บทที่ 4

การใช้วิธี Finite Element
กับการหา Flow profile ของการไหลผ่าน Sluice gate

4.1 การหา Flow profile ของการไหลผ่าน Sluice gate โดยวิธี Finite element

4.1.1 การสร้าง element equation

จากสมการ Laplace ใน 2 มิติ

$$\frac{\partial \psi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi^2}{\partial y^2} = 0 \qquad (4.1)$$

กำหนด approximation หรือ interpolation function เป็นแบบโพลิโนเมียล

$$\psi(x,y) = \sum_{L=1}^{NNODE} \psi_L N_L(x,y) \qquad (4.2)$$

เมื่อ ψ = stream function

N_L = nodal basis function

L = 1,2,3,...,NNODE

สร้าง element equation โดย Galerkin's method

$$\iint_D \left(\frac{\partial \psi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi^2}{\partial y^2} \right) N_L(x,y)\,dxdy = 0 \qquad (4.3)$$

integrate สมการ 4.3 โดยวิธี by part จะได้

$$\iint_D \left(\frac{\partial \psi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi^2}{\partial y^2}\right) N_L(x,y)\,dxdy = -\iint_D \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial N_L}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial N_L}{\partial y}\right)dxdy + \int_\Gamma \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} n_y\right) N_L\,d\delta \qquad (4.4)$$

เมื่อ L = i,j,m

Γ คือ ขอบเขตของโดเมน D

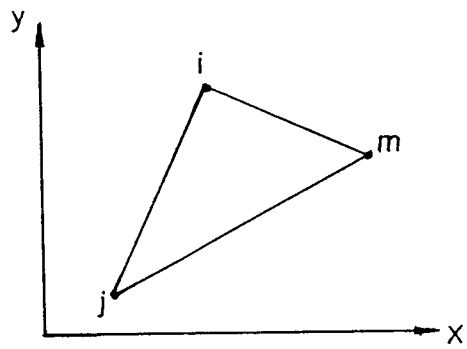
δ คือ ระยะตามแนวขอบเขต ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

n_x, n_y คือ องค์ประกอบของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับขอบเขต

พจน์ที่ 2 ของทางขวาของสมการ 4.4 จะมีค่าเป็นสัดส่วน normal flux ที่ผ่านเข้ามาสู่ขอบเขต คูณกับค่าน้ำหนัก N_L ที่ขอบเขต สำหรับการศึกษาการไหลในคลองสี่เหลี่ยมผืนผ้าผ่านประตูน้ำ (sluicegate) จะไม่มี การไหลผ่าน boundary ดังนั้น พจน์นี้จึงมีค่าเท่ากับศูนย์ สมการ 4.4 สามารถเขียนได้เป็น

$$\iint_D \left(\frac{\partial \psi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi^2}{\partial y^2}\right) N_L(x,y)\,dxdy = -\iint_D \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial N_L}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial N_L}{\partial y}\right)dxdy = 0 \qquad (4.5)$$

สำหรับ element ที่ใช้ในการศึกษาครั้งนี้เลือก element รูปสามเหลี่ยม พิจารณารูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 element รูปสามเหลี่ยม

ตำแหน่ง i,j,m กำหนดในทิศทวนเข็มนาฬิกา และมีค่า stream function ψ_i,ψ_j,ψ_m ตามลำดับ ค่า (x,y) บน element รูปสามเหลี่ยม โดยใช้ linearly interpolating จะอยู่ในรูป

$$\psi^e(x,y) = a_0+a_1x+a_2y \qquad (4.6)$$

เมื่อ e คือ element

ที่ node i

$$\psi_i(x,y) = a_0+a_1x_i+a_2y_i \qquad (4.7ก)$$

node j

$$\psi_j(x,y) = a_0+a_1x_j+a_2y_j \qquad (4.7ข)$$

node m

$$\psi_m(x,y) = a_0+a_1x_m+a_2y_m \qquad (4.7ค)$$

แก้สมการที่ 4.7 หาค่า a_0,a_1,a_2 และแทนค่ากลับในสมการที่ 4.6 จะได้

$$\psi^e(x,y) = N^e_i(x,y)\psi_i+N^e_j(x,y)\psi_j+N^e_m(x,y)\psi_m \qquad (4.8)$$

