วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 65(700) มกราคม – เมษายน 2563
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

การสร้างอัตราส่วนทองในแผ่นจัตุรัสอย่างง่าย

A Simple Construction of Golden Ratio in Square Plate

อรรณพ แก้วขาว[1,*] และ ลลิตา ตันวงศ์ษา[2]
[1,2]ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ชลบุรี 20131

Annop Kaewkhao[1,*] and Lalita Tanwongsa[2]
[1,2]Department of Mathematics, Faculty of Science, Burapha University, ChonBuri 20131

Email: [1]tor_idin@buu.ac.th

วันที่รับบทความ : 18 สิงหาคม 2562 วันที่แก้ไขบทความ : 3 ตุลาคม 2562 วันที่ตอบรับบทความ : 23 ธันวาคม 2562

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้นำเสนอการสร้างอัตราส่วนทองอย่างง่ายในแผ่นจัตุรัสโดยใช้เพียงสันตรง และวงเวียน

คำสำคัญ: อัตราส่วนทอง ภาคตัดทอง แผ่นจัตุรัส สันตรง วงเวียน

ABSTRACT

In this research, we construct the golden ratio in a square plate by using ruler and compass.

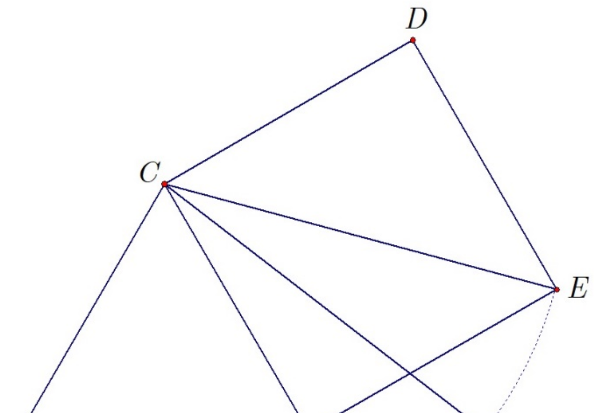
Keywords: Golden ratio, Golden section, Square plate, Ruler, Compass

* ผู้เขียนหลัก

1. บทนำ

"อัตราส่วนทอง" เป็นค่าคงที่ซึ่งเท่ากับ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ นักคณิตศาสตร์หลายสาขาให้ความสนใจ โดยนักคณิตศาสตร์ผู้หลงใหลในเรขาคณิตพยายามศึกษาวิธีการต่าง ๆ ในการสร้างอัตราส่วนทอง การแบ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดออกเป็นอัตราส่วนทอง และการค้นหาอัตราส่วนทองจากรูปทรงเรขาคณิตต่าง ๆ ซึ่งผู้อ่านที่สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากงานเขียนเรื่อง การสร้างอัตราส่วนทอง และการเกิดอัตราส่วนทองจากการซ้อนทับกันของเหรียญ 25 สตางค์ และเหรียญ 5 บาท [1] อีกทั้งยังมีงานวิจัยในต่างประเทศ อีกมากมายที่เกี่ยวข้องกับอัตราส่วนทอง [2 - 8] ซึ่งอาจมีทั้งวิธีการสร้างและพิสูจน์ที่ซับซ้อน ตลอดจนวิธีการสร้างโดยใช้เพียงสันตรงและวงเวียน ซึ่งจะเรียกว่า "การสร้างแบบคลาสสิก" (Classical construction) และพิสูจน์โดยใช้เพียงความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิตที่เรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาซึ่งจะเรียกว่า "การพิสูจน์แบบคลาสสิก" (Classical proof)

ในปี ค.ศ.2011 Michel [7] ได้สร้างอัตราส่วนทองจากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ดังรูปที่ 1.1 และพิสูจน์ให้เห็นว่า จุด B แบ่งส่วนของเส้นตรง $\overline{AF}$ ออกเป็นอัตราส่วนทองโดยใช้เพียงความรู้พื้นฐานเรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัสในการพิสูจน์ ซึ่งเป็นที่น่าสนใจว่า เราสามารถสร้างอัตราส่วนทองในสี่เหลี่ยมจัตุรัสเพียงรูปเดียวได้หรือไม่



