วารสารคณิตศาสตร์ Mathematical Journal 65(700) มกราคม – เมษายน 2563
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

การคำนวณค่าตัวกำหนดด้วยวิธีของยาโคบีและวิธีควบแน่นของดอดจ์สัน (1)

Evaluating Determinants by Jacobi's Method and Dodgson's Condensation Method (1)

พิสมัย กิตติภูมิ[1,*] และ ปาริชาติ ศรีรัตน์[2]
[1,2]ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ สงขลา 90110

Pisamai Kittipoom[1,*] and Parichat Srirat[2]
[1,2]Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science, Prince of Songkla University, Songkhla 90110

Email: [1]pisamai.k@psu.ac.th [2]parichat74712@gmail.com

วันที่รับบทความ : 12 มิถุนายน 2562 วันที่แก้ไขบทความ : 1 กรกฎาคม 2562 วันที่ตอบรับบทความ : 12 ธันวาคม 2562

บทคัดย่อ

บทความนี้เป็นการศึกษาวิธีคำนวณค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์โดยใช้วิธีของยาโคบีและวิธีควบแน่นของดอดจ์สัน

คำสำคัญ: ตัวกำหนด โคแฟกเตอร์

ABSTRACT

This article demonstrates two methods for computing determinant of matrix: Jacobi method and Dodgson's condensation.

Keywords: Determinants, Cofactors

---

[*] ผู้เขียนหลัก

1. บทนำ

ตัวกำหนด (determinant) ของเมทริกซ์จัตุรัส $\mathbf{A}$ ขนาด $n \times n$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามบนเวกเตอร์ตามหลัก $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $\det \mathbf{A}$ หรือ $d(a_1, a_1, \ldots, a_n)$ และสอดคล้องตามสัจพจน์สามข้อคือ การเป็นหนึ่งเดียวในแถวต่าง ๆ (homogeneity in each row) การไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การบวกระหว่างแถว (invariance under row addition) และตัวกำหนดของเมทริกซ์เอกลักษณ์มีค่าเท่ากับ 1 (the determinant of the identity matrix is one)

ในระดับมัธยมศึกษา เรามีวิธีการที่ไม่ยุ่งยากและสูตรที่ง่ายในการคำนวณหาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด 2×2 และ 3×3 แต่เมื่อเมทริกซ์มีขนาดใหญ่ขึ้น วิธีการคำนวณค่าตัวกำหนดก็เริ่มซับซ้อนมากขึ้น โดยวิธีการคำนวณค่าตัวกำหนดที่นิยมใช้อย่างแพร่หลายและสามารถคำนวณได้กับเมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ ได้แก่ การหาตัวกำหนดโดยกระบวนการเกาส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan process) และวิธีกระจายตัวประกอบร่วมเกี่ยว (cofactor expansion)

ในบทความนี้ เรานำเสนอวิธีการคำนวณค่าตัวกำหนดที่นอกเหนือจากวิธีกระจายตัวประกอบร่วมเกี่ยว วิธีที่หนึ่งเป็นผลงานของนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน คาร์ล กุสทาฟ ยาคอบ ยาโคบี (Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804 - 1851) และวิธีที่สองเป็นผลงานชาวอังกฤษ ชาร์ล ลัตวิดจ์ ดอดจ์สัน (Charles Lutwidge Dodgson, 1832 - 1898) ซึ่งรู้จักกันในชื่อ วิธีควบแน่นของดอดจ์สัน (Dodgson’s condensation method) วิธีการนี้สามารถคำนวณค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาดใหญ่ได้โดยง่ายและรวดเร็วกว่าวิธีกระจายตัวประกอบร่วมเกี่ยวและวิธีของยาโคบี นอกจากความสวยงามและไม่ซับซ้อนของวิธีการนี้แล้ว ประวัติและผลงานด้านอื่น ๆ ของดอดจ์สันยังสร้างความประทับใจให้คณะผู้เรียบเรียงไม่น้อย [1, 4] โดยผลงานที่มีชื่อเสียงของดอดจ์สันนั้นหาใช่ผลงานทางคณิตศาสตร์ หากเป็นผลงานการประพันธ์วรรณกรรมเยาวชน ที่ใช้นามปากกาว่า ลิววิซ แคร์โรล (Lewis Carroll) โดยผลงานที่ประสบความสำเร็จมากที่สุดและมีชื่อเสียงมาจนมาถึงปัจจุปันนี้ คือ อลิซในดินแดนมหัศจรรย์ (Alice in Wonderland)

