บทที่ 2

ทฤษฎีและผลงานที่เกี่ยวข้อง

2.1 วิธี Finite element

ความคิดพื้นฐานของวิธี Finite element คือปริมาณใด ๆ ที่มีลักษณะต่อเนื่องกันบนขอบเขตที่สนใจ เช่น อุณหภูมิ ความดัน ฯลฯ สามารถหาแบบจำลองที่ประกอบขึ้นจากกลุ่มของความสัมพันธ์อันต่อเนื่องของส่วนย่อย ๆ ที่ถูกแบ่งออกเป็นรูปร่างและจำนวนที่แน่นอนครอบคลุมขอบเขตทั้งหมดของปัญหานั้น เพื่อประมาณค่าของปริมาณบนขอบเขตที่สนใจได้ ขั้นตอนของการวิเคราะห์ปัญหาโดยวิธี Finite Element มีดังนี้คือ

ก. การแบ่งส่วนย่อย และเลือกรูปแบบของ element

ข. เลือกรูปแบบของฟังก์ชันที่จะนำมาใช้ประมาณค่า

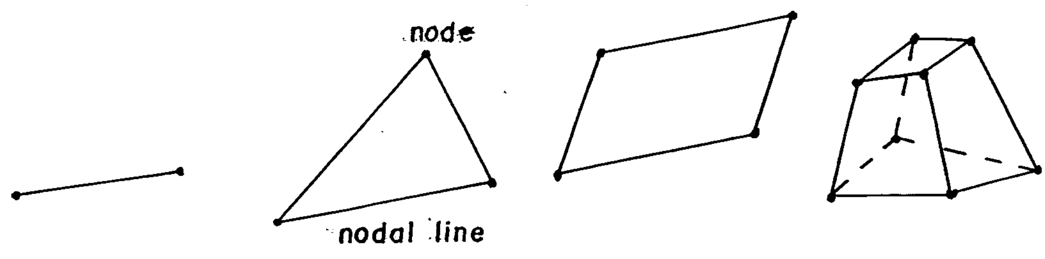
ค. สร้าง element equation

ง. สร้างระบบสมการทางที่ครอบคลุมขอบเขตของปัญหา

จ. แก้ระบบสมการ จากข้อ (ง)เพื่อหาคำตอบของปัญหา

ก. การแบ่งส่วนย่อย (Discretization)

การแบ่งส่วนใหญ่ให้เป็นส่วนย่อย เป็นการศึกษาเพื่อการประมาณค่าที่แท้จริงของส่วนใหญ่มีหลายวิธีการเช่นการประมาณค่าโดยวิธี Finite Difference ซึ่งแบ่งส่วนใหญ่ออกเป็น grid แล้วอธิบายพฤติกรรมของแต่ละจุดที่ประกอบกันเป็น grid ภายในระบบ โดยการแทนค่าสมการ Differential ด้วยสมการ Finite Difference ถ้ายิ่งเพิ่มจำนวนจุดมากขึ้นเท่าใด ก็ยิ่งสามารถอธิบายพฤติกรรมของส่วนใหญ่ทั้งหมดได้ละเอียดถูกต้องมากขึ้นสำหรับวิธี Finite Element จะแบ่งส่วนใหญ่ของปัญหาออกเป็นส่วนย่อยเล็ก ๆ ที่เรียกว่า element จุดต่อของด้านของ element เรียกว่า node และผิวของด้านที่ใช้ร่วมกันระหว่าง element เรียกว่า nodal line ดังแสดงในรูป 2.1 ซึ่งแสดงลักษณะของ element รูปแบบต่าง ๆ



ก) รูปเส้นตรง ข) รูปสามเหลี่ยม ค) รูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า ง) รูปกล่องหกเหลี่ยมด้านไม่เท่า

