

บทที่ 1

บทนำ

1.1 การแยกคอนเนคเตดกราฟออกเป็น 3 คอมโพเนนต์

ในการศึกษาทฤษฎีกราฟ เรื่องที่น่าสนใจอย่างหนึ่งก็คือการแยกคอนเนคเตดกราฟ G ให้เป็นดีสคอนเนคเตดกราฟ โดยการลบด้านออก จากการกำหนดให้ เอ็ดจ - คอนเนคตีวิตี ของกราฟ G หมายถึงจำนวนด้านที่น้อยที่สุดที่ลบออกจากกราฟ G แล้วทำให้กราฟ G มีจำนวนคอมโพเนนต์เพิ่มขึ้นหนึ่งคอมโพเนนต์ เขียนแทนด้วย $\lambda(G)$ มีผลงานที่ศึกษาเกี่ยวกับเรื่องนี้มากมาย และผลงานที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้ได้กล่าวไว้ในบทที่ 2 นอกจากนั้นยังได้มีการศึกษาการแยกคอนเนคเตดกราฟ G ออกเป็นสามคอมโพเนนต์ Goldsmith และคณะ [2] ได้กำหนดให้ เอ็ดจ - คอนเนคตีวิตี อันดับสอง (Second order edge - connectivity) หมายถึงจำนวนด้านที่น้อยที่สุดที่ลบออกจากกราฟ G แล้วทำให้กราฟ G มีคอมโพเนนต์เพิ่มขึ้นสองคอมโพเนนต์ เขียนแทนด้วย $\lambda^{(2)}(G)$ การแยกคอนเนคเตดกราฟ G ออกเป็นสามคอมโพเนนต์ โดยการลบด้านของกราฟ G ออก $\lambda^{(2)}(G)$ ด้านเรียกว่า efficient triple separation แต่การหาค่า $\lambda^{(2)}(G)$ ยังมีปัญหาเพราะไม่มีวิธีที่แน่นอนและชัดเจน Goldsmith และคณะได้เสนอแนวทางการแยกคอนเนคเตดกราฟ G ออกเป็นสามคอมโพเนนต์ โดยการลบด้านออกน้อยที่สุดไว้ 2 วิธีคือ

วิธีที่ 1 obvious triple separation ซึ่งมีวิธีการลบด้านออกเพื่อทำให้กราฟ G แยกออกเป็นสามคอมโพเนนต์ ดังนี้

ให้ $v_1, v_2, \dots, v_p$ เป็นจุดใน G มีดีกรีเป็น $d_i (1 \leq i \leq p)$ ตามลำดับ และ $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_p$

ถ้า G มีจุดที่มีดีกรี d_1 เกินหนึ่งจุด ให้สองจุดใดๆของจุดเหล่านั้นเป็น v_1 และ v_2 ลบด้านที่อินซิเดนท์กับจุด v_1, v_2 ออกจะได้จำนวนด้านที่ลบออกเท่ากับ $2d_1 - 1$ ถ้าจุดทั้งสองประชิดกัน หรือเท่ากับ $2d_1$ ถ้าจุดทั้งสองไม่ประชิดกัน

ถ้า G มีเพียงจุด v_1 เท่านั้นที่มีดีกรี d_1 และให้จุดที่มีดีกรี d_2 คือจุด v_2 ลบด้านที่อื่นซึ่งติดกับจุด v_1, v_2 ออกแล้วจะได้จำนวนด้านที่ลบออกเท่ากับ $d_1 + d_2 - 1$ ถ้าจุดทั้งสองประชิดกัน หรือเท่ากับ $d_1 + d_2$ ถ้าจุดทั้งสองไม่ประชิดกัน

วิธีที่ 2 greedy triple separation มีวิธีการลบด้านออกเพื่อให้คอนเนคเตดกราฟ G แยกออกเป็นสามคอมโพเนนต์ ดังนี้