ถึงแม้ในยุคปัจจุบันมีโปรแกรมสำเร็จรูปที่สามารถคำนวณค่าตัวกำหนดได้ในเสี้ยววินาที แต่เมื่อย้อนเวลาไปในคริสตวรรษที่ 19 ที่ไม่มีเครื่องคำนวณเหมือนในปัจจุบัน การคิดค้นวิธีการที่สามารถลดขั้นตอนในการคำนวณค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาดใหญ่จึงนับเป็นสิ่งที่ท้าทาย ซึ่งผู้สนใจสามารถศึกษาทฤษฎีและวิวัฒนาการในการคำนวณค่าตัวกำหนดได้จาก [2 - 5]

2. การหาค่าตัวกำหนดโดยวิธีกระจายตัวประกอบร่วมเกี่ยว

กำหนดให้ $\mathbf{A}=[a_{i,j}]$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n\times n$ โดยที่ $a_{i,j}$ เป็นสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j ของ $\mathbf{A}$ *ตัวประกอบร่วมเกี่ยว หรือโคแฟกเตอร์ (cofactor)* ของ $\mathbf{A}$ คือ $C_{i,j}=(-1)^{i+j}\det(\mathbf{M}_{i,j})$ โดยที่ $\mathbf{M}_{i,j}$ เป็น *ไมเนอร์ (minor)* ของ $\mathbf{A}$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์ขนาด $(n-1)\times(n-1)$ ที่ได้จากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของ $\mathbf{A}$

2.1 การกระจายตัวประกอบร่วมเกี่ยว หรือการกระจายโคแฟกเตอร์ (cofactor expansion)

เป็นวิธีการคำนวณค่าตัวกำหนดของ $\mathbf{A}$ ผ่านผลบวกของโคแฟกเตอร์ของ $\mathbf{A}$ ซึ่งสามารถกระจายได้ในแต่ละแถว i ดังนี้

$$\det\mathbf{A}=a_{i,1}C_{i,1}+a_{i,2}C_{i,2}+a_{i,3}C_{i,3}+\cdots+a_{i,n}C_{i,n}$$

หรือกระจายได้ในแต่ละหลัก j

$$\det\mathbf{A}=a_{1,j}C_{1,j}+a_{2,j}C_{2,j}+a_{3,j}C_{3,j}+\cdots+a_{n,j}C_{n,j}$$

2.2 การหาค่าตัวกำหนดโดยวิธีของยาโคบี

บทนิยาม 2.1 กำหนดให้ $\mathbf{A}=[a_{i,j}]$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n\times n$

- $\left[a^*_{k:k+l,k:k+l}\right]$ เป็นเมทริกซ์ย่อยที่มีสมาชิกเป็น *ส่วนที่ซ้ำ* จากการตัดแถวและหลักที่สมมาตร คือ แถวและหลักที่ k ถึงแถวและหลักที่ $k+l$ โดยที่ $k\in\{1, 2, \dots, n\}$ และ $l\in\{0, 1, \dots, n-k\}$ ของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ เราเรียก $\left[a^*_{k:k+l,k:k+l}\right]$ ว่า *ไมเนอร์ประกอบ (complementary minor)* ของ $\mathbf{A}$
- $\mathbf{A}'$ คือ เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (transpose matrix) ของเมทริกซ์ตัวประกอบร่วมเกี่ยว $\left[C_{i,j}\right]$ ของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ เราเรียก $\mathbf{A}'=\left[C_{j,i}\right]$ ว่า *แอดจูเกต (adjugate)* ของ $\mathbf{A}$
- $\left[a'_{k:k+l,k:k+l}\right]$ เป็นเมทริกซ์ย่อยที่มีสมาชิกเป็น *ส่วนที่เหลือ* จากการตัดแถวและหลักที่สมมาตรคือ แถวและหลักที่ k ถึงแถวและหลักที่ $k+l$ โดยที่ $k\in\{1, 2, \dots, n\}$ และ $l\in\{0, 1, \dots, n-k\}$ ของเมทริกซ์ $\mathbf{A}'$ เราเรียก $\left[a'_{k:k+l,k:k+l}\right]$ ว่า *ไมเนอร์สอดคล้อง (corresponding minor)* ของ $\mathbf{A}'$