รูปที่ 2.1 แสดงรูปแบบของ element แบบต่าง ๆ

ในการแบ่งปัญหาออกเป็น element ต้องพยายามแบ่งให้ครอบคลุมขอบเขตของปัญหามากที่สุด เพื่อให้เกิดการประมาณค่าที่ละเอียดและถูกต้องยิ่งขึ้น สำหรับชนิดของ element นั้นต้องพิจารณาให้เหมาะสมกับลักษณะของปัญหา เช่น ปัญหาใน 1 มิติ จะเลือกใช้เป็นเส้นตรง (line element) ดังแสดงในรูป 2.1(ก) ใน 2 มิติจะใช้รูปสามเหลี่ยม (triangular element) รูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า (Quadriteral element) หรือรูปหลายเหลี่ยมใด ๆ ดังแสดงในรูป 2.1(ข)และ 2.1(ค) ส่วนใน 3 มิติ จะเลือกใช้ element ลักษณะเป็นกล่องหกด้านไม่เท่า (hexahedran element) แสดงในรูป 2.1(ง)

ข. รูปแบบของฟังก์ชันที่นำมาใช้ในการประมาณค่า

การเลือกรูปแบบของความสัมพันธ์ ที่จะนำมาประมาณค่าปริมาณที่สนใจ จะยึดพิกัดของ node บน element เป็นจุดสำคัญในการสร้างฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ขึ้น สำหรับแต่ละชนิดของ element แม้ว่าในทางคณิตศาสตร์จะมีฟังก์ชันจำนวนมาก เช่น polynomial หรือ trigonometric series แต่โดยทั่วไปจะนิยมใช้ polynomial interpolation funtion แสดงได้โดย

$$\hat{U} = \sum_{i=1}^{n} N_i u_i \qquad (2.1)$$

เมื่อ $\hat{U}$ = approximate function

N_i= interpolation function ที่ node i

U_i= ปริมาณที่ยังไม่ทราบค่า ที่ node i

ค. Element equation

การสร้าง element eqation เพื่อเป็นตัวควบคุม พฤติกรรมต่างๆ ของ element กับสมการบังคับของปัญหา (governing eqaution) จะเลือกใช้หลักการของ weighted residual

- **วิธี Weighted residual** คือ วิธีการประมาณในการแก้สมการ differential ใน initial และ/หรือ boundary value problem ในงานวิศวกรรมและคณิตศาสตร์ โดยหลักการคือ ต้องการหา approximate solution U แสดงโดยสมการ 2.1 ที่จะใช้แทน exact solution U ที่จะทำให้เกิดความแตกต่าง ที่เรียกว่า residual R(X) ทั้งคู่น้อยที่สุด นั่นคือ

$$R(x) = \hat{U} - U \qquad (2.2)$$

วิธี weighted residual จะคำนวณ u_i ในสมการ 2.1 โดยทำให้เกิด residual R(x) น้อยที่สุด ทำได้โดย สร้างสมการ อินทิเกรดผลคูณระหว่าง weighting function W_i กับ residual บนโดเมนทั้งหมดและกำหนดให้เท่ากับศูนย์ แสดงโดยสมการ

$$\int_X W_i R(x)dx = 0 \qquad (2.3)$$

เมื่อ $i = 1,2,\dots,n$

W_i คือ weighting function

เมื่อแทนค่าสมการ 2.1 และ 2.2 ในสมการ 2.3 จะได้ระบบสมการ nสมการและ n ตัวแปร คือ u_iใช้ขั้นตอนสุดท้าย ก็คือ แก้ระบบสมการเพื่อหาค่าตัวแปร u_i เพื่อหาคำตอบของ approximate solution ต่อไป

- **Galerkin's Method**

เป็นวิธีการหนึ่งที่ใช้หลักของ weighted residual ที่ใช้หา element equation โดยตัวเดียวกันกับ interpolation function ดังนั้น สมการ 2.3 กลายเป็น

$$\int_X N_i R(x)\, dx = 0 \qquad (2.4)$$

เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n$

ง. การแก้ระบบสมการเส้นตรง

เนื่องจากมีวิธีการแก้ระบบสมการเส้นตรงหลายวิธี เช่น Gauss elimination method และ Gauss-Seidel iteration ฯลฯ จากปัญหาที่ประกอบ n สมการ จะอยู่ในรูป

$$[A]\{X\}=\{C\} \qquad (2.5)$$

วิธี Gauss-Seidel iteration มีวิธีการหาคำตอบดังนี้ ถ้าค่าใน Matrix A (a_{nn}) ในแนวเส้นทะแยงมุมไม่เป็นศูนย์ทั้งหมดแล้ว X_n จะเป็นคำตอบของสมการเมื่อทำ Iteration ภายใต้เงื่อนไข

