วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 65(700) มกราคม – เมษายน 2563
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

การใช้วิธีบาร์โมเดลในการแก้ปัญหาทางพีชคณิต: โจทย์ปัญหา สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

Using Bar Model Method to Solve Algebraic Problems: Word Problems, Linear Equations of One Variable and Systems of Linear Equations of Two Variables

ปรางใส เที่ยงตรง
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง กรุงเทพมหานคร 10240

Prangsai Tiangtrong
Department of Mathematics, Faculty of Science, Ramkhamhaeng University, Bangkok 10240

Email: prangsai.t@gmail.com

วันที่รับบทความ : 5 สิงหาคม 2562 วันที่แก้ไขบทความ : 21 ตุลาคม 2562 วันที่ตอบรับบทความ : 8 มกราคม 2563

บทคัดย่อ

วิธีบาร์โมเดลเป็นวิธีการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่บรรจุอยู่ในหลักสูตรการเรียนคณิตศาสตร์ตั้งแต่ระดับประถมศึกษาของประเทศสิงคโปร์ ทั้งนี้มีงานศึกษาวิจัยมากมายที่ศึกษาวิธีการใช้และผลสัมฤทธิ์จากการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ด้วยวิธีบาร์โมเดล ซึ่งงานวิจัยต่าง ๆ ให้ผลลัพธ์ตรงกันว่าวิธีบาร์โมเดลส่งผลให้ผู้เรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ดีขึ้น อย่างไรก็ตามงานศึกษาวิจัยในประเทศไทยส่วนใหญ่จะเน้นการนำวิธีบาร์โมเดลไปใช้ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษาตอนต้น บทความฉบับนี้ผู้เขียนต้องการนำเสนอแนวทางและตัวอย่างการใช้วิธีบาร์โมเดลในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่มีความซับซ้อนมากขึ้น ได้แก่ โจทย์ปัญหาทางพีชคณิตใน

ระดับประถมศึกษาตอนปลายจนถึงระดับมัธยมศึกษาตอนต้น การใช้วิธีบาร์โมเดลในการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวและระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ผู้เขียนหวังว่าบทความนี้จะเป็นแนวทางในการนำวิธีบาร์โมเดลไปใช้แก้ปัญหาบทเรียนอื่นในคณิตศาสตร์ได้ต่อไป

คำสำคัญ: วิธีบาร์โมเดล การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ โจทย์ปัญหา สมการเชิงเส้น ระบบสมการเชิงเส้น

ABSTRACT

Bar model method is a Mathematical problem solving which is contained in Mathematics curriculum in primary education in Singapore. There are many researchers studied how to use and the achievements of using Bar model method to solve Mathematical problems. The researches have the same results showing the improvement of students' achievements in Mathematics. However, almost researches in Thailand focused on the usages of Bar model to solve Math problems in lower elementary levels. In this article, the author wants to present guidelines and examples on how to use Bar model method to solve more complex mathematical problems which are word problems in Algebra from upper primary to lower secondary educations, to solve linear equations of one variable and to solve systems of linear equations of two variables. The author hopes that this article can be a guideline in how to use Bar model method to solve other lessons in Mathematics afterward.

Keywords: Bar model method, Mathematical problem solving, Word problem, Linear equation, System of linear equations

1. บทนำ

ผู้เขียนเชื่อว่าหลายท่านรู้จักวิธีการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่มีชื่อว่า "วิธีบาร์โมเดล (Bar Model Method)" ซึ่งเป็นวิธีการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ถูกบรรจุอยู่ในหลักสูตรการเรียนคณิตศาสตร์ตั้งแต่ระดับประถมศึกษาของประเทศสิงคโปร์ ตั้งแต่ปี ค.ศ.1983 จนถึงปัจจุบัน [13] วิธีบาร์โมเดลเป็นวิธีการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณต่าง ๆ ในโจทย์ปัญหา โดยใช้แท่งบาร์แทนปริมาณต่าง ๆ ทั้งปริมาณที่ทราบค่าและไม่ทราบค่า โดยรูปแบบการใช้วิธีบาร์โมเดลที่สำคัญมีอยู่ด้วยกัน 2 รูปแบบ ได้แก่ Part – Whole Bar Model ซึ่งเป็นการเขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง

ปริมาณแต่ละส่วน กับปริมาณที่เป็นผลรวมของทุก ๆ ส่วนในโจทย์ปัญหา และ Comparison Bar Model ซึ่งเป็นการวาดแท่งบาร์เพื่อเปรียบเทียบปริมาณต่าง ๆ ในโจทย์ปัญหา ซึ่งจะมีตั้งแต่ 2 แท่งขึ้นไป วาดอยู่ในตำแหน่งแนวดิ่งจากบนลงล่าง เพื่อให้การเปรียบเทียบทำได้โดยง่าย

จากผลการสอบ PISA 2015 (คะแนนสอบล่าสุดที่เปิดเผยอย่างเป็นทางการ) ของนักเรียนในประเทศสิงคโปร์ที่มีค่าเฉลี่ยคะแนนในหัวข้อ การรู้เรื่องคณิตศาสตร์ (Mathematical Literacy) อยู่ที่ 564 คะแนน ซึ่งสูงเป็นอันดับที่หนึ่ง จากการเข้าร่วมทดสอบของนักเรียนอายุ 15 ปี กว่า 70 ประเทศทั่วโลก [16] เป็นหนึ่งในเหตุผลที่ทำให้หลักสูตรคณิตศาสตร์ของประเทศสิงคโปร์ได้รับความสนใจจากนานาประเทศ ทั้งนี้ความสามารถด้านการรู้เรื่องคณิตศาสตร์ต้องอาศัยทักษะหลายประการ ซึ่ง PISA ได้กำหนดกรอบการประเมินผลด้านการรู้เรื่องคณิตศาสตร์จาก 8 สมรรถนะเหล่านี้ ได้แก่ การคิดและการใช้เหตุผล (Thinking and Reasoning) การสร้างข้อโต้แย้ง (Argumentation) การสื่อสาร (Communication) การสร้างตัวแบบ (Modeling) การตั้งและการแก้ปัญหา (Problem Posing and Solving) สิ่งแทนความ (Representation) การใช้สัญลักษณ์ ภาษา และการดำเนินการ (Using symbol, language and operation) และการใช้ตัวช่วยและเครื่องมือ (Using aids and tools) [1] ประเด็นที่น่าสนใจคือ วิธีบาร์โมเดลอาจมีส่วนในการพัฒนาทักษะด้านการรู้เรื่องคณิตศาสตร์ของนักเรียนสิงคโปร์ อย่างไรก็ตามงานวิจัยหลายฉบับมีข้อสรุปตรงกันว่าการใช้วิธีบาร์โมเดลในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ส่งผลดีกับผลสัมฤทธิ์ในการเรียนของผู้เรียน เช่น การศึกษาวิจัยของ Thirunavukkarasu และ Senthilnathan [18] พบว่า การสอนคณิตศาสตร์เรื่องการบวกและการลบระดับประถมศึกษาโดยใช้วิธีบาร์โมเดลมีประสิทธิภาพมากกว่าวิธีการสอนในรูปแบบเดิม อีกทั้ง Kaur [12] ยังได้ศึกษาวิธีการแก้โจทย์ปัญหาทางพีชคณิตในระบบจำนวนเต็ม พบว่าการกระตุ้นให้ผู้เรียนใช้วิธีบาร์โมเดลในการแก้โจทย์ปัญหาทำให้พวกเขาสามารถเห็นภาพความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบต่าง ๆ ที่อยู่ในโจทย์ปัญหาได้ชัดเจนมากยิ่งขึ้น นอกจากนี้ผลวิจัยของ Gani Tengah และ Said [11] ซึ่งศึกษาการใช้วิธีบาร์โมเดลในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับเปอร์เซ็นต์ จากการทดสอบนักเรียน จำนวน 45 คน ของโรงเรียนรัฐบาลแห่งหนึ่งในประเทศบรูไน ระดับเกรด 9 พบว่านักเรียนมีผลคะแนนสอบสูงขึ้น เมื่อนำวิธีบาร์โมเดลมาใช้ในการเรียนการสอน เป็นต้น