ตัวอย่าง 2.1 สำหรับเมทริกซ์ $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 0\end{bmatrix}$

จะได้ เอดจูเกตของของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ คือ $\mathbf{A}'=\left[C_{j,i}\right]=\begin{bmatrix}-3 & -3 & 3\\ -1 & -1 & -3\\ 8 & -4 & 0\end{bmatrix}$

เมื่อตัดแถวและหลักที่ 2 ของ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{A}'$ จะได้ว่า

ไมเนอร์ประกอบ $\left[a^{*}_{2,2}\right]=2$ และ ไมเนอร์สอดคล้อง $\left[a'_{2,2}\right]=\begin{bmatrix}-3 & 3\\ 8 & 0\end{bmatrix}$

ทฤษฎีบท 2.2 (ทฤษฎีบทยาโคบี) [5] ให้ $\mathbf{A}=[a_{i,j}]$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n\times n$ โดยที่ $n\geq 3$ ถ้า $\left[a^{*}_{k:\,k+n-m-1,k:\,k+n-m-1}\right]$ เป็น ไมเนอร์ประกอบขนาด $(n-m)\times(n-m)$ ของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ โดยที่ $2\leq m<n-1$ และ $\left[a'_{k:\,k+n-m-1,k:\,k+n-m-1}\right]$ เป็น ไมเนอร์สอดคล้องขนาด $m\times m$ ของเมทริกซ์ $\mathbf{A}'$ แล้ว

$$\det\mathbf{A}\det\left[a'_{k:\,k+n-m-1,k:\,k+n-m-1}\right]=(\det\mathbf{A})^{m}\det\left[a^{*}_{k:\,k+n-m-1,k:\,k+n-m-1}\right] \qquad (1)$$

ถ้า $\det\mathbf{A}\neq 0$ แล้ว

$$\det\left[a'_{k:\,k+n-m-1,k:\,k+n-m-1}\right]=(\det\mathbf{A})^{m-1}\det\left[a^{*}_{k:\,k+n-m-1,k:\,k+n-m-1}\right] \qquad (2)$$

ตัวอย่าง 2.2 พิจารณาการหาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 0\end{bmatrix}$

เนื่องจากเวกเตอร์หลักของ $\mathbf{A}$ เป็นอิสระเชิงเส้น ดังนั้น ตัวกำหนดของ $\mathbf{A}$ จึงไม่เท่ากับศูนย์ และเนื่องจากขนาดของเมทริกซ์ $n=3$ ดังนั้นได้ค่า m ที่เป็นไปได้เพียงค่าเดียวเท่านั้นคือ $m=2$ นั่นคือ จะต้องตัดแถวและหลักที่สมมาตรของ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{A}'$ ได้จำนวน 1 แถว 1 หลัก เช่น ถ้าตัดแถวที่ 2 และหลักที่ 2 ของ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{A}'$ ดังในตัวอย่างที่ 2.1 จะได้ ไมเนอร์ประกอบ $\left[a^{*}_{2,2}\right]=2$ และไมเนอร์สอดคล้อง $\left[a'_{2,2}\right]=\begin{bmatrix}-3 & 3\\ 8 & 0\end{bmatrix}$ ดังนั้นโดยสูตร (2) ของทฤษฎีบทยาโคบี ได้ว่า

$$\det\left[a'_{2,2}\right]=(\det\mathbf{A})^{2-1}\det\left[a^{*}_{2,2}\right]$$

นั่นคือ $\det\mathbf{A}=-12$

หมายเหตุ จากตัวอย่าง การตัดแถวและหลักที่ไม่สมมาตรจะทำให้เราได้ค่าตัวกำหนดที่ไม่ถูกต้อง เช่น เมื่อตัดแถวที่ 2 และหลักที่ 3 ของ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{A}'$ ไมเนอร์ประกอบ $\left[a_{2,3}^{*}\right]=1$ และ ไมเนอร์สอดคล้อง $\left[a_{2,3}'\right]=\begin{bmatrix}-3 & -3\\ 8 & -4\end{bmatrix}$ ดังนั้น $\dfrac{\det\left[a_{2,3}'\right]}{\det\left[a_{2,3}^{*}\right]}=\dfrac{36}{1}\neq\det\mathbf{A}$