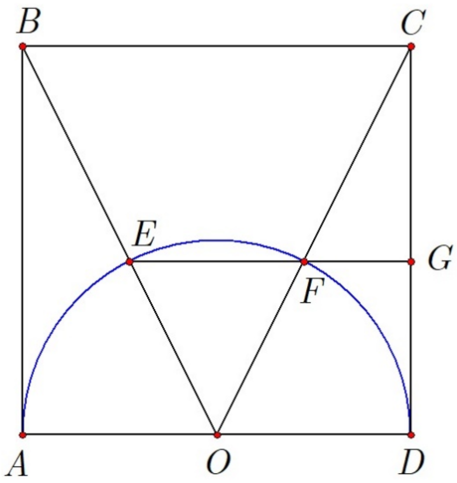
รูปที่ 1.1 การสร้างอัตราส่วนทองของ Michel

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยนำเสนอการการสร้างอัตราส่วนทองแบบคลาสสิกในแผ่นจัตุรัส พร้อมทั้งใช้การพิสูจน์แบบคลาสสิก

2. อัตราส่วนทองในแผ่นจัตุรัส

ในหัวข้อนี้จะนำเสนอการสร้างอัตราส่วนทองบนแผ่นจัตุรัส ดังนี้

กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นแผ่นจัตุรัส มี O เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AD สร้างครึ่งวงกลมจุดศูนย์กลาง O รัศมี $\overrightarrow{OA}$ ตัด $\overline{BO}$ และ $\overline{CO}$ ที่จุด E และ F ตามลำดับ ถ้า $\overline{EF}$ ตัด $\overline{CD}$ ที่จุด G ดังรูปที่ 2.1 จะได้ว่า จุด F แบ่ง $\overline{EG}$ ออกเป็นอัตราส่วนทอง



รูปที่ 2.1 การสร้างอัตราส่วนทองบนแผ่นจัตุรัส

เพื่อให้บทพิสูจน์เป็นไปอย่างสมบูรณ์และกระชับ จะนำเสนอบทตั้งดังต่อไปนี้

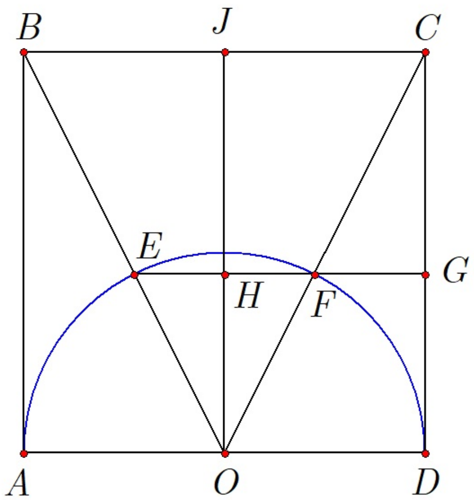
บทตั้ง กำหนดให้ A และ B เป็นจุดบนวงกลม X เป็นจุดภายนอกวงกลม ถ้า $\overline{XA}$ ตัดวงกลมอีกครั้งที่จุด C และ $\overline{XB}$ สัมผัสวงกลม แล้ว $XB^2 = AX \cdot XC$

บทพิสูจน์บทตั้ง โดยไม่เสียนัยทั่วไปให้ C อยู่ระหว่าง X และ A ลาก $\overline{BC}$ และ $\overline{BA}$

จะได้ว่า $C\hat{B}X = C\hat{A}B = X\hat{A}B$ ดังนั้น $\Delta XBC \sim \Delta XAB$ จะได้ว่า $\dfrac{XB}{XA} = \dfrac{XC}{XB}$

นั่นคือ $XB^2 = AX \cdot XC$

บทพิสูจน์ ให้ J เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน $\overline{BC}$ และ H เป็นจุดตัดของ $\overline{JO}$ และ $\overline{EF}$ ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 แสดงประกอบการพิสูจน์

จะได้ว่า $\Delta JCO \sim \Delta HFO$ และ $\Delta OCD \sim \Delta FCG$ นั่นคือ $\dfrac{HF}{JC}=\dfrac{OF}{OC}$ และ $\dfrac{OF}{OC}=\dfrac{DG}{DC}$

ดังนั้น $\dfrac{HF}{JC}=\dfrac{DG}{DC}$

เนื่องจาก $DC=2JC$ จะได้ว่า $2HF=DG$

และจาก $\overline{OH}$ แบ่งครึ่งตั้งฉากกับคอร์ด $\overline{EF}$ ที่จุด H จะได้ว่า $EF=DG$

เนื่องจาก DG สัมผัสวงกลม โดยบทตั้ง จะได้ว่า $DG^2=FG\cdot GE$ ดังนั้น $EF^2=FG\cdot GE$

เพราะฉะนั้น

$$EF^2-FG\cdot(EF+FG)=0$$
$$EF^2-FG\cdot EF-FG^2=0$$
$$\left(\frac{EF}{FG}\right)^2-\frac{EF}{FG}-1=0$$