สำหรับงานวิจัยที่ศึกษาการแก้โจทย์ปัญหาระดับประถมศึกษาตอนต้นโดยใช้วิธีบาร์โมเดลในประเทศไทยนั้น มีผู้ศึกษาและเผยแพร่ผลงานมากมาย เช่น ศรันย์ [3] ได้วิจัยในหัวข้อการพัฒนาชุดฝึกทักษะในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ด้วยทฤษฎีบาร์โมเดล สำหรับนักเรียนชั้น

ประถมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งมีวัตถุประสงค์เพื่อสร้างชุดฝึกทักษะในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้ทฤษฎีบาร์โมเดล พร้อมทั้งศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนด้วยวิธีปกติกับการเรียนโดยใช้ชุดฝึกทักษะนี้ ซึ่งพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้วยชุดฝึกทักษะ~~ได้ผล~~ดีกว่าการเรียนด้วยวิธีปกติ รวมไปถึงงานวิจัยของนวลฤทัย [2] เกี่ยวกับ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาทักษะการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ตามกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาของโพลยาร่วมกับเทคนิคการวาดรูปบาร์โมเดลสำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในการแก้โจทย์ปัญหาการบวกและการลบระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 ตามกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาของโพลยาร่วมกับเทคนิคการวาดรูปบาร์โมเดล ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียน อีกทั้งยังศึกษาผลประเมินความพึงพอใจของผู้เรียนต่อการเรียนรู้ด้วยวิธีดังกล่าวด้วย ซึ่งผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีคะแนนเฉลี่ยหลังเรียนคิดเป็นร้อยละสูงกว่าคะแนนเฉลี่ยก่อนเรียน อีกทั้งนักเรียนมีระดับความพึงพอใจต่อการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีดังกล่าวในด้านครูผู้สอน เนื้อหา กิจกรรมการเรียนรู้ และการวัดและประเมินผล อยู่ในระดับมากทุกด้าน

บทความฉบับนี้ ผู้เขียนต้องการนำเสนอแนวทางในการใช้วิธีบาร์โมเดลในการแก้ปัญหาทางพีชคณิตเบื้องต้น การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และการแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ในระดับประถมศึกษาตอนปลายจนถึงระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

2. การใช้วิธีบาร์โมเดลในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

โจทย์ปัญหาพีชคณิตในระดับประถมศึกษาตอนปลายจนถึงระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่สามารถนำวิธีบาร์โมเดลไปใช้แก้ปัญหาได้มีหลายเรื่อง เช่น การบวก การลบ การคูณ และการหาร เศษส่วน อัตราส่วน ร้อยละ เป็นต้น ในหัวข้อนี้ผู้เขียนจะยกตัวอย่างการแก้โจทย์ปัญหาในระดับประถมศึกษาตอนปลาย ได้แก่ โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเศษส่วน และโจทย์ปัญหาการบวกและการลบ สำหรับบทเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ผู้เขียนขอนำเสนอการใช้วิธีบาร์โมเดลในการแก้ปัญหาอัตราส่วน ทั้งนี้ผู้เขียนจะนำเสนอแนวทางการแก้ปัญหาโดยใช้วิธีบาร์โมเดล ประกอบกับการสร้างประโยคสัญลักษณ์และการกำหนดตัวแปรและสร้างสมการเพื่อหาคำตอบด้วย

ตัวอย่าง 2.1

<u>โจทย์ปัญหา</u> : ฉันมีเงินอยู่ 8,000 บาท นำไปซื้อของเล่น $\frac{1}{10}$ ของเงินที่มีอยู่ และซื้อตั๋วรถไฟ $\frac{1}{2}$ ของเงินที่มีอยู่เดิม ฉันเหลือเงินกี่บาท

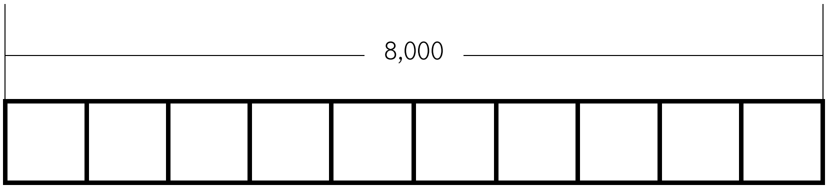
ประโยคสัญลักษณ์ จากข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ สามารถสร้างประโยคสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$8,000-\left[\left(\frac{1}{10}\times 8,000\right)+\left(\frac{1}{2}\times 8,000\right)\right]=\square$$

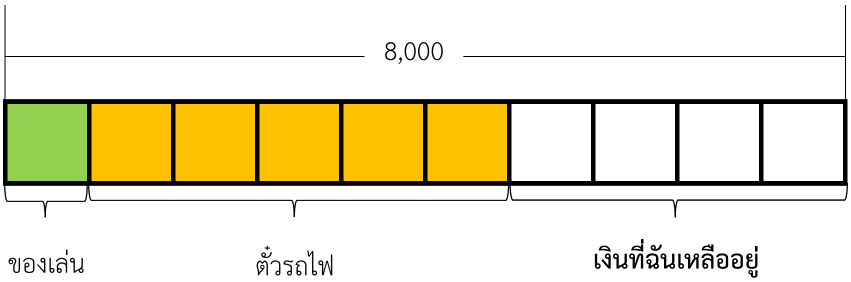
วิธีบาร์โมเดล

<u>วิเคราะห์โจทย์</u>

จากข้อมูลในโจทย์ปัญหาพบว่า ฉันนำเงินจำนวน 8,000 บาท ไปซื้อของ 2 สิ่ง ได้แก่ ของเล่น และ ตั๋วรถไฟ เนื่องจากข้อมูลที่โจทย์ให้มาอยู่ในรูปเศษส่วน โดยมูลค่าของสิ่งของทั้งสองชิ้นเป็น *เศษส่วนของเงิน* จำนวน 8,000 บาท ดังนั้น การแปลงเศษส่วนทั้งสองให้มีตัวส่วนเท่ากัน คือ 10 ทำให้สามารถแบ่งเงินของฉันทั้งหมดออกเป็น 10 ส่วน เท่า ๆ กัน ได้ดังนี้