นอกจากนี้ การเลือกตัดแถวและหลักที่ไม่เหมาะสม เช่น การตัดแถวและหลักที่ 3 ของ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{A}'$ ทำให้ได้ว่า ไมเนอร์ประกอบ $\left[a_{3,3}^{*}\right]=0$ ซึ่งจะทำให้ไม่สามารถคำนวณค่า $\det\mathbf{A}$ โดยใช้สูตรของยาโคบีได้ ดังนั้น โดยวิธีของยาโคบี จำเป็นต้องเลือกตัดแถวและหลักที่ทำให้ได้ไมเนอร์ประกอบที่มีค่าตัวกำหนดไม่เท่ากับศูนย์ ในส่วนของไมเนอร์สอดคล้อง ที่ได้มาจากส่วนที่เหลือจากการตัดแถวและหลักของ $\mathbf{A}'$ ในทางปฏิบัติ ไม่จำเป็นต้องคำนวณค่าสมาชิกทุกตัวใน $\mathbf{A}'$ โดยจะคำนวณค่าสมาชิกส่วนที่เหลือจากการตัดเท่านั้น

ตัวอย่าง 2.3 พิจารณาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1\\ 3 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 2 & 3\end{bmatrix}$

วิธีที่ 1 โดยวิธีของยาโคบี เลือกตัดแถวที่ 3 และ 4 และหลักที่ 3 และ 4 ของ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{A}'$ จะได้ว่า $m=5-2=3$ ดังนั้น ไมเนอร์ประกอบของ $\mathbf{A}$ คือ

$$\left[a_{3:4,3:4}^{*}\right]=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

และ ไมเนอร์สอดคล้องของ $\mathbf{A}'$ คือ

$$\left[a_{3:4,3:4}'\right]=\begin{bmatrix}C_{1,1} & C_{2,1} & C_{5,1}\\ C_{1,2} & C_{2,2} & C_{5,2}\\ C_{1,5} & C_{2,5} & C_{5,5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}53 & 16 & -6\\ 39 & 12 & -6\\ -23 & -4 & 6\end{bmatrix}$$

โดยที่ $C_{j,i}$ คือโคแฟกเตอร์ของ $\mathbf{A}$ ดังนั้น จากสูตร (2) ของทฤษฎีบทยาโคบี ได้ว่า

$$\det\left[a_{3:4,3:4}'\right]=(\det\mathbf{A})^{3-1}\det\left[a_{3:4,3:4}^{*}\right]$$

เนื่องจาก $\det\left[a_{3:4,3:4}'\right]=288$ และ $\det\left[a_{3:4,3:4}^{*}\right]=2$ จะได้ว่า $\left(\det\mathbf{A}\right)^{2}=144$

เนื่องจากค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์มีเพียงหนึ่งเดียว ดังนั้น การเลือกตัดแถวและหลักที่ทำให้ค่า m เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ และใช้สูตร (2) ของทฤษฎีบทยาโคบี ในการหาค่าตัวกำหนด จึงเกิดปัญหาขึ้นดังแสดงข้างต้น ด้วยเหตุนี้จำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องแก้ปัญหานี้ โดยการเลือกตัวแถวและหลักที่ทำให้ค่า m เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ ดังจะแสดงในวิธีที่ 2

วิธีที่ 2 เลือกตัดแถวที่ 3 ถึง 5 และหลักที่ 3 ถึง 5 ของ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{A}'$ จะได้ว่าได้ $m = 5-3 = 2$

ดังนั้น ไมเนอร์ประกอบของ $\mathbf{A}$ คือ $\left[a^*_{3:5,3:5}\right] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ และ