แยกกราฟ G เป็น 2 คอมโพเนนต์ ให้เป็น C_1 และ C_2 โดยการลบด้านของ G ออก $\lambda(G)$ ด้าน และให้ S เป็นเซตของด้านที่ลบออก แล้วแยกคอมโพเนนต์ใดคอมโพเนนต์หนึ่งจาก C_1 หรือ C_2 ออกเป็น 2 คอมโพเนนต์ โดยลบด้านของ $G-S$ ออกจำนวนน้อยที่สุดซึ่งทำให้กราฟที่ได้ มีคอมโพเนนต์เพิ่มขึ้นอีก 1 คอมโพเนนต์ จำนวนด้านที่ลบออกนั้นแทนด้วย $\lambda(G-S)$ และให้ S_1 เป็นเซตของด้านที่ลบออก

การแยกกราฟ G ออกเป็นสามคอมโพเนนต์ตลอดกระบวนการนี้ด้านจะถูกลบออกทั้งหมด $\lambda(G) + \lambda(G-S)$ ด้าน

ใน [4] Y.H. Peng ได้ศึกษาการแยกคอนเนคเตดกราฟออกเป็นสามคอมโพเนนต์ตามวิธี obvious triple separation และได้กำหนดตัวแปรเสริมเชิงกราฟที่แทนจำนวนด้านที่ลบออกจากคอนเนคเตดกราฟ G เพื่อแยกกราฟ G ออกเป็นสามคอมโพเนนต์ตามนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.1.1 ถ้า G เป็นคอนเนคเตดกราฟ ที่มีอันดับไม่น้อยกว่า 3 แล้ว

$$\delta^{(2)}(G) = \min \{ \deg_G(u) + \deg_G(v) - \varepsilon(u, v) \}$$

เมื่อค่าต่ำสุดพิจารณาครอบคลุมบนคู่ (u, v) ทุกคู่ที่ u และ v เป็นจุดที่ต่างกันของ G และ $\varepsilon(u, v) = 1$ ถ้า u กับ v ประชิดกัน หรือ $\varepsilon(u, v) = 0$ ถ้า u กับ v ไม่ประชิดกัน

Y.H. Peng ได้พิสูจน์ทฤษฎีบท ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.1.1 ให้ G เป็นคอนเนคเตดกราฟที่มีอันดับ p ซึ่ง $p \geq 3$ ถ้า
 $\delta^{(2)}(G) \geq p-2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ หรือ $\delta^{(2)}(G) \geq p-1$
 เมื่อ p จำนวนเต็มบวกคี่ แล้ว $\lambda^{(2)}(G) = \delta^{(2)}(G)$

ทฤษฎีบท 1.1.2 ถ้า $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq p$ สำหรับทุกคู่ของจุด u และ v
 แล้ว $\lambda^{(2)}(G) = \delta^{(2)}(G)$

ทฤษฎีบท 1.1.3 ถ้า $\delta(G) \geq \frac{p}{2}$ แล้ว $\lambda^{(2)}(G) = \delta^{(2)}(G)$

Goldsmith และคณะ [2] ได้ศึกษาการแยกคอนเนคเตดกราฟออกเป็น
 สามคอมโพเนนต์ ตามวิธี greedy triple separation ทั้งนี้ค่าของ $\lambda(G-S)$ ขึ้นอยู่กับ
 การเลือกเซต S ซึ่งเป็นเซตที่มี $\lambda(G)$ ด้านที่แยกครั้งแรก และได้กำหนดตัวแปรเสริม
 เริงกราฟที่แทนจำนวนด้านที่ลบออกจากคอนเนคเตดกราฟ G เพื่อแยกกราฟ G ออก
 เป็นสามคอมโพเนนต์ ตามนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1.1.2 ถ้า G เป็นคอนเนคเตดกราฟที่มีอันดับไม่น้อยกว่า 3
 แล้ว $\sigma^{(2)}(G) = \min\{|S| + \lambda(G-S)\}$
 เมื่อค่าต่ำสุดพิจารณาครอบคลุมทุกเซต S ซึ่ง $|S| = \lambda(G)$ และ
 กราฟ $G-S$ มีสองคอมโพเนนต์