และเราสามารถแก้ปัญหาโดยใช้วิธีบาร์โมเดลดังวิธีการต่อไปนี้



จากแบบจำลอง จะได้ว่า

$$10\times \square = 8,000$$

$$1\times \square = 800$$

ดังนั้น ฉันเหลือเงิน เท่ากับ $4\times \boxed{} = 4\times 800 = 3{,}200$ บาท

จากตัวอย่างนี้ หากผู้เรียนสามารถสร้างประโยคสัญลักษณ์ได้ จะนำไปสู่การหาคำตอบได้ในที่สุด แต่ทว่า มีผู้เรียนเพียงบางส่วนที่สามารถตีความโจทย์ปัญหาและสามารถสร้างประโยคสัญลักษณ์ที่สอดคล้องกับโจทย์ปัญหาได้ ต่อไปขอให้ผู้อ่านพิจารณาโจทย์ปัญหาต่อไปนี้ซึ่งมีความซับซ้อนมากขึ้นกว่าเดิม

ตัวอย่าง 2.2

<u>โจทย์ปัญหา</u> : ฉันมีเงินอยู่จำนวนหนึ่ง แบ่งเงินให้น้องคนแรก $\frac{1}{6}$ ของเงินที่มีอยู่ ต่อมาแบ่งเงินให้น้องคนที่สอง $\frac{2}{5}$ ของเงินที่เหลือ ทำให้เหลือเงินอยู่จำนวนหนึ่ง จึงนำเงินไปซื้อขนม $\frac{1}{6}$ ของเงินจำนวนนั้น พบว่าหลังจากซื้อขนมแล้ว ฉันเหลือเงินอยู่เพียง 50 บาท อยากทราบว่าเดิมทีฉันมีเงินกี่บาท

การแก้ปัญหาโดยวิธีกำหนดตัวแปรและสร้างสมการ

กำหนดให้ x แทน จำนวนเงินที่ฉันมีอยู่เดิม

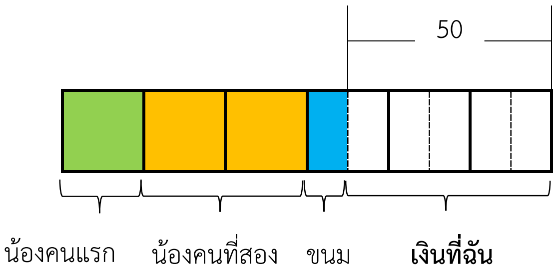
จากข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ สามารถสร้างสมการได้ดังนี้

$$\frac{5}{6}\left[\frac{3}{5}\left(\frac{5x}{6}\right)\right] = 50$$

วิธีบาร์โมเดล

<u>วิเคราะห์โจทย์</u>

จากข้อมูลในโจทย์ปัญหาข้อนี้ เริ่มต้นฉันแบ่งเงินออกเป็น 6 ส่วนเท่า ๆ กัน แล้วแบ่งเงิน 1 ส่วนให้น้องคนแรก ทำให้เหลือเงินอยู่ 5 ส่วน จากเงินที่เหลืออยู่นี้ น้องคนที่สองได้รับเงิน 2 ส่วนจาก 5 ส่วน ทำให้ฉันเหลือเงินเพียง 3 ส่วน โจทย์บอกว่า ฉันนำเงินไปซื้อขนม 1 ใน 6 ส่วนของเงินที่เหลือ แสดงว่า เราต้องแบ่งเงินที่เหลือออกเป็น 6 ส่วนเท่า ๆ กันก่อน แล้วจึงเปรียบเทียบ 5 ใน 6 ส่วนที่เหลือเทียบเท่ากับ 50 บาท นั่นเอง โดยเราสามารถแก้ปัญหาโดยใช้วิธีบาร์โมเดล ดังวิธีการต่อไปนี้



จากแบบจำลอง จะได้ว่า

$$5\times \square = 50$$

$$1\times \square = 10$$

แต่ $2\times \square = 1\times \square = 20$

ดังนั้น เดิมฉันมีเงิน เท่ากับ $(3\times \square)+(6\times \square)=(3\times 20)+(6\times 10)=120$ บาท

วิธีกำหนดตัวแปรและสร้างสมการ เป็นอีกหนึ่งวิธีในการหาคำตอบของโจทย์ปัญหาข้อนี้ ปัญหาที่พบยังคงเป็นเรื่องความสามารถในการตีความโจทย์ปัญหาของผู้เรียนและวิธีการกำหนดความหมายของตัวแปร ทั้งนี้การกำหนดความหมายของตัวแปรที่ต่างกัน จะทำให้ได้สมการที่แตกต่างกันออกไป อย่างไรก็ตาม มีผู้เรียนบางส่วนเท่านั้นที่สามารถกำหนดตัวแปรและสร้างสมการได้อย่างถูกต้อง

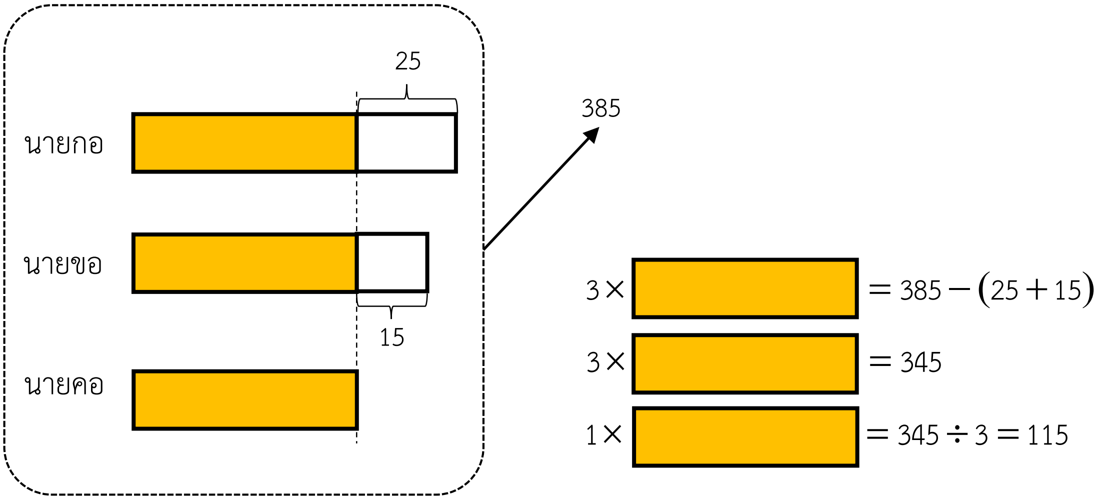
จากทั้งสองตัวอย่าง จะเห็นว่าผู้เขียนได้นำเสนอวิธีบาร์โมเดลในการแก้โจทย์ปัญหาประกอบกันไปด้วย ซึ่งวิธีการนี้เป็นการพยายามตีความหมายของโจทย์ปัญหาให้ออกมาเป็นรูปภาพ วิธีการนี้ส่งผลให้ผู้เรียนสามารถเปรียบเทียบปริมาณต่าง ๆ ได้เป็นรูปธรรมมากขึ้น อันที่จริงแล้วโจทย์ปัญหาทั้งสองข้อนี้แต่งขึ้นจากแนวคิดของโจทย์ปัญหาในระดับเกรด 4 ของหลักสูตรของประเทศสิงคโปร์ (ซึ่งเท่ากับระดับประถมศึกษาปีที่ 4 ในประเทศไทย) ในหนังสือ How to Improve Your Mathematics: Primary 4 เขียนโดย Er [10]

นอกจากโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเศษส่วนแล้ว วิธีบาร์โมเดลยังนิยมใช้ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับอัตราส่วนและร้อยละอีกด้วย รวมถึงโจทย์ปัญหาระคนที่มีหลายการดำเนินการอยู่ในข้อเดียว ในบทความนี้ ผู้เขียนขอยกตัวอย่างแผนภาพแสดงการแก้โจทย์ปัญหาโดยวิธีบาร์โมเดลเพิ่มเติม ดังนี้

ตัวอย่าง 2.3

<u>โจทย์ปัญหา</u> : นายกอ นายขอ และนายคอ มีเงินรวมกัน 385 บาท โดยนายกอมีเงินมากกว่านายขออยู่ 25 บาท และนายขอมีเงินมากกว่านายคอ อยู่ 15 บาท อยากทราบว่า นายคอมีเงินกี่บาท

วิเคราะห์โจทย์



ดังนั้น นายคอ มีเงิน 115 บาท

ในลำดับต่อไป ผู้เขียนจะนำเสนอการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอัตราส่วนซึ่งอยู่ในระดับประถมศึกษาตอนปลายและมัธยมศึกษาตอนต้นของหลักสูตรของประเทศไทยตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) [4, 5] ซึ่งมีวิธีการทางพีชคณิตในการหาคำตอบหลากหลายวิธี และหนึ่งในวิธีที่นิยมใช้กันมาก คือ การกำหนดตัวแปรและสร้างสมการ ทั้งนี้ผู้เขียนจะนำเสนอการแก้โจทย์ปัญหาด้วยวิธีดังกล่าวและการใช้วิธีบาร์โมเดลประกอบกัน ดังนี้

ตัวอย่าง 2.4

โจทย์ปัญหา : ในการสอบก่อนเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่ง อัตราส่วนของจำนวนนักเรียนที่สอบผ่านต่อจำนวนนักเรียนที่สอบตกเป็น $3:7$ หลังจากที่นักเรียนได้เรียนบทเรียนคณิตศาสตร์นี้แล้ว คุณครูจึงจัดให้มีการทดสอบหลังเรียนขึ้น พบว่าอัตราส่วนของจำนวนนักเรียนที่สอบผ่านต่อจำนวนนักเรียนที่สอบตกกลายเป็น $3:2$ เพราะมีนักเรียนที่เคยสอบตกในการสอบก่อนเรียน จำนวน 12 คน ทำคะแนนสอบได้ดีขึ้นจนสอบผ่านในการสอบหลังเรียนนั่นเอง อยากทราบว่าห้องเรียนนี้มีนักเรียนทั้งหมดกี่คน

วิเคราะห์โจทย์

เนื่องจากในการทดสอบก่อนเรียน อัตราส่วนของจำนวนนักเรียนที่สอบผ่านต่อจำนวนนักเรียนที่สอบตกเป็น $3:7$ จะได้ว่า มีนักเรียนที่สอบผ่านอยู่ $3x$ คน และมีนักเรียนที่สอบตกอยู่ $7x$ คน เมื่อ x เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ หลังจากที่นักเรียนได้เรียนบทเรียนคณิตศาสตร์แล้ว คุณครูได้จัดการทดสอบหลังเรียนขึ้น พบว่าอัตราส่วนของจำนวนนักเรียนที่สอบผ่านต่อจำนวนนักเรียนที่สอบตกกลายเป็น $3:2$ เพราะมีนักเรียนที่เคยสอบตกในการสอบก่อนเรียน จำนวน 12 คน ทำคะแนนสอบได้ดีขึ้นจนสอบผ่าน ดังนั้น ในการทดสอบหลังเรียน อัตราส่วนของจำนวนนักเรียนที่สอบผ่านต่อจำนวนนักเรียนที่สอบตก จะกลายเป็น $3x+12:7x-12$