ไมเนอร์สอดคล้องของ $\mathbf{A}$ คือ $\left[a'_{3:5,3:5}\right] = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{2,1} \\ C_{1,2} & C_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53 & 16 \\ 39 & 12 \end{bmatrix}$

โดยที่ $C_{j,i}$ คือโคแฟกเตอร์ของ $\mathbf{A}$ ดังนั้น จากสูตร (2) ของทฤษฎีบทยาโคบี ได้ว่า

$$\det\left[a'_{3:5,3:5}\right] = (\det \mathbf{A})^{2-1} \det\left[a^*_{3:5,3:5}\right]$$

นั่นคือ $\det \mathbf{A} = \dfrac{\det\left[a'_{3:5,3:5}\right]}{\det\left[a^*_{3:5,3:5}\right]} = 12$

นอกจากปัญหาค่าตัวกำหนดสองค่าที่เกิดจากการเลือกตัดแถวและหลัก ที่ทำให้ m เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ วิธีของยาโคบียังล้มเหลวถ้าการเลือกตัดแถวและหลักทำให้ $\det\left[a^*_{k:\,k+n-m-1,k:\,k+n-m-1}\right] = 0$

3. การหาค่าตัวกำหนดโดยวิธีควบแน่นของดอดจ์สัน

วิธีควบแน่นเป็นการลดขนาดของเมทริกซ์ลงทีละหนึ่ง โดยผ่านการคำนวณค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อยขนาด 2×2 ของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ที่ได้จากสมาชิกในแถวและหลักติดกัน สำหรับเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ขนาด $n\times n$ ให้ $\mathbf{B}^{(n-k)}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $(n-k)\times(n-k)$ ที่ได้จากการควบแน่นเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ในครั้งที่ k โดยที่ $k = 1, 2, \ldots, n-1$ เช่น

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ทำการควบแน่นเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ จะได้ เมทริกซ์ $\mathbf{B}^{(3)}$ ขนาด 3×3 ดังนี้

$$\mathbf{B}^{(3)}=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & -3\\ 3 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & -2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 1 & 9\\ 7 & -7 & -3\\ -6 & 7 & 5\end{bmatrix}$$

ทั้งนี้สามารถควบแน่นเมทริกซ์ต่อไปจนได้เมทริกซ์ขนาด 1×1

ในวิธีการควบแน่น ไม่ว่าเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ จะมีขนาดเท่าใดก็ตาม การคำนวณค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ จะมีขั้นตอนการคำนวณผ่านตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด 2×2 ซึ่งเป็นการลดความยุ่งยากในการคำนวณเมื่อเทียบกับวิธีของยาโคบี

ในขั้นตอนของวิธีควบแน่นของดอดจ์สันที่จะกล่าวถึงต่อไป จำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องรู้จัก $\operatorname{int}\mathbf{A}$ ซึ่งเป็น *เมทริกซ์ภายใน (interior matrix)* ขนาด $(n-2)\times(n-2)$ ของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ที่มีขนาด $n\times n$ โดยสมาชิกใน $\operatorname{int}\mathbf{A}$ ได้มาจากการตัดแถวที่ 1 และ n และตัดหลักที่ 1 และ n ของ $\mathbf{A}$ เช่น

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4}\\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4}\end{bmatrix} \text{ มีเมทริกซ์ภายใน คือ } \operatorname{int}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,2} & a_{3,3}\end{bmatrix}$$

3.1 ขั้นตอนการคำนวณค่าตัวกำหนดโดยวิธีควบแน่นของดอดจ์สัน [4]

ให้ $\mathbf{A}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n\times n$ และสมาชิกของ $\operatorname{int}\mathbf{A}^{(n-k)}$ ทุกตัวไม่เท่ากับศูนย์ การควบแน่นของดอดจ์สันมีขั้นตอนดังนี้