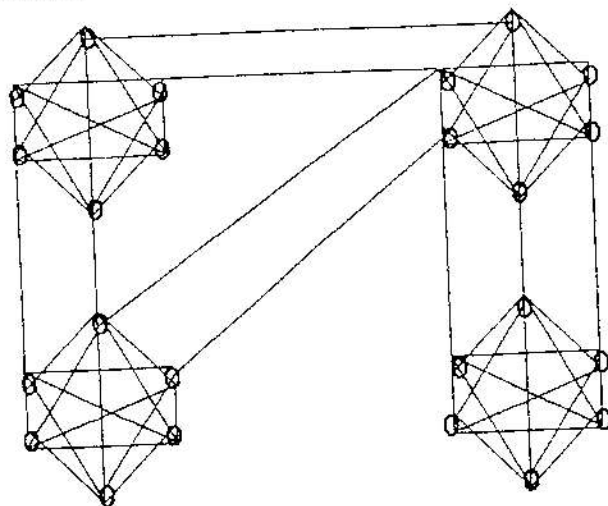
goldsmith และคณะ ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทไว้ ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.1.4 ให้ G เป็นคอนเนคเตดกราฟที่มีอันดับ p ซึ่ง $p \geq 3$ ถ้า
 $\sigma^{(2)}(G) \geq p-2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ หรือ $\sigma^{(2)}(G) \geq p-1$
 เมื่อ p เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ แล้ว $\lambda^{(2)}(G) = \sigma^{(2)}(G)$

ทฤษฎีบท 1.1.5 ให้ G เป็นคอนเนคเตดกราฟที่มีอันดับ p ซึ่ง $p \geq 3$ ถ้า
 $\lambda^{(2)}(G) < \sigma^{(2)}(G)$ แล้ว $\sigma^{(2)}(G) \leq 3\lambda(G) - 3$

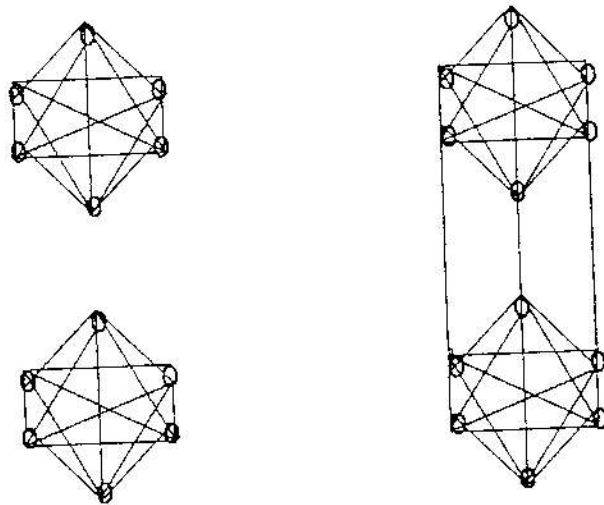
ตัวอย่าง 1.1.1 ให้ G เป็นคอนเนคเตดกราฟ ดังภาพ ในตัวอย่างนี้จะชี้ให้เห็นว่าการแยกกราฟ G ออกเป็นสามคอมโพเนนท์โดยกระทำตามแต่ละวิธีที่กล่าวถึงข้างต้น จำนวนด้านที่ลบออกอาจจะไม่เท่ากัน

G :