จากข้อมูลข้างต้น เราสามารถสร้างสมการได้ดังนี้

$$\frac{3x+12}{7x-12}=\frac{3}{2}$$

แก้สมการ จะได้

$$2\left(3x+12\right)=3\left(7x-12\right)$$

$$6x+24=21x-36$$

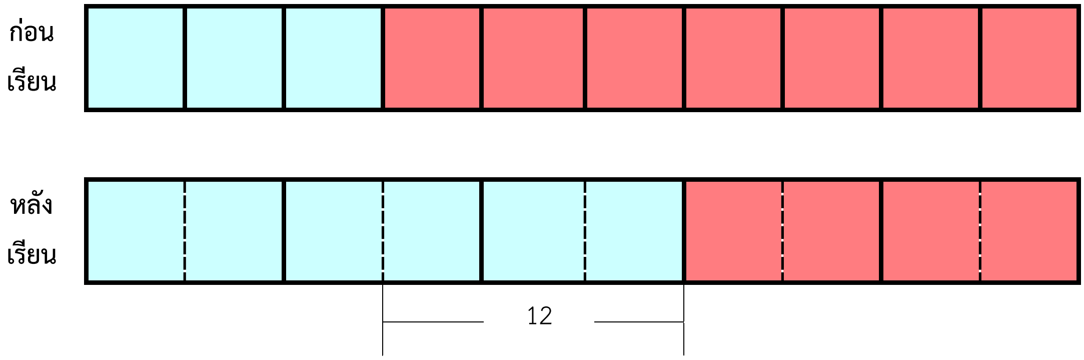
$$60=15x$$

$$x=4$$

เนื่องจาก ห้องเรียนนี้มีนักเรียนทั้งหมด $3x+7x=10x$ คน

ดังนั้น ห้องเรียนนี้มีนักเรียนทั้งหมด $10\times 4=40$ คน

อย่างไรก็ตาม เราสามารถนำวิธีบาร์โมเดลมาประยุกต์ใช้ในการหาคำตอบในข้อนี้ได้เช่นกัน จากผลการทดสอบก่อนเรียนที่ว่า จำนวนนักเรียนที่สอบผ่านต่อจำนวนนักเรียนที่สอบตกคิดเป็นอัตราส่วน $3:7$ ทำให้เราสามารถแบ่งจำนวนนักเรียนในห้องนี้เป็น 10 ส่วนเท่า ๆ กันได้ โดย 3 ส่วนเป็นจำนวนนักเรียนที่สอบผ่าน (สีฟ้า) และ อีก 7 ส่วนเป็นจำนวนนักเรียนที่สอบตก (สีแดง) ในเวลาต่อมาครูจัดทดสอบหลังเรียน พบว่าอัตราส่วนของจำนวนนักเรียนที่สอบผ่านต่อจำนวนนักเรียนที่สอบตกกลายเป็น $3:2$ ทำให้เราสามารถเขียนแท่งบาร์แทนสถานการณ์ดังกล่าวได้ ดังนี้



จากแบบจำลอง แท่งบาร์ทั้งสองต้องมีความยาวเท่ากัน เนื่องจากจำนวนนักเรียนทั้งหมดในห้องนี้มีค่าเท่าเดิม เราแบ่งแท่งบาร์ออกเป็น 5 ส่วนเท่า ๆ กัน โดย 3 ส่วนเป็นจำนวนนักเรียนที่สอบผ่าน (สีฟ้า) และ อีก 2 ส่วนเป็นจำนวนนักเรียนที่สอบตก (สีแดง) การแบ่งแท่งบาร์ในลักษณะนี้ทำให้เห็นว่า 1 ส่วนของแท่งบาร์ด้านล่าง (หลังเรียน) เท่ากับ 2 ส่วนของแท่งบาร์ด้านบน (ก่อนเรียน) และเนื่องจากมีนักเรียนที่เคยสอบตกในการสอบก่อนเรียน จำนวน 12 คน ทำคะแนนสอบได้ดีขึ้นจนสอบผ่าน จากแบบจำลอง จะได้ว่า

$$3\times \boxed{\quad} = 12$$

$$1\times \boxed{\quad} = 4$$

ดังนั้น ห้องเรียนนี้มีนักเรียนทั้งหมด $10\times 4 = 40$ คน

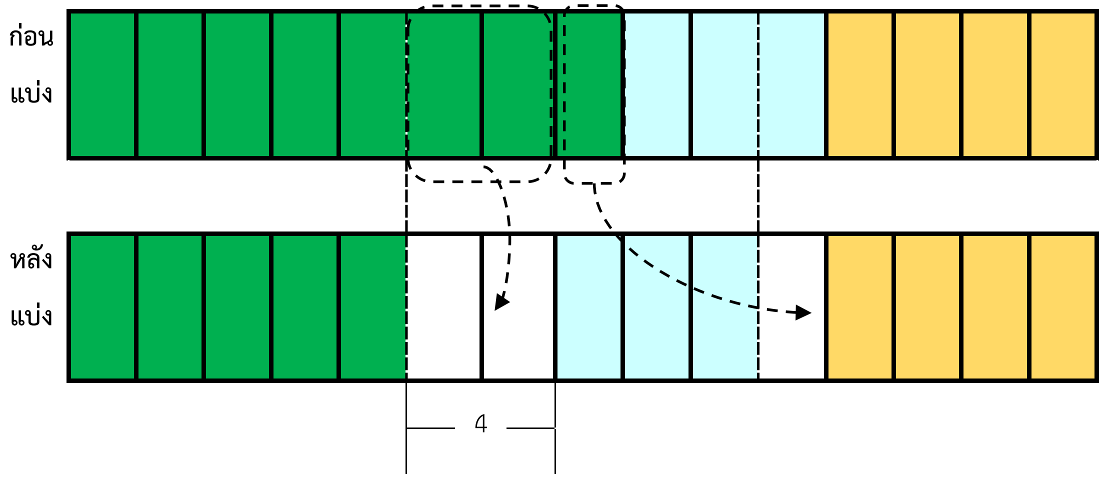
ตัวอย่าง 2.5

<u>โจทย์ปัญหา</u> : แม่ค้าซื้อผลไม้มา 3 กอง อัตราส่วนของจำนวนผลไม้ในกองแรกต่อกองที่สองต่อกองที่สาม มีค่าเท่ากับ $8:3:4$ ต่อมาแม่ค้าต้องการแบ่งผลไม้ออกเป็นสามกอง โดยแต่ละกองมีผลไม้จำนวนเท่า ๆ กัน เธอจึงนำผลไม้ในกองแรกบางส่วนแบ่งใส่กองที่สองและกองที่สาม ถ้าแม่ค้าแบ่งผลไม้ใส่กองที่สอง 4 ผล อยากทราบว่า แม่ค้ามีผลไม้ทั้งหมดกี่ผล

<u>วิเคราะห์โจทย์</u>

เนื่องจากก่อนแบ่งผลไม้ อัตราส่วนของจำนวนผลไม้ในกองแรกต่อกองที่สองต่อกองที่สาม มีค่าเท่ากับ $8:3:4$ นั่นคือ มีผลไม้ทั้งหมด $8+3+4=15$ ส่วน ให้กองแรก กองที่สอง และกองที่สาม แทนด้วยสีเขียว สีฟ้า และสีเหลือง ตามลำดับ ต่อมาแม่ค้าต้องการแบ่งผลไม้ในกองแรกให้กองที่สอง

และกองที่สามเพื่อให้แต่ละกองมีผลไม้จำนวนเท่า ๆ กัน และเนื่องจากแม่ค้าแบ่งผลไม้ใส่กองที่สอง 4 ผล ทำให้เราสามารถเขียนแท่งบาร์แทนสถานการณ์ดังกล่าวได้ ดังนี้



$$2 \times \boxed{} = 4$$

$$1 \times \boxed{} = 2$$

ดังนั้น แม่ค้ามีผลไม้ทั้งหมด $15 \times 2 = 30$ ผล

อันที่จริงแล้ว วิธีแก้ปัญหาโดยใช้วิธีบาร์โมเดล นอกจากจะทำให้ผู้เรียนสามารถแปลความหมายของโจทย์ปัญหาให้เป็นภาพได้แล้ว ยังส่งผลให้ผู้เรียนเข้าใจโจทย์ปัญหาอย่างลึกซึ้งมากขึ้นอีกด้วย มีงานวิจัยที่แสดงให้เห็นว่าการที่ผู้เรียนสามารถตีความจากโจทย์ปัญหาเป็นภาพได้จะส่งผลให้ประสิทธิภาพในการแก้ปัญหาดียิ่งขึ้น ทั้งการพัฒนาความสามารถด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์และการทำความเข้าใจความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ ในโจทย์ปัญหา นอกจากนี้วิธีบาร์โมเดลยังสอดแทรกแนวคิดเกี่ยวกับเรื่องตัวแปรและพีชคณิตไว้ โดยแท่งบาร์เปรียบเสมือนตัวแปรที่ไม่ทราบค่านั่นเอง [6, 8, 9, 17, 19] ทำให้การใช้วิธีบาร์โมเดลในการแก้ปัญหาทางพีชคณิตมีส่วนช่วยเตรียมความพร้อมให้กับผู้เรียนสำหรับการเรียนพีชคณิตที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้นได้ [7] ยกตัวอย่างหนึ่งในบทเรียนที่สามารถนำวิธีบาร์โมเดลไปใช้ในการแก้ปัญหา คือ การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

