาดของ G เขียนแทนด้วย $|E(G)|$

ถ้า A, B เป็นเซตของจุดใน G เซตของด้านใน G ที่เชื่อมจุดใน A กับจุดใน B เขียนแทนด้วย $E_G(A, B)$ จำนวนด้านใน $E_G(A, B)$ เขียนแทนด้วย $|E_G(A, B)|$ ในกรณีทั่วไป ถ้า $B_1, B_2, \dots, B_n$ เป็นเซตของจุดใน G แล้ว

$\cup E_G(B_i, B_j)$, $i < j$, $I = \{1, 2, \dots, n\}$ เขียนแทนด้วย $E_G(B_1, B_2, \dots, B_n)$
 $(i, j) \in I \times I$

และจำนวนด้านใน $E_G(B_1, B_2, \dots, B_n)$ เขียนแทนด้วย $|E_G(B_1, B_2, \dots, B_n)|$

ถ้า G เป็นซิมเพลติกกราฟที่มี $|V(G)| = p$ และ $|E(G)| = \binom{p}{2}$ (ทุกจุดของ G ประชิดกัน) แล้วจะเรียก G ว่าคอมพลีตกราฟ (complete graph) จะเขียนแทนด้วย K_p และเรียก K_1 ว่าทริวีเอลกราฟ (trivial graph) กราฟที่ไม่เป็นทริวีเอลกราฟ จะเรียกว่านอนทริวีเอลกราฟ (nontrivial graph)

ให้ $G = (V(G), E(G))$ และ $G' = (V(G'), E(G'))$ เป็นกราฟ จะกล่าวว่า G' เป็นสับกราฟ (subgraph) ของ G ถ้า $V(G') \subset V(G)$ และ $E(G') \subset E(G)$ เขียนแทนด้วย $G' \subset G$

ให้ $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ เป็นจุดที่ต่างกันใน $V(G)$ ของกราฟ G และ $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n \in E(G)$ แล้ว $v_1 - v_n$ พาท (path) หมายถึงลำดับจำกัด $v_1, v_1v_2, v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}, v_{n-1}v_n, v_n$ ซึ่งอาจเขียนแทนด้วย $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$

จะเรียกกราฟ G ว่าคอนเนคเตดกราฟ (connected graph) ถ้าทุก 2 จุด u, v ใดๆของ G มี $u-v$ พาท ส่วนกราฟที่ไม่เป็นคอนเนคเตดกราฟจะเรียกว่า

ดิสคอนเนคเตดกราฟ (disconnected graph) ทริวีเอลกราฟเป็นคอนเนคเตดกราฟ

จะเรียกคอนเนคเตดสับกราฟที่มีขนาดใหญ่มากที่สุด (maximal connected subgraph) ของกราฟ G ว่าคอมโพเนนท์ (component) ของกราฟ G

ให้ G เป็นกราฟ ถ้า $A \subset E(G)$ แล้ว $G-A$ จะหมายถึงสับกราฟของ G ที่ได้จากการลบด้านใน A ออกจาก G ถ้า $B \subset V(G)$ แล้ว $G-B$ จะหมายถึงสับกราฟของ G ที่ได้จากการลบจุดใน B และด้านซึ่งอินซิเดนซ์กับจุดใน B ออกจาก G

ให้ G_1 และ G_2 เป็นกราฟ ยูเนียน (union) ของ G_1 และ G_2 คือกราฟ ซึ่งมีเซตของจุดเป็น $V(G_1) \cup V(G_2)$ และเซตของด้านเป็น $E(G_1) \cup E(G_2)$ เขียนแทนยูเนียนของ G_1 และ G_2 ด้วย $G_1 \cup G_2$

ถ้า G เป็นคอนเนคเตดกราฟ เวอร์เท็กซ์ - คอนเนคติวิตี (vertex-connectivity) ของกราฟ G เขียนแทนด้วย $\kappa(G)$ หมายถึงจำนวนจุดที่น้อยที่สุดซึ่งเมื่อลบออกจากกราฟ G แล้วทำให้กราฟที่เหลือเป็นดิสคอนเนคเตดกราฟ และ เอจ - คอนเนคติวิตี (edge - connectivity) เขียนแทนด้วย $\lambda(G)$ คือจำนวนด้านที่น้อยที่สุดซึ่งเมื่อลบออกจากกราฟ G แล้วทำให้กราฟที่เหลือเป็นดิสคอนเนคเตดกราฟ

2.2 ทฤษฎีบทพื้นฐาน

หัวข้อนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีบทพื้นฐานที่สำคัญ พร้อมการพิสูจน์บางทฤษฎีบท เพื่อนำไปใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทในบทที่ 3

ใน [3] R.J. Wilson และ J.J. Watkins ได้พิสูจน์ทฤษฎีบท (ทฤษฎีบท 2.2.1) ไว้ ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.2.1 สำหรับคอนเนคเตดกราฟ G ใดๆ แล้ว

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

พิสูจน์ ให้ G เป็นกราฟ ถ้า v เป็นจุดใน G โดยที่ $\deg_G(v) = \delta(G)$ แล้วจะสามารถแยกกราฟ G ให้เป็นดิสคอนเนคเตดกราฟได้โดยลบด้านทั้งหมดที่อินซิเดนซ์กับจุด v ออก และตามนิยามของ $\lambda(G)$ จะได้ว่า $\lambda(G) \leq \delta(G)$