เมื่อ

$$N^e_i(x,y) = 1/2A^e[(x_jy_m-x_my_j)+(y_j-y_m)x+(x_m-x_j)y] \quad (4.9ก)$$

$$N^e_j(x,y) = 1/2A^e[(x_my_i-x_iy_m)+(y_m-y_i)x+(x_i-x_m)y] \quad (4.9ข)$$

$$N^e_m(x,y) = 1/2A^e[(x_iy_j-x_jy_i)+(y_i-y_j)x+(x_j-x_i)y] \quad (4.9ค)$$

และ

$$2A^e = (x_iy_j-x_jy_i)+(x_my_i-x_iy_m)+(x_jy_m-x_my_j) \qquad (4.10)$$

จากสมการ 4.8 หาอนุพันธ์เทียบกับ x และ y

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}^e = \frac{\partial N^e_i}{\partial x}\psi_i+\frac{\partial N^e_j}{\partial x}\psi_j+\frac{\partial N^e_m}{\partial x}\psi_m \qquad (4.11)$$

และ

$$\frac{\partial \psi^e}{\partial y} = \frac{\partial N^e_i \psi_i}{\partial y} + \frac{\partial N^e_j \psi_j}{\partial y} + \frac{\partial N^e_m \psi_m}{\partial y} \qquad (4.12)$$

แทนค่าสมการ 4.11 และ 4.12 ในสมการ 4.5

$$\iint_e \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial N_L}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial N_L}{\partial y}\right)dxdy = A^e\left(\frac{\partial N^e_i}{\partial x}\frac{\partial N^e_L}{\partial x} + \frac{\partial N^e_i}{\partial y}\frac{\partial N^e_L}{\partial y}\right)\psi_i \qquad (4.13)$$

$$+ A^e\left(\frac{\partial N^e_j}{\partial x}\frac{\partial N^e_L}{\partial x} + \frac{\partial N^e_j}{\partial y}\frac{\partial N^e_L}{\partial y}\right)\psi_j$$

$$+ A^e\left(\frac{\partial N^e_m}{\partial x}\frac{\partial N^e_L}{\partial x} + \frac{\partial N^e_m}{\partial y}\frac{\partial N^e_L}{\partial y}\right)\psi_m$$

เมื่อ L = i,j หรือ m

ค่าอนุพันธ์ของ N^e_L หาได้จากการ diff. สมการ 4.9

$$G_{k,1}\psi_1 + \ldots + G_{k,i}\psi_i + \ldots + G_{k,j}\psi_j + \ldots + G_{k,m}\psi_m \qquad (4.14)$$

$$+ \ldots + G_{k,NNODE}\psi_{NNODE} = 0$$

เมื่อ k =1,2,3,...,NNODE

สมการ 4.14 สามารถเขียนในรูป matrix คือ

$$[G]\{\psi\} = 0 \qquad (4.15)$$

[G] = global conductance matrix

{ψ} = column matrix

เมื่อพิจารณาทีละ elementจะเรียก $[G^e]$ ว่า element conductance matrix จากสมการ 4.15 จะได้

$$G^e_{L,i} = A^e\left(\frac{\partial N^e_i}{\partial x}\frac{\partial N^e_L}{\partial x} + \frac{\partial N^e_i}{\partial y}\frac{\partial N^e_L}{\partial y}\right)\psi_i \qquad (4.16ก)$$

$$G^e_{L,j} = A^e\left(\frac{\partial N^e_j}{\partial x}\frac{\partial N^e_L}{\partial x} + \frac{\partial N^e_j}{\partial y}\frac{\partial N^e_L}{\partial y}\right)\psi_j \qquad (4.16ข)$$

$$G^e_{L,m} = A^e\left(\frac{\partial N^e_m}{\partial x}\frac{\partial N^e_L}{\partial x} + \frac{\partial N^e_m}{\partial y}\frac{\partial N^e_L}{\partial y}\right)\psi_m \qquad (4.16ค)$$