โดย

$$X_n = \frac{c_n - a_{n1}x_n - a_{n2}x_n - \ldots - a_{nn}x_n}{a_{nn}} \qquad (2.6)$$

และ

$$E_{a,1} = \left|\frac{X_i - X_j}{X_i}\right| 100\% < E_s \qquad (2.7)$$

เมื่อ $E_{a,i}$ คือ error ที่เกิดขึ้นในการเปลี่ยนค่า X_i แต่ละครั้ง

E_s คือ error ที่ยอมให้เกิดขึ้นได้

i,j คือ การทำซ้ำในแต่ละครั้ง

2.2 ทฤษฎี Potential Flow

- Irrotational flow คือ สภาพการไหลของของไหลที่ angular velocity หรือ rotation (w) ของอนุภาคบนระนาบคู่ฉากมีค่าเท่ากับศูนย์ โดย

$$w = 1/2\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (2.8)$$

vorticity (ζ) มีค่าเท่ากับศูนย์

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2.9}$$

และ ได้ว่า

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} \; ; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} \; ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.10}$$

- Circulation และ Vorticity

Circulation (Γ) คือ การอินทิเกรตบนเส้น (line integral) ของความเร็วรอบอนุภาค (v_s) บนเส้นทาง s คือ

$$\Gamma = \int v_s ds \tag{2.11}$$

Circulation และ Vorticity มีความสัมพันธ์ คือ

$$\Gamma_c = \int_A \zeta dA \tag{2.12}$$

- Streamlines และ Stream Function (ψ)

Streamlines คือ เส้นแสดงการไหลที่จุดทุกบนเส้นการไหลสัมผัสกับเวคเตอร์ของความเร็ว เมื่อกำหนดที่จุดเวลาใด ๆ จะได้ว่า

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \tag{2.13}$$

Stream Function เป็นฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ ที่อธิบายลักษณะการไหล โดยสามารถอธิบายรูปร่างขอบเขตการไหล รูปร่างของ streamline และปริมาณการไหล หรือองค์ประกอบของความเร็วที่จุดต่าง ๆ ของการไหล (Vallentine 1967) โดย

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{2.14}$$

เมื่อ u = ความเร็วในแกน x

v = ความเร็วในแกน y

จากสมการ 2.9 และ 2.14

$$\frac{\partial \psi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi^2}{\partial y^2} = 0 \tag{2.15}$$

เรียกว่า Laplace equation บน 2-D catesian coordinate

- Velocity Potential (ϕ) และ Potential Function

Potential field คือ พื้นที่ใด ๆ ที่ซึ่งเมื่อกำหนด 2 จุดใด ๆ บนพื้นที่นั้นแล้ว พลังงานที่แตกต่างระหว่าง 2 จุดนั้นจะมีค่าคงที่

Velocity Potential (ϕ) ให้นิยามโดย

$$\phi = \int_A^B v_s \, ds \qquad (2.16)$$

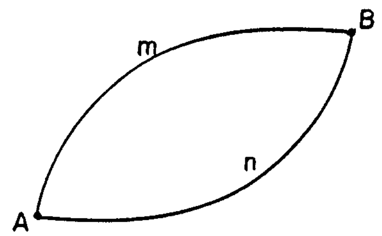
โดย A และ B เป็น 2 จุด ใด ๆ บน potential field และ v_s คือความเร็วที่สัมผัสกับเส้นทาง s สำหรับแกน x และ y