ดังนั้น $\dfrac{EF}{FG}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

นั่นคือ จุด F แบ่ง EG ออกเป็นอัตราส่วนทอง □

ข้อสังเกต

1. จะเห็นได้ว่าขั้นตอนการสร้างอัตราส่วนทองในแผ่นจัตุรัสนี้ เราใช้วงเวียนภายใน 2 ขั้นตอน คือ การหาจุด O ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของด้าน $\overline{AD}$ และการสร้างครึ่งวงกลมที่มีด้าน $\overline{AD}$ เป็นเส้นผ่าน

ศูนย์กลาง จากนั้นใช้สันตรงในการสร้างส่วนของเส้นตรง $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ และ $\overline{EG}$ ก็จะสามารถสร้างอัตราส่วนทองในแผ่นจัตุรัสขึ้นมาได้โดยง่าย

2. จะพบว่าการพิสูจน์ข้างต้นเราใช้เพียงความรู้พื้นฐานในเรื่องของความคล้าย ถือว่าเป็นการพิสูจน์ที่ค่อนข้างง่ายไม่ซับซ้อนซึ่งนับเป็นศิลปะแบบหนึ่งของการพิสูจน์

หมายเหตุ บทตั้งข้างต้นเป็นเพียงกรณีเฉพาะของทฤษฎีบทกำลังของจุด (Power of point Theorem) ซึ่งกล่าวถึงความสัมพันธ์ของผลคูณของระยะของจุดที่คอร์ดสองคอร์ดตัดกัน โดยบทตั้งนี้เป็นการตัดกันภายนอกวงกลมของคอร์ดและเส้นสัมผัสวงกลม

3. ข้อเสนอแนะ

การนำเสนองานวิจัยเกี่ยวกับอัตราส่วนทองนี้ ผู้วิจัยหวังเป็นอย่างยิ่งว่าจะช่วยจุดประกายความคิดของนักเรียน นักศึกษา ตลอดจนครูอาจารย์ เพื่อที่จะหาวิธีการของตนเองในการสร้างอัตราส่วนทองบนรูปทรงเรขาคณิตต่าง ๆ เช่น บนแผ่นวงกลม บนแผ่นสามเหลี่ยม หรือ บนแผ่นจัตุรัส ซึ่งอาจช่วยให้นักออกแบบนำไปสร้างตราสัญลักษณ์ต่าง ๆ ให้ออกมาสวยงามมากยิ่งขึ้น และหากเป็นไปได้ควรหาวิธีการสร้างและพิสูจน์ด้วยวิธีการแบบคลาสสิก เพื่อให้นักเรียน หรือบุคคลทั่วไป ที่พอมีความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์สามารถอ่านแล้วเข้าใจโดยง่าย อันจะเป็นการลดความหวาดกลัวต่อวิชาคณิตศาสตร์ และลดช่องว่างทางความคิดที่มีต่องานวิจัยทางคณิตศาสตร์

เอกสารอ้างอิง

[1] อรรณพ แก้วขาว และ ลลิตา ตันวงศ์ษา. (2019) การสร้างอัตราส่วนทอง และ การเกิดอัตราส่วนทองจากการซ้อนทับกันของเหรียญ 25 สตางค์ และเหรียญ 5 บาท. *วารสารคณิตศาสตร์*, 64 (697), น. 1 - 12.

Kaewkhao, A. and Tanwongsa, L. (2019) A Construction of Golden Ratio and the Existence of The Golden Ratio from Overlapping of 25 Satang and 5 Bath Coins. *Mathematical Journal*, 64 (697), p. 1 - 12.

[2] Hofstetter, K. (2002). A Simple Construction of the Golden Section. *Forum Geometricorum*, 2, p. 65 – 66.

[3] Hofstetter, K. (2003). A 5-Step Division of a Segment in the Golden Section. *Forum Geometricorum*, 3, p. 205 – 206.

[4] Hofstetter, K. (2005). Divison of a Segment in the Golden Section with Ruler and Rusty Compass. *Forum Geometricorum*, 5, p. 135 – 136.

[5] Hung, T. Q. (2015). The Golden Section in the Inscribed Square of an Isosceles Right Triangle. *Forum Geometricorum*, 15, p. 91– 92.

[6] Michel, B. (2011). Another Simple Construction of the Golden Section, *Forum Geometricorum*, 11, p. 55.

[7] Nniemeyer, J. (2011). A Simple Construction of the Golden Section, *Forum Geometricorum*, 11, p. 53.

[8] Odom, G., and Van de Craats, J. (1986). E3007. *The American Mathematical Monthly*, 93 (7), p. 572 - 572.