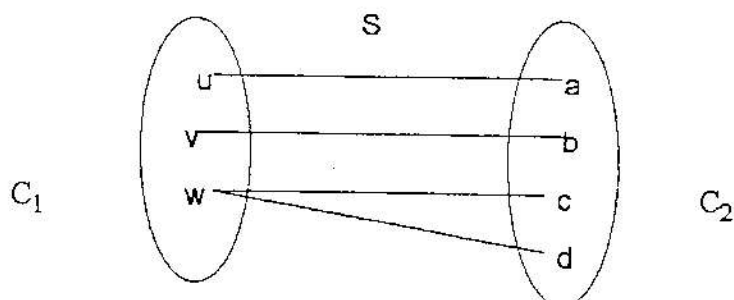
ต่อไปจะแสดงว่า $\kappa(G) \leq \lambda(G)$

ให้ G เป็นกราฟ และ $S \subset E(G)$ ซึ่ง $|S| = \lambda(G)$ ถ้าลบด้านในเซต S ออกจาก G แล้วทำให้ $G-S$ เป็นดิสคอนเนคเตดกราฟที่มี 2 คอมโพเนนต์ ให้เป็น C_1 และ C_2

เนื่องจากถ้าเราเลือกลบจุดปลายข้างเดียวของ $\lambda(G)$ ด้าน เพื่อแยกกราฟให้เป็นดิสคอนเนคเตดกราฟ จะเป็นการลบด้านในเซตที่มี $\lambda(G)$ ด้านดังกล่าวออกทั้งหมดโดยลบอย่างมาก $\lambda(G)$ จุด และโดยนิยามของ $\kappa(G)$ จะได้ $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ $\square$

ตัวอย่าง 2.2.1 ให้ G เป็นคอนเนคเตดกราฟพร้อมกับ $\lambda(G)$

ถ้าลบด้านในเซตที่มี $\lambda(G)$ ด้าน แล้วทำให้เป็นดิสคอนเนคเตดกราฟที่มี 2 คอมโพเนนต์ ให้เป็น C_1 และ C_2 ดังภาพประกอบ



จากภาพถ้าเลือกจุด a, b และ w จะได้ $\kappa(G) < \lambda(G)$ เนื่องจากมี 2 ด้านที่
อินเตอร์เซกกับจุด w

ทฤษฎีบท 2.2.2 ให้ G เป็นคอนเนคเตดกราฟ ที่มีอันดับ p ซึ่ง $p \geq 4$ ถ้า

$$\delta(G) \geq \frac{p-1}{2} \text{ แล้ว } \lambda(G) = \delta(G)$$

พิสูจน์ ให้ G เป็นคอนเนคเตดกราฟซึ่ง $|V(G)| = p$ จากทฤษฎีบทที่ 2.2.1
ได้ว่า $\lambda(G) \leq \delta(G)$

สมมติให้ $\lambda(G) < \delta(G)$ และให้ S เป็นสับเซตของ $E(G)$ ที่มี $\lambda(G)$ ด้าน
โดยที่ $G-S$ เป็นดีสคอนเนคเตดกราฟ มี 2 คอมโพเนนต์ เนื่องจาก $\lambda(G) < \delta(G)$
จะได้ว่าแต่ละคอมโพเนนต์บรรจุไม่ต่ำกว่า 2 จุด และจะมีคอมโพเนนต์ที่มีจำนวนจุดไม่
เกิน $\frac{p}{2}$ ให้เป็น A นั่นคือ $2 \leq |V(A)| \leq \frac{p}{2}$ และให้อีกคอมโพเนนต์หนึ่งเป็น B

ต่อไปจะแสดงว่ามีจุด $u \in V(A)$ ซึ่ง $|E_G(\{u\}, B)| = 0$

ถ้าทุกจุดใน $V(A)$ อินเตอร์เซกกับด้านในเซต S แล้วจะได้ว่า
 $\deg_G(v) \leq (|V(A)| - 1) + m \leq |S| = \lambda(G)$, $\forall v \in V(A)$ เมื่อจุด v อินเตอร์เซกกับด้านใน
เซต S จำนวน m ด้าน ซึ่งขัดแย้งกับ $|S| = \lambda(G) < \delta(G) \leq \deg_G(v)$, $\forall v \in V(A)$

ดังนั้นแสดงว่ามีจุด $u \in V(A)$ ซึ่ง $|E_G(\{u\}, B)| = 0$ จะได้

$$\deg_G(u) \leq \frac{p}{2} - 1 = \frac{p-2}{2} < \frac{p-1}{2} \text{ นั่นก็คือ } \delta(G) \leq \deg_G(u) < \frac{p-1}{2}$$

□

ทฤษฎีบท 2.2.3 ให้ G เป็นคอนเนคเตดกราฟที่มีอันดับ $p \geq k+1$ ถ้า

$$\delta(G) \geq \frac{p+k-2}{2} \text{ แล้ว } \lambda^{(k)}(G) = \delta^{(k)}(G)$$

บทพิสูจน์ของทฤษฎีบทนี้ต้องอาศัยทฤษฎีบทประกอบหลายทฤษฎีบท และ
การพิสูจน์ยาวมาก จึงไม่นำมาแสดงในที่นี้ แต่สามารถศึกษาได้ใน [1]