(Linear Equations in One Variable) ซึ่งเป็นบทเรียนคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) [5] พิจารณาตัวอย่างการเขียนแทนสมการด้วยบาร์โมเดลในหัวข้อที่ 3

3. การใช้วิธีบาร์โมเดลในการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

หากเปรียบเทียบแท่งบาร์เสมือนกับตัวแปรที่เราไม่ทราบค่า เราจะสามารถนำวิธีบาร์โมเดลมาประยุกต์ใช้ในการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้ ตัวอย่างต่อไปนี้ ผู้เขียนนำเสนอวิธีแก้สมการ 2 วิธี ได้แก่ การแก้สมการโดยใช้สมบัติการเท่ากัน (Properties of Equalities) และ การแก้สมการโดยใช้วิธีบาร์โมเดล โดยมีรายละเอียดดังนี้

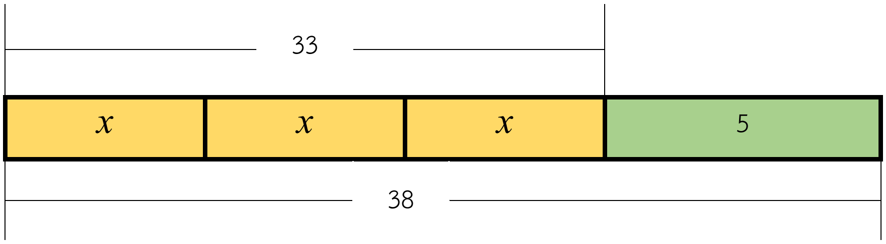
ตัวอย่าง 3.1 การใช้สมบัติการเท่ากันและวิธีบาร์โมเดล ในการหาคำตอบของสมการ $3x+5=38$
โดยปกติเราจะใช้สมบัติการเท่ากันมาช่วยในการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว กล่าวคือ
จากสมการ $3x+5=38$ ใช้สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน กล่าวคือ บวกเทอมที่อยู่ทั้งสองข้างของสมการด้วย -5 จะได้

$$3x+5+(-5)=38+(-5)$$
$$3x=33$$

ใช้สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน กล่าวคือ คูณเทอมที่อยู่ทั้งสองข้างของสมการด้วย $\frac{1}{3}$ จะได้

$$\frac{1}{3}\cdot 3x=\frac{1}{3}\cdot 33$$
$$x=11$$

ดังนั้น คำตอบของสมการ คือ $x=11$
ทั้งนี้ เราสามารถประยุกต์ใช้วิธีบาร์โมเดลมาหาคำตอบของสมการได้เช่นกัน ดังรายละเอียดต่อไปนี้
<u>แนวคิด</u> จากสมการ ตัวแปร x จะถูกแทนที่ด้วยแท่งบาร์ $\boxed{\quad x \quad}$
เนื่องจาก $3x=x+x+x$ และจากสมการ $3x+5=38$ เราจึงได้แผนภาพด้านล่างนี้

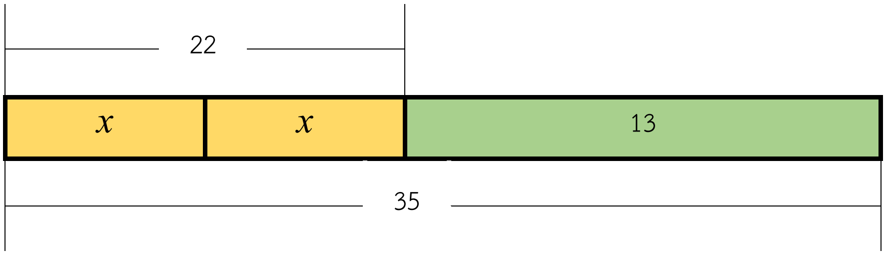


จากแบบจำลอง ความยาวทั้งหมดของแท่งบาร์รวมกันได้ 38 นั่นคือ แท่งบาร์ $\boxed{x}$ ทั้ง 3 แท่ง รวมกันได้ 33 หรือ แท่งบาร์ $\boxed{x}$ แต่ละแท่งมีค่าเท่ากับ 11 นั่นเอง

ดังนั้น คำตอบของสมการ คือ $x = 11$

ทั้งนี้ ผู้เขียนขอยกตัวอย่างแผนภาพแสดงการประยุกต์ใช้วิธีบาร์โมเดลในการแก้สมการเพิ่มเติม ดังต่อไปนี้

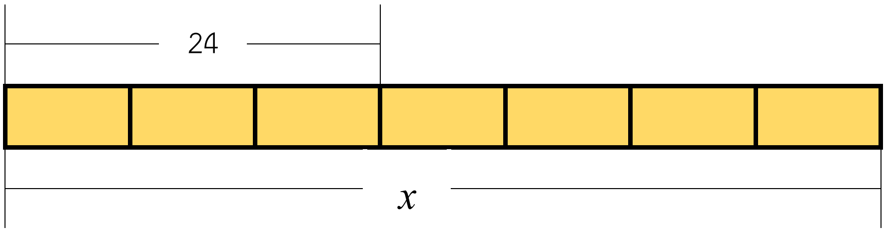
ตัวอย่าง 3.2 แผนภาพแสดงการประยุกต์ใช้วิธีบาร์โมเดลในการหาคำตอบของสมการ $35 - 2x = 13$



จากแบบจำลองนี้ คำตอบของสมการ คือ $x = 11$ นั่นเอง

ตัวอย่าง 3.3 แผนภาพแสดงการประยุกต์ใช้วิธีบาร์โมเดลในการหาคำตอบของสมการ $\dfrac{3x}{7} = 24$

<u>แนวคิด</u> สำหรับข้อนี้ x แทน แท่งบาร์ ซึ่งถูกแบ่งออกเป็น 7 ส่วนเท่า ๆ กัน โดย 3 ส่วนจากทั้งหมด 7 ส่วน มีค่าเท่ากับ 24 ดังภาพ