เมื่อ L = i,j หรือ m

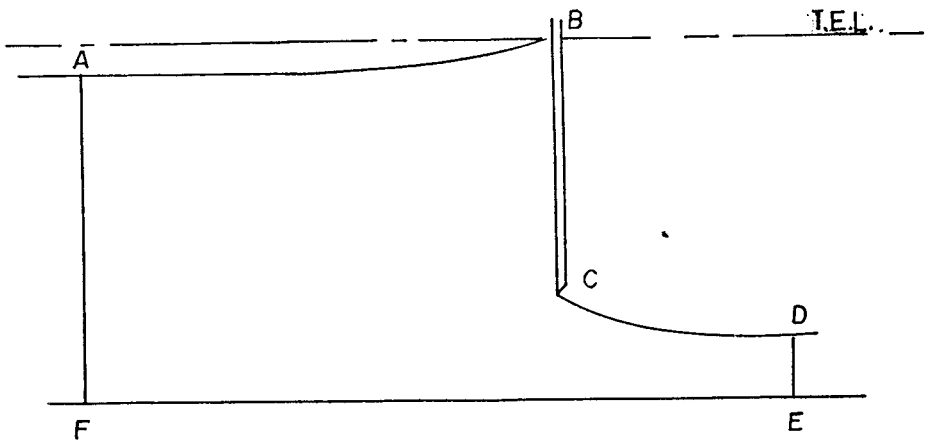
เมื่อพิจารณาขอบเขตของปัญหาทั้งหมดพร้อมกัน จะได้ว่า

$$\sum_e G_{L,i} = G^e_{L,i} \qquad (4.17)$$

สำหรับ ทุก L และ i

ซึ่งจะได้ global conductance matrix ที่อยู่ในสมการ 4.15และเมื่อแก้สมการ 4.15 ภายใต้เงื่อนไขที่ขอบเขต (boundary conditions) ก็จะได้คำตอบของปัญหา ในการศึกษาครั้งนี้เลือกวิธี Gauss seidel iteration เป็นวิธีในการแก้ระบบสมการ

4.1.2 เงื่อนไขขอบเขตของการไหล (Boundary conditions)



รูปที่ 4.2 ขอบเขตการไหลผ่านประตูบานยก(sluice gate)

จากรูปที่ 4.2 อธิบายเป็นช่วงดังนี้

1) ช่วง AF

สภาพการไหลเป็นแบบ uniformflow ค่า stream function มีค่า

$$\psi = i/n.\ a \qquad (4.18)$$

เมื่อ i = เส้นการไหลที่ i = 1,2,3,...,n

n = จำนวนช่องการไหล

a = arbitary constant

2) ช่วง ABCD

ในช่วงนี้ streamline จะเป็นเส้นเดียวกัน และ มีค่าคงที่เท่ากับ อัตราการไหลต่อความกว้างของคลอง

$$\psi = a = \text{ค่าคงที่} \qquad (4.19)$$

3) ช่วง DE

สภาพการไหลเป็นแบบuniformflowค่าstream function มีค่า

$$\psi = i/n.\ a \qquad (4.20)$$

4) ช่วง EF

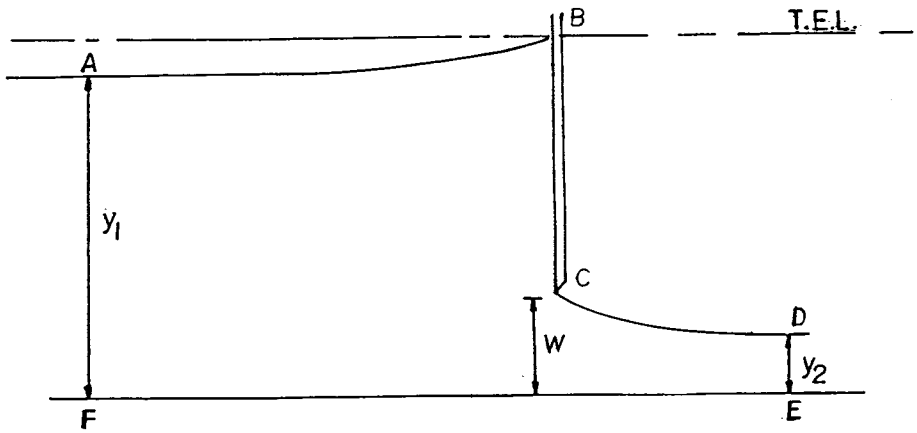
ในช่วงนี้ streamline จะเป็นเส้นเดียวกัน และมีค่าคงที่เท่ากับศูนย์

$$\psi = 0 \qquad (4.21)$$

เมื่อแทนเงื่อนไขขอบเขตลงในระบบสมการ ที่ได้จากวิธี Finite Element จากนั้นแก้ระบบสมการเพื่อหาคำตอบของปัญหาทั้งหมดต่อไป