1) ให้ เมทริกซ์ $\mathbf{A}$ แทน ด้วย $\mathbf{A}^{(n)}$)
   ให้ $\mathbf{B}^{(n-k)}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $(n-k)\times(n-k)$ ที่ได้จากการควบแน่นของเมทริกซ์ $\mathbf{A}^{(n-k+1)}$ ที่มีขนาด $(n-k+1)\times(n-k+1)$
2) การควบแน่นครั้งแรก $(k=1)$ ให้ $\mathbf{A}^{(n-1)}=\mathbf{B}^{(n-1)}$ และ
   สำหรับ $k=2,3,\ldots,n-1$ ให้ $\mathbf{A}^{(n-k)}$ เป็นเมทริกซ์ ที่สมาชิกแต่ละตัวได้จากการหารสมาชิกใน $\mathbf{B}^{(n-k)}$ ด้วยสมาชิกใน $\operatorname{int}\mathbf{A}^{(n-k+2)}$ ในตำแหน่งเดียวกัน เรียก $\mathbf{A}^{(n-k)}$ ว่า *เมทริกซ์ควบแน่น*ครั้งที่ k ของ $\mathbf{A}$

3) ทำการควบแน่น $\mathbf{A}^{(n-k)}$ จนถึงครั้งที่ $k = n-1$ ซึ่งจะได้ $\mathbf{A}^{(1)}$ ที่มีสมาชิกเพียงตัวเดียว ซึ่งโดยวิธีควบแน่นของดอดจ์สัน จะได้ว่า สมาชิกตัวดังกล่าว คือ ค่าตัวกำหนดของ $\mathbf{A}$

ตัวอย่าง 3.1 พิจารณาเมทริกซ์

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

เริ่มต้นการควบแน่นครั้งที่ 1 ($k=1$) โดยการควบแน่นเมทริกซ์ $\mathbf{A}^{(5)}$ ทำให้ได้ $\mathbf{A}^{(4)} = \mathbf{B}^{(4)}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 4×4 ดังนี้

$$\mathbf{A}^{(4)} = \mathbf{B}^{(4)} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -6 & 5 & 5 & -1 \\ 5 & -4 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

ต่อมาทำการควบแน่นครั้งที่ 2 ($k=2$) โดยควบแน่นเมทริกซ์ $\mathbf{A}^{(4)}$ ทำให้เราได้เมทริกซ์ $\mathbf{B}^{(3)}$ ซึ่งในขั้นนี้จะมีการหารสมาชิกใน $\mathbf{B}^{(3)}$ ที่ได้ด้วยสมาชิกของ $\operatorname{int} \mathbf{A}^{(5)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ในตำแหน่งเดียวกัน ดังนี้

$$\mathbf{B}^{(3)}=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}2&-1\\-6&5\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-1&-1\\5&5\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-1&1\\5&-1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}-6&5\\5&-4\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}5&5\\-4&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}5&-1\\2&1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}5&-4\\-3&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-4&2\\1&6\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&1\\6&4\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&-4\\-1&30&7\\-7&-26&2\end{bmatrix}$$

และ

$$\mathbf{A}^{(3)}=\begin{bmatrix}\frac{4}{2}&\frac{0}{1}&\frac{-4}{-2}\\\frac{-1}{-1}&\frac{30}{2}&\frac{7}{1}\\\frac{-7}{1}&\frac{-26}{2}&\frac{2}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&2\\1&15&7\\-7&-13&1\end{bmatrix}$$

ทำการควบแน่นครั้งที่ 3 ($k=3$) โดยควบแน่นเมทริกซ์ $\mathbf{A}^{(3)}$ ทำให้เราได้เมทริกซ์ $\mathbf{B}^{(2)}$ และสามารถหารสมาชิกใน $\mathbf{B}^{(2)}$ ที่ได้ด้วยสมาชิกของ $\operatorname{int}\mathbf{A}^{(4)}=\begin{bmatrix}5&5\\-4&2\end{bmatrix}$ ในตำแหน่งเดียวกัน ดังนี้

$$\mathbf{B}^{(2)}=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}2&0\\1&15\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&2\\15&7\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&15\\-7&-13\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}15&7\\-13&1\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30&-30\\92&106\end{bmatrix}$$