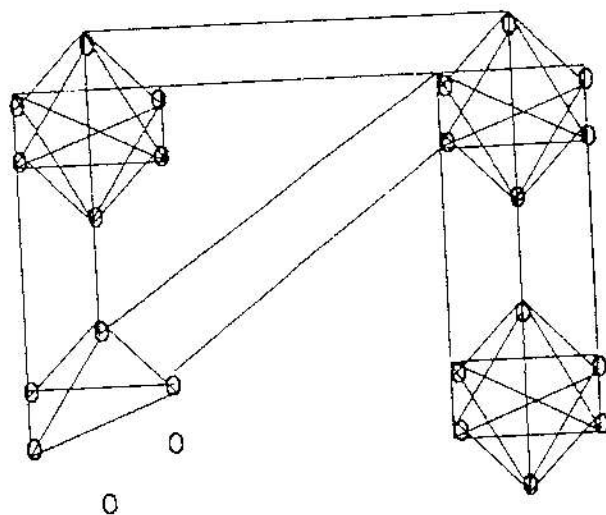
รูป 1.1.1

แยกตามวิธี efficient triple separation ได้ $\lambda^{(2)}(G) = 6$ ดังรูป 1.1.2



รูป 1.1.2

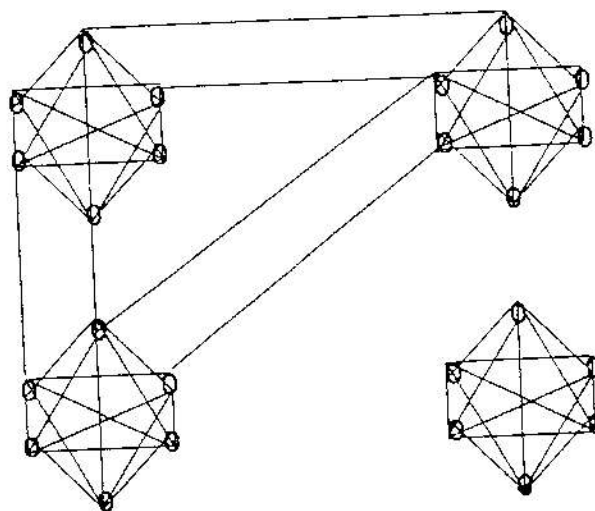
แยกตามวิธี obvious triple separation ได้ $\delta^{(2)}(G) = 9$ ดังรูป 1.1.3



รูป 1.1.3

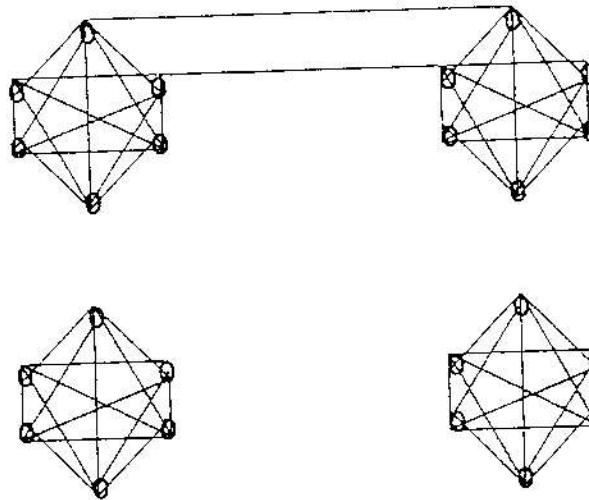
แยกตามวิธี greedy triple separation ได้ $\sigma^{(2)}(G) = |S| + |S_1| = 3 + 4 = 7$
ซึ่งจะแสดงแต่ละขั้นตอนดังนี้

รูป 1.1.4 แสดงสับกราฟของ G ที่ได้จากการลบด้านในเซต S ออกจาก G
และ $|S| = 3$



รูป 1.1.4

รูป 1.1.5 แสดงสับกราฟของ $G-S$ ที่ได้จากการลบด้านในเซต S_1 ออกจาก $G-S$ และ $|S_1| = 4$



รูป 1.1.5

1.2 การแยกคอนเนคเตดกราฟออกเป็น $k+1$ คอมโพเนนต์

ได้มีการศึกษาการแยกกราฟออกเป็นหลายๆคอมโพเนนต์ ในกรณีทั่วไป Goldsmith และคณะได้กำหนด k^{th} order edge-connectivity หมายถึงจำนวนด้านที่น้อยที่สุดที่ลบออกจากคอนเนคเตดกราฟ G ที่ทำให้ G มีคอมโพเนนต์เพิ่มขึ้น k คอมโพเนนต์ เขียนแทนด้วย $\lambda^{(k)}(G)$ การแยกกราฟ G ออกเป็น $k+1$ คอมโพเนนต์โดยลบด้านของ G ออก $\lambda^{(k)}(G)$ ด้าน เรียกว่า efficient $k+1$ separation ซึ่งเป็นวิธีแยกกราฟที่ไม่ชัดเจนว่าลบด้านออกอย่างไร ใน [1] เทียง ภูมิสะอาด และศรีสุราง ทิณะกุล ได้ศึกษาการแยกคอนเนคเตดกราฟ G ออกเป็น $k+1$ คอมโพเนนต์โดยได้ขยายวิธี obvious triple separation ของ Goldsmith และคณะไปสู่กรณีทั่วไปคือ obvious $k+1$ separation และได้กำหนดตัวแปรเสริมเรียงกราฟที่แทนจำนวนด้านที่ลบออกจากกราฟ G เพื่อแยกกราฟ G ออกเป็น $k+1$ คอมโพเนนต์ ดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม ถ้า G เป็นคอนเนคเตดกราฟ ที่มีอันดับ p ซึ่ง $p \geq k+1$ แล้ว