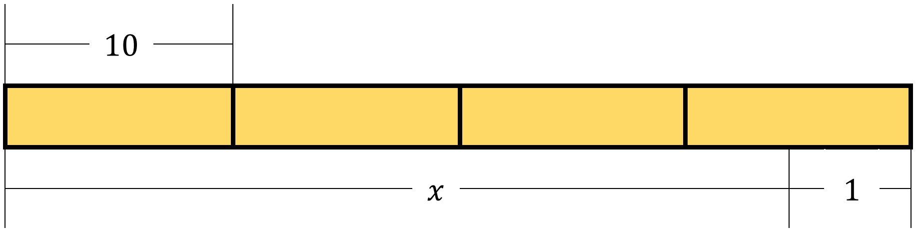


จากแบบจำลอง จะได้ $3 \times \boxed{} = 24$ นั่นคือ $1 \times \boxed{} = 8$

ดังนั้น $x = 7 \times \boxed{} = 56$

ตัวอย่าง 3.4 แผนภาพแสดงการประยุกต์ใช้วิธีบาร์โมเดลในการหาคำตอบของสมการ $\frac{x+1}{4}=10$

<u>แนวคิด</u> สำหรับข้อนี้ แท่งบาร์ขนาด $x+1$ ถูกออกเป็น 4 ส่วนเท่า ๆ กัน โดยที่แต่ละส่วนมีขนาด 10 หน่วย



จากแบบจำลองนี้ จะได้ $x+1=4\times10=40$

ดังนั้น คำตอบของสมการ คือ $x=39$

4. การใช้วิธีบาร์โมเดลในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

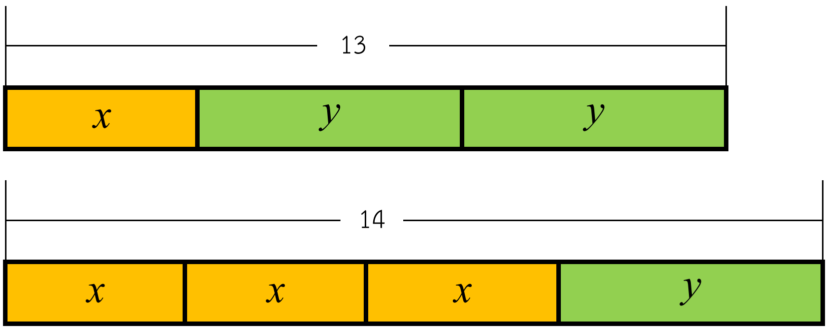
จากการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวโดยใช้วิธีบาร์โมเดลข้างต้น เราสามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยใช้แนวคิดเดียวกันได้ พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.1 การประยุกต์ใช้วิธีบาร์โมเดลในการหาคำตอบของระบบสมการต่อไปนี้

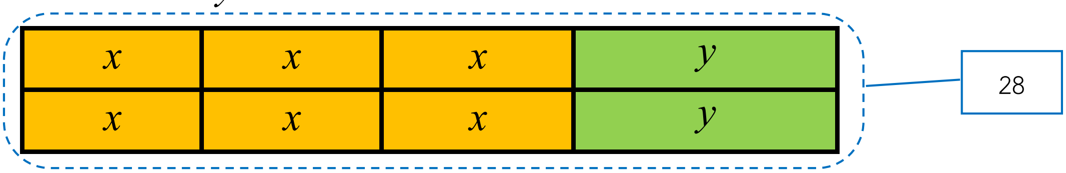
$$x+2y=13$$

$$3x+y=14$$

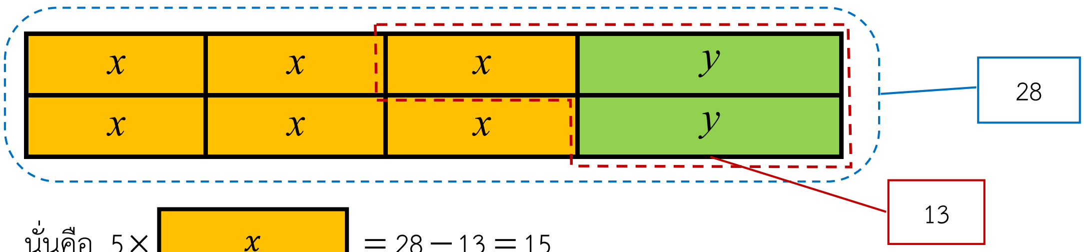
ตัวอย่างการวาดแบบจำลองสำหรับระบบสมการนี้



นำสมการ $3x+y=14$ จำนวน 2 สมการมารวมกัน จะได้แบบจำลองดังนี้



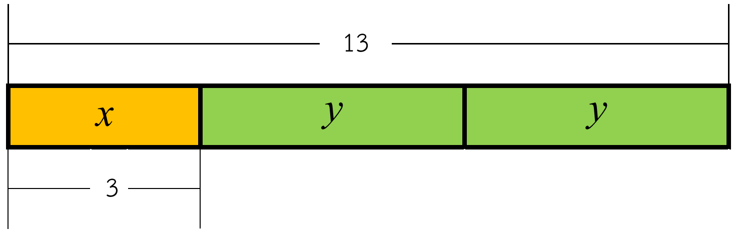
และจากแบบจำลองของสมการ $x+2y=13$ จะได้แบบจำลองด้านล่างนี้



นั่นคือ $5\times \boxed{x} = 28-13=15$

ดังนั้น $1\times \boxed{x} = 3$

และเมื่อพิจารณาแบบจำลองด้านล่างนี้



จะได้ว่า $2\times \boxed{y} = 13-3=10$

ดังนั้น $1\times \boxed{y} = 5$

เพราะฉะนั้น $x=3$ และ $y=5$ เป็นคำตอบของระบบสมการนี้

เนื่องจากการแก้ระบบสมการโดยใช้วิธีบาร์โมเดลดังตัวอย่างในบทความนี้ มีวิธีการที่ไม่ซับซ้อน ทำให้ผู้เรียนเห็นภาพได้ง่าย เมื่อใช้แท่งบาร์แทนตัวแปร ซึ่งเป็นการใช้รูปภาพแก้ปัญหาแทนการใช้วิธีการทางพีชคณิตแบบทั่วไป จึงมีความเป็นไปได้ที่การใช้วิธีบาร์โมเดลจะช่วยให้นักเรียนเข้าใจวิธีการแก้ระบบสมการได้ง่ายยิ่งขึ้น (ในหลักสูตรคณิตศาสตร์ของ สสวท. ระบบสมการ อยู่ในหลักสูตรการศึกษาในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) [5])

อันที่จริงแล้วการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวและระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยใช้วิธีบาร์โมเดลนั้น สอดคล้องกับการใช้สมบัติการเท่ากันในการแก้สมการ (วิธีการในปัจจุบันที่ผู้เรียนใช้ในการหาคำตอบหรือหาค่าของตัวแปรที่สอดคล้องกับสมการนั้น ๆ) หากลองพิจารณาดูอย่างละเอียด ผู้อ่านจะเห็นว่าการแก้ระบบสมการโดยใช้วิธีบาร์โมเดลสอดคล้องกับวิธีการแก้ระบบสมการโดยใช้วิธีการทางพีชคณิตแบบทั่วไปที่ใช้ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ไม่ว่าจะเป็นการแก้ระบบสมการโดย