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x}$$

$$v = \frac{\partial\phi}{\partial y} \qquad (2.17)$$

เมื่อ u = ความเร็วในแกน x

v = ความเร็วในแกน y



รูปที่ 2.2 เส้นทางต่าง ๆ ใน Potential field

จากรูปที่ 2.2 A,B เป็น 2จุดใน Potential field ดังนั้น

$$\int_A^B v_s \, ds = \text{const.} \qquad (2.18)$$

จะได้ว่า

$$\int_A^B v_m \, ds = \int^A v_n \, ds \qquad (2.19)$$

สำหรับ gravitational field จะมีลักษณะเป็น Potential field ซึ่งการไหลบน gravitational fieid เรียกว่า Potential Flow

พิจารณา Circulation รอบ AnBm

$$\begin{aligned} \Gamma_{AnBm} &= \int_A^B v_n \, ds + \int_B^A v_m \, ds \\ &= \int_A^B v_n \, ds - \int_A^B v_m \, ds = 0 \qquad (2.20) \end{aligned}$$

จาก 2.12

$$\Gamma = 0 \quad \text{แล้ว} \quad \zeta = 0 \tag{2.21}$$

นั่นคือ Potential Flow จะมีสภาพการไหลเช่นเดียวกับ Irrotational Flow (Douglas, 1985)

2.3 ทฤษฎีการไหลผ่าน Sluice gate

2.3.1 Type of flow (Critical flow, Supercritical flow และ subcritical flow)

Critical flow คือสภาพการไหลซึ่ง specific energy มีค่าน้อยที่สุดสำหรับอัตราการไหล (q) ค่าหนึ่ง

จากสมการพลังงาน

$$E = y + q^2/2gy \tag{2.22}$$

นั่นคือ

$$dE/dy = 0 = 1 - q^2/gy^3 \tag{2.23}$$

จะได้

$$q^2 = gy^3 \tag{2.24}$$

จาก

$$q = vy \tag{2.25}$$

จะได้

$$v^2_c = gy_c \tag{2.26}$$

สำหรับสภาพการไหลที่

$v < \sqrt{gy}$ เรียกว่า Subcritical flow

$v > \sqrt{gy}$ เรียกว่า Supercritical flow

2.3.2 ทฤษฎีการไหลผ่าน Sluice gate

จากการใช้หลักของพลังงาน ถ้าถือว่ามีการสูญเสียพลังงานในการไหลน้อยมาก ดังนั้นจากรูปที่ 2.3พลังงานจำเพาะที่จุด 1 เท่ากับพลังงานจำเพาะที่จุด 2 นั่นคือ