4.2 ขั้นตอนในการแก้ไขปัญหา

1) กำหนดความลึกต้นน้ำที่สัมพันธ์กับอัตราการไหลของน้ำในคลองและระยะเปิดของประตูน้ำ (sluice gate) จากนั้นวาดรูปขอบเขตของปัญหา ซึ่งแสดงสภาพการไหลดังรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 การไหลของน้ำในคลองผ่านประตูน้ำบานยก(Sluice gate)

จากรูปที่ 4.3 y_1 = ความลึกของต้นน้ำที่ uniform flow

y_2 = ความลึกของต้นน้ำที่ uniform flow

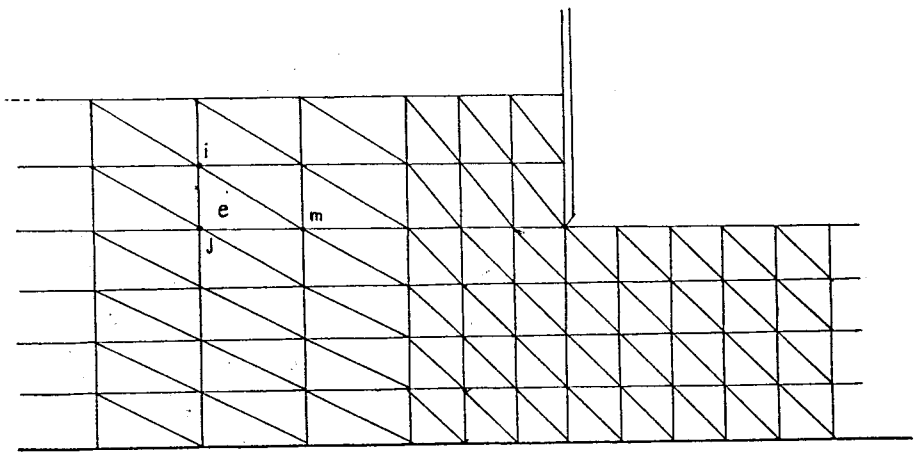
w = ระยะเปิดของประตูน้ำ

2) สมมติรูปร่างของ free stream surface

จากรูปที่ 4.3 ช่วง AB และช่วง CD เรียกว่า free stream surface เนื่องจากการแก้ปัญหาด้วยวิธี Finite element จำเป็นต้องทราบเงื่อนไขขอบเขตของการไหลที่ครอบคลุมปัญหาทั้งหมดก่อน แต่เนื่องจากไม่สามารถทราบรูปร่างของบริเวณ free stream surface จึงต้องมีการสมมติไว้ก่อน แล้วจึงทำการปรับเทียบให้เข้ากับ เงื่อนไขขอบเขตต่อไป

3) กำหนด element ลงบนขอบเขตของปัญหา

เพื่อให้เหมาะสมกับบริเวณที่ต้องการความละเอียดถูกต้องในการคำนวณสูง การแบ่ง element ก็ยิ่งจะละเอียดมากขึ้น สำหรับในกรณีที่ศึกษาจะทำการแบ่งละเอียดในบริเวณใกล้กับประตูน้ำทางด้านต้นน้ำ และแบ่งละเอียดมากขึ้นเมื่อน้ำไหลผ่านบริเวณประตูไปทางท้ายน้ำ แสดงในรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.4 การกำหนด element ลงบนขอบเขตของปัญหา

4) ใช้วิธี finite element ที่ทฤษฎีแสดงไว้ที่หัวข้อ 4.1 สร้างระบบสมการที่อธิบายครอบคลุมปัญหาทั้งหมด

5) หาคำตอบของระบบสมการ ที่ได้จากข้อ 4 ด้วยวิธี Gauss seidel iteration หาค่าของ stream function ที่ node ต่าง ๆ