วิธีการแทนค่า (Substitution Method) หรือจะเป็นการแก้ระบบสมการโดยใช้วิธีการกำจัดตัวแปร (Elimination Method) แน่นอนว่าหากสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในระบบสมการมีค่ามาก การใช้วิธีบาร์โมเดลในการหาคำตอบของระบบสมการอาจจะไม่เหมาะสม เพราะใช้เวลาในการวาดภาพมากเกินไป ถึงอย่างไรก็ตาม ผู้เขียนเชื่อว่าหากผู้เรียนมีความเข้าใจอย่างลึกซึ้งในวิธีการแก้ระบบสมการที่มีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่มีค่าน้อยก่อน จะส่งผลให้ผู้เรียนสามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่สัมประสิทธิ์ของตัวแปรมีค่ามาก หรือเป็นเศษส่วน หรือเป็นทศนิยม ได้ บนพื้นฐานวิธีคิดแบบเดียวกัน ซึ่งสมมติฐานของผู้เขียนนี้สอดคล้องกับผลวิจัยของ Ng และ Lee [15] ทั้งนี้พื้นฐานความเข้าใจที่ดีการมองวิธีการแก้ปัญหาอย่างเป็นรูปธรรม จะช่วยให้ผู้เรียนมีความเข้าใจที่ดียิ่งขึ้น ซึ่งจะช่วยสนับสนุนความสามารถในการเรียนรู้ของผู้เรียนเมื่อต้องเผชิญกับโจทย์ปัญหาที่มีความซับซ้อนมากขึ้นได้

5. สรุป

ถึงแม้ว่าประเทศไทยได้เริ่มต้นนำวิธีบาร์โมเดลมาใช้ในการเรียนการสอนแล้ว แต่การนำไปใช้อย่างถูกต้องจะมีบทบาทสำคัญต่อความเข้าใจของผู้เรียน ผู้เขียนเชื่อว่าวิธีบาร์โมเดลสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการเรียนรู้บทเรียนอื่น ๆ ของคณิตศาสตร์ได้ และหวังเป็นอย่างยิ่งว่าบทความนี้จะเป็นแนวทางให้แก่ผู้อ่านสำหรับการสร้างสรรค์วิธีการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ใหม่ ๆ เพื่อให้เกิดประโยชน์ต่อการศึกษาของประเทศไทยต่อไป

เอกสารอ้างอิง

[1] โครงการ PISA ประเทศไทย สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2552). *ตัวอย่างการประเมินผลนานาชาติ PISA: คณิตศาสตร์*. กรุงเทพมหานคร: อรุณการพิมพ์.
PISA Thailand, The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology (IPST). (2009). *PISA International Assessment Example: Mathematics*. Bangkok: Aroonprinting.

[2] นวลฤทัย ลาพาแว. (2559). การจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาทักษะการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ตามกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาของโพลยาร่วมกับเทคนิคการวาดรูปบาร์โมเดลสำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2. *วารสารการวิจัยกาสะลองคำ*, 10 (2), น. 55 – 64.

Lapawae, N. (2016). Organizing Learning Activity for Problem Solving Development by Polyas Problem Solving Processes Co-operate with Bar Model for Second Grade Students. *Kasalongkham Research Journal*, 10 (2), p. 55 – 64.

[3] ศรันย์ เปรมปรีดา. (2559). *การพัฒนาชุดฝึกทักษะในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ด้วยทฤษฎีบาร์โมเดล สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3*. (ปริญญานิพนธ์ครุศาสตรมหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยราชภัฏธนบุรี).

Prempreeda, S. (2016). *Development of Learning Package on Solving Mathematical Problems using Bar Model Theory for Grade 3 Students*. (Master's Thesis, Dhonburi Rajabhat University).

[4] สถาบันส่งเสริมวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2561). *คู่มือการใช้หลักสูตร กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ระดับประถมศึกษา*. กรุงเทพฯ: สถาบันส่งเสริมวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.

The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology. (2018). *Course manual of Mathematics (2017 Revised version) Primary level*. Bangkok: The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology.

[5] สถาบันส่งเสริมวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2561). *คู่มือการใช้หลักสูตร กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น*. กรุงเทพฯ: สถาบันส่งเสริมวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.

The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology. (2018). *Course manual of Mathematics (2017 Revised version) Lower-secondary level*. Bangkok: The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology.

[6] Bruner, J. S. (1973). *Beyond the Information Given: Studies in the Psychology of Knowing*. Oxford England: W. W. Norton.

[7] Choo, M. (2017). The Model Method – A Bridge to Introducing Algebra. Retrieved August 1, 2019, from https://www.mceducation.com/social-media-page-sharing/spark/2017/06/05/the-model-method-a-bridge-to-introducing-algebra

[8] Clark, A. (2013). Singapore Math: A Visual Approach to Word Problems. *Math in Focus: Singapore Math by Marshall Cavendish*. p. 1 – 7.

[9] Dienes, Z. P. (1971). *The Elements of Mathematics*. New York: Herder and Herder.

[10] Er, A. (2016). *How to Improve Your Mathematics: Primary 4*. Singapore: Educational Publishing House Pte.

[11] Gani, M. A., Tengah, K. A. and Said, H. (2019). Bar Model as Intervention in Solving Word Problem Involving Percentage. *International Journal on Emerging Mathematics Education*, 3 (1), p. 69 – 76.

[12] Kaur, B. (2019). The Why, What and How of the 'Model' Method: a Tool for Representing and Visualising Relationships When Solving Whole Number Arithmetic Word Problems. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 51 (1), p. 151 – 168.

[13] Kho, T. H., Yeo, S. M., & Lim, J. (2009). *The Singapore Model Method for Learning Mathematics*. Singapore: EPB Pan Pacific.

[14] Kintsch, W. and Greeno, J. G. (1985). Understanding and Solving Word Arithmetic Problems. *Psychological Review,* 92 (1), p. 109-129.

[15] Ng, S. F. and Lee, K. (2009). The Model Method: Singapore Children's Tool for Representing and Solving Algebraic Word Problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40 (3), p. 282 – 313.

[16] OECD. (2018) *PISA 2015 Results in Focus*. Retrieved from the OECD website: http://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus.pdf.

[17] Spencer, R. and Fielding, H. (2015). Using the Singapore Bar Model to Support the Interpretation and Understanding of Word Problems in Key Stage 2. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 35 (3), p. 114 – 119.

[18] Thirunavukkarasu, M. and Senthilnathan, S. (2014). Effectiveness of Bar Model in Enhancing the Learning of Mathematics at Primary Level. *International Journal of Teacher Educational Research (IJTER)*, 3 (1), p. 15 – 22.

[19] Yeap, B. H. (2010). *Bar Modeling: A Problem-Solving Tool*. Singapore: Marshall Cavendish Education.