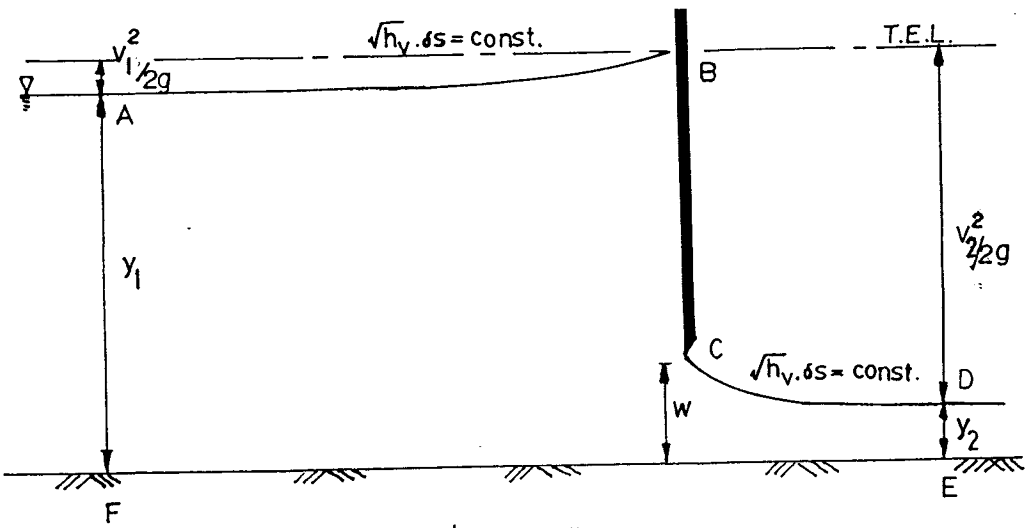
$$E_1 = E_2 \tag{2.27}$$

นั่นคือ

$$y_1 + v_1^2/2g = y_2 + v_2^2/2g \tag{2.28}$$

จากสมการ continuity

$$v_1 y_1 = v_2 y_2 \tag{2.29}$$



รูปที่ 2.3 การไหลผ่าน Sluice gate

และนิยามของ C_c

$$C_c = y_2/w \qquad (2.30)$$

เมื่อ w = ระยะเปิดของประตูน้ำ

จากสมการ 2.28,2.29 และ 2.30 จะได้ว่า

$$Q = C_D wb\sqrt{2gy_2} \qquad (2.31)$$

เมื่อ

$$C_D = \frac{C_c}{\sqrt{1 + C_c w/y_2}} \qquad (2.32)$$

C_c = coefficient of contraction

C_D = coefficient of discharge

b = ความกว้างของคลองรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

จากสมการ 2.30 2.31 และ 2.32 จะเห็นได้ว่าเมื่อทราบ ความลึกที่ต้นน้ำ(y1) ความลึกท้ายน้ำ (y2)และระยะยกของประตูน้ำ (w) ก็สามารถคำนวณหาค่าอัตราการไหลในลำน้ำได้

นอกจากนี้การไหลผ่าน sluice gate ในคลองที่มีหน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ายังสามารถอธิบายสภาพการไหลโดยทฤษฎี Potential flow ซึ่งมีสมการ Laplace เป็นสมการควบคุมการไหล คือ

$$\frac{\partial\psi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial\psi^2}{\partial y^2} = 0 \qquad (2.33)$$

โดยบริเวณ free stream surface AB และ CD อัตราเร็ว(v)ที่ผิวน้ำหาได้จากสมการ

$$v = \sqrt{2gh_v} \qquad (2.34)$$

เมื่อ h_v = ระยะจาก total energy line

และ

$$v = \frac{\delta\psi}{\delta n} = \frac{\delta\phi}{\delta s} \qquad (2.35)$$

โดย n คือ ระยะห่างระหว่าง streamline

s คือ ระยะห่างระหว่าง equipotential line

ดังนั้น สมการ 2.34 เท่ากับ 2.35

$$v = \sqrt{2gh_v} = \frac{\delta\psi}{\delta n} = \frac{\delta\phi}{\delta s} \qquad (2.36)$$