$$\delta^{(k)}(G) = \min \left\{ \sum_{i=1}^k \deg_G(u_i) - \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k \varepsilon(u_j, u_i) \right\} \text{ เมื่อ } j < i$$

เมื่อค่าต่ำสุดพิจารณาครอบคลุมทุกเซตย่อยที่มีสมาชิก k ตัวของ $V(G)$

และ $\varepsilon(u_j, u_i) = 1$ ถ้า u_j กับ u_i ประชิดกัน และ $\varepsilon(u_j, u_i) = 0$ ถ้า

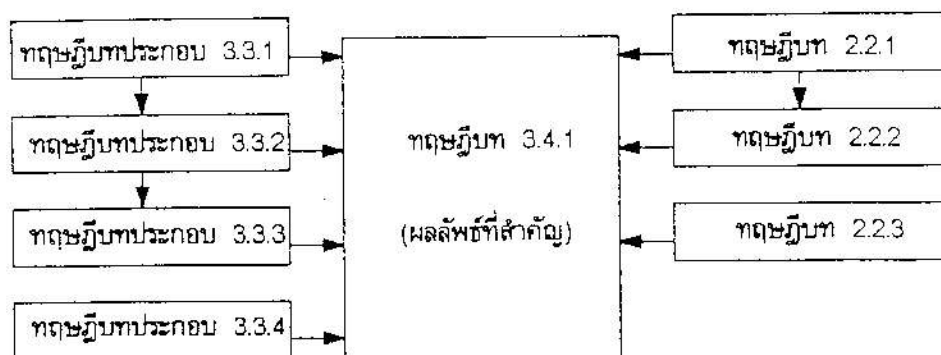
u_j กับ u_i ไม่ประชิดกัน

เทียง ภูมิสะอาด และศรีสุราง ทิณะกุล ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทไว้คือทฤษฎีบท 2.2.3 ซึ่งจะได้กล่าวไว้ในตอนท้ายของบทที่ 2

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาการแยกกราฟ G ออกเป็น $k+1$ คอมโพเนนต์โดยได้ขยายวิธี greedy triple separation ของ Goldsmith และคณะไปสู่กรณีทั่วไปคือ greedy $k+1$ separation ซึ่งเป็นการแยกกราฟออกเป็น $k+1$ คอมโพเนนต์โดยจะกล่าวรายละเอียดไว้ในบทที่ 3

1.3 ความสัมพันธ์ของเนื้อหา

สำหรับการเรียงเนื้อหาในงานวิจัยนี้แบ่งเป็น 4 บท บทที่ 1 บทนำ กล่าวถึงความจำเป็นมาของงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง บทที่ 2 ความรู้พื้นฐาน กล่าวถึงบทนิยามพื้นฐานในวิชาทฤษฎีกราฟ และทฤษฎีบทพื้นฐาน 3 ทฤษฎีบทคือทฤษฎีบท 2.2.1, 2.2.2 และ 2.2.3 พร้อมทั้งการพิสูจน์ทฤษฎีบทบางทฤษฎีบทเพื่อนำไปใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.4.1 บทที่ 3 ผลลัพธ์ที่สำคัญ กล่าวถึงทฤษฎีบทประกอบ 4 ทฤษฎีบท และทฤษฎีบท 3.4.1 ซึ่งเป็นผลลัพธ์ที่สำคัญ โดยมีความเกี่ยวข้องกันดังแผนภาพ



บทที่ 4 บทสรุป กล่าวถึงภาพที่ชัดเจนของทฤษฎีบท 3.4.1 และข้อเสนอแนะในการศึกษาเกี่ยวกับเรื่องนี้ต่อไป