6) ตรวจสอบเงื่อนไขขอบเขตที่บริเวณ free stream surfaceAB และ DE โดยคำนวณค่า constant ที่ผิวน้ำจากสมการ

$$\sqrt{h_{vi}} \cdot \delta s_i = \text{constant} \qquad (4.22)$$

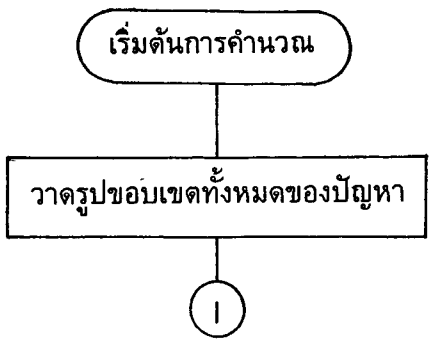
เมื่อ s คือระยะตั้งฉากระหว่าง equipotential line

h_{vi} คือระยะจาก total energy line ถึง free surface

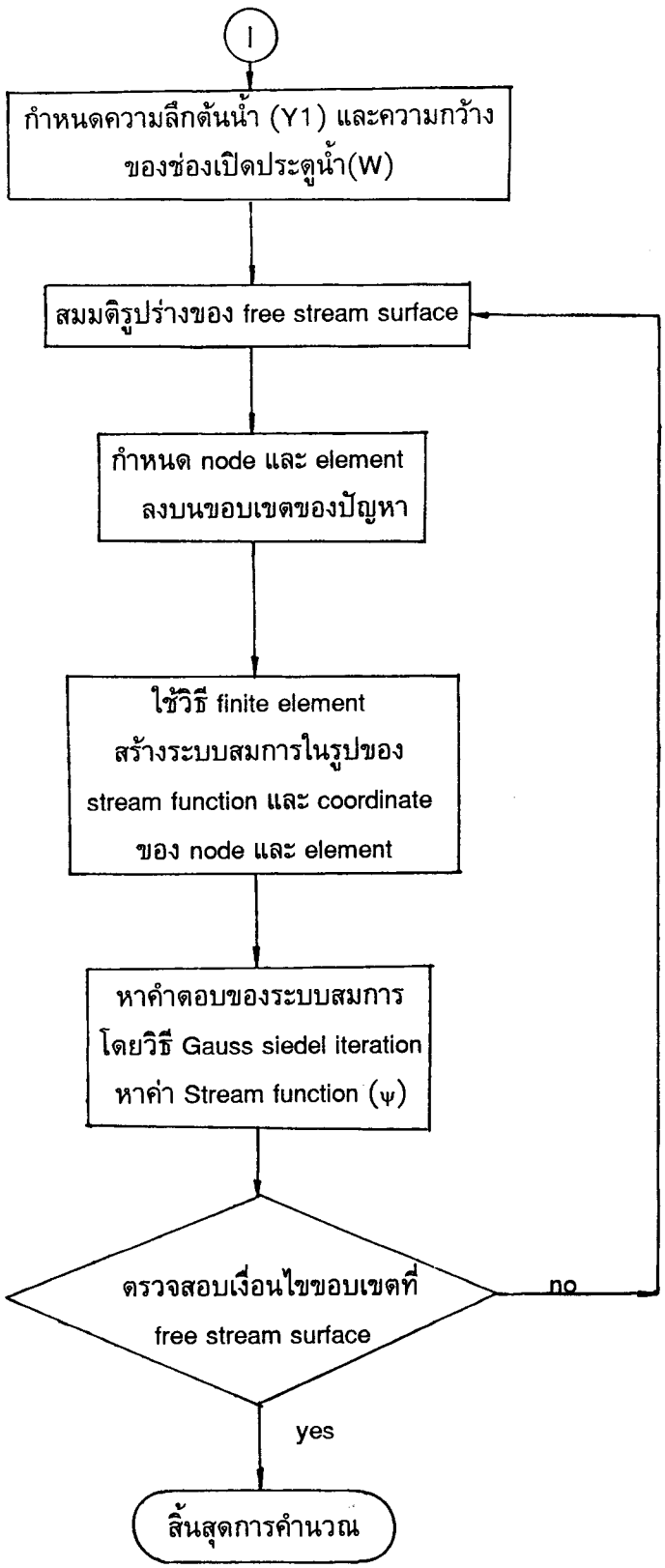
7) เมื่อต้องการเปลี่ยนค่าอัตราการไหล และ/หรือ ระยะเปิดของประตูน้ำ ก็เริ่มทำข้อ 1 ถึงข้อ 6 อีกรอบ

4.3 Flow chart ในการคำนวณ

ขั้นตอนในการคำนวณสามารถเขียนเป็น flow chart ได้ดังนี้



รูปที่ 4.5 Flow chart แสดงขั้นตอนการคำนวณ



รูปที่ 4.5 Flow chart แสดงขั้นตอนการคำนวณ (ต่อ)