จากสมการ 2.35

$$\delta\phi = \sqrt{2g}.\sqrt{h_v}.\delta s \qquad (2.37)$$

และ

$$\phi_n - \phi_0 = \sqrt{2g}.\sum_{0}^{n}(h_v.\delta s) \qquad (2.38)$$

เมื่อ $\delta\phi$ มีค่าคงที่

เพราะฉะนั้น

$$\sqrt{h_v}.s = \text{ค่าคงที่} \qquad (2.39)$$

ตลอดแนว free surface AB และ CD

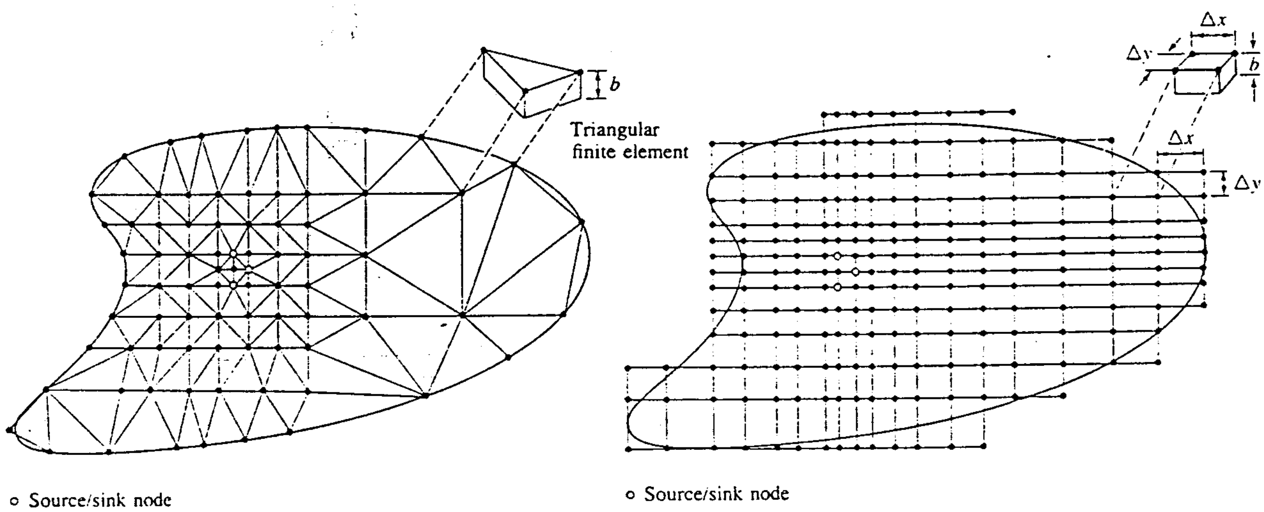
ถ้าสามารถแก้สมการ 2.33 คือ สมการลาพลาสได้ โดยมีสมการ 2.39 เป็นเงื่อนไขขอบเขตการไหล นั่นคือ สามารถหา free stream surface ที่ถูกต้อง นั่นคือ เราจะสามารถหาค่าความลึกที่ท้ายน้ำ (y2) ซึ่งเมื่อทราบค่าความลึกที่ต้นน้ำ (y1) และระยะยกของประตูน้ำ(w) ก็สามารถคำนวณหาค่าอัตราการไหลในลำน้ำได้โดยใช้สมการ 2.31

2.4 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

- Herbert F. Wang(1982) นำเอาวิธี Finite element เพื่อใช้ในการแก้สมการ Laplace ใน 2 มิติ คือ

$$\frac{\partial\psi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial\psi^2}{\partial y^2} = 0 \qquad (2.40)$$

สำหรับการทำนายค่าระดับของน้ำใต้ดิน ในบริเวณขอบเขตที่ทราบค่าระดับน้ำใต้ดินบริเวณรอบๆเพื่อการเปรียบเทียบผลการทำนาย ระหว่างวิธี Finite element กับ ผลการศึกษาที่ได้จากวิธี Finite difference ซึ่งพบว่าให้ผลที่ใกล้เคียงกัน แต่เนื่องจากการหาคำตอบของทั้งสองวิธี มีข้อแตกต่างกัน คือ ลักษณะการแบ่งย่อยขอบเขตของปัญหา สำหรับวิธี Finite element จะแบ่งขอบเขตของปัญหาที่มีรูปร่างไม่แน่นอนออกเป็น element ที่สามารถครอบคลุมขอบเขตของปัญหาได้ดีกว่า วิธี Finite difference ซึ่งจะแบ่งขอบเขตของปัญหาออกเป็นgrid รูปสี่เหลี่ยม ดังแสดงให้เห็นดังรูปที่ 2.4



ก) โดยวิธี Finite element ข) โดยวิธี Finite difference

รูปที่ 2.4 การแบ่งย่อยบริเวณขอบเขตของปัญหา

ดังนั้นในการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างส่วนที่ถูกแบ่งย่อยกับสมการควบคุมการไหลของปัญหาระหว่างวิธีทั้งสอง วิธี Finite element จึงเป็นวิธีที่สามารถหาคำตอบได้ดีกว่าวิธี Finite difference

- ค่า Coefficient of contraction (Cc) ของการไหลผ่าน Sluice gate ที่สัมพันธ์กับค่า ความกว้างของช่องเปิด (W) ต่อพลังงานในการไหล (E1) แสดงดังตารางที่ 2.1 (Henderson, 1966)

ตารางที่ 2.1 แสดงค่า W/E1 และ Cc

W/E1	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Cc	0.611	0.606	0.602	0.600	0.598	0.598