และ

$$\mathbf{A}^{(2)}=\begin{bmatrix}6&-6\\-23&53\end{bmatrix}$$

ขั้นตอนสุดท้าย ทำการควบแน่นเมทริกซ์ $\mathbf{A}^{(2)}$ ทำให้เราได้เมทริกซ์ $\mathbf{B}^{(1)}$ และสามารถหารสมาชิกใน $\mathbf{B}^{(1)}$ ที่ได้ด้วยสมาชิกของ $\operatorname{int}\mathbf{A}^{(3)}=15$ ทำให้ได้เมทริกซ์ควบแน่น $\mathbf{A}^{(1)}$ ซึ่งคือ ค่าตัวกำหนดของ $\mathbf{A}$

$$\det\mathbf{A}=\frac{1}{\operatorname{int}\mathbf{A}^{(3)}}\det\mathbf{A}^{(2)}=\frac{318-138}{15}=12$$

3.2 ข้อจำกัดของวิธีควบแน่นของดอดจ์สัน

สำหรับเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ที่มีสมาชิกบางตำแหน่งใน $\operatorname{int}\mathbf{A}$ มีค่าเป็นศูนย์ จะทำให้เกิดปัญหาขึ้นในการควบแน่นครั้งที่สอง ซึ่งในขั้นนี้ต้องมีการหารสมาชิกในเมทริกซ์ที่ได้ด้วยสมาชิกใน $\operatorname{int}\mathbf{A}$

ในตำแหน่งเดียวกัน อย่างไรก็ตามการแก้ปัญหานี้สามารถทำได้โดยการสลับแถวหรือสลับหลักของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ จนได้เป็นเมทริกซ์ที่ไม่มีศูนย์ใน $\operatorname{int}\mathbf{A}$ เช่น

ตัวอย่าง 3.2 พิจารณาเมทริกซ์ $\mathbf{A}=\mathbf{A}^{(4)}=\begin{bmatrix}1&2&-1&-3\\-2&1&3&0\\-2&0&3&1\\1&3&2&-1\end{bmatrix}$ ซึ่งพบว่ามีศูนย์ในเมทริกซ์ภายใน $\operatorname{int}\mathbf{A}^{(4)}=\begin{bmatrix}1&3\\0&3\end{bmatrix}$ และจะทำให้เกิดปัญหาในกระบวนการควบแน่น ดังนั้นในการแก้ปัญหาดังกล่าวนี้จะดำเนินการโดยสลับแถวที่ 3 และ 4 ของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ดังนี้

$$\tilde{\mathbf{A}}=\tilde{\mathbf{A}}^{(4)}=\begin{bmatrix}1&2&-1&-3\\-2&1&3&0\\1&3&2&-1\\-2&0&3&1\end{bmatrix}$$

จะได้ว่า เมทริกซ์ภายในของเมทริกซ์ใหม่ คือ $\operatorname{int}\tilde{\mathbf{A}}^{(4)}=\begin{bmatrix}1&3\\3&2\end{bmatrix}$ จากนั้นทำการควบแน่นเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{A}}^{(4)}$ ทำให้ได้เมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{A}}^{(3)}$ ขนาด 3×3 ดังนี้

$$\tilde{\mathbf{A}}^{(3)}=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}1&2\\-2&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&-1\\1&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-1&-3\\3&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}-2&1\\1&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&3\\3&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}3&0\\2&-1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&3\\-2&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}3&2\\0&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&-1\\3&1\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&7&9\\-7&-7&-3\\6&9&5\end{bmatrix}$$

ต่อมาทำการควบแน่นเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{A}}^{(3)}$ และหารสมาชิกแต่ละตำแหน่งด้วย $\operatorname{int}\tilde{\mathbf{A}}^{(4)}=\begin{bmatrix}1&3\\3&2\end{bmatrix}$ จะได้

$$\tilde{\mathbf{A}}^{(2)}=\begin{bmatrix}\dfrac{\begin{vmatrix}5&7\\-7&-7\end{vmatrix}}{1}&\dfrac{\begin{vmatrix}7&9\\-7&-3\end{vmatrix}}{3}\\\dfrac{\begin{vmatrix}-7&-7\\6&9\end{vmatrix}}{3}&\dfrac{\begin{vmatrix}-7&-3\\9&5\end{vmatrix}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14&14\\-7&-4\end{bmatrix}$$

ท้ายสุด ควบแน่นเมทริกซ์ $\tilde{\mathbf{A}}^{(2)}$ และหารสมาชิกแต่ละตำแหน่งด้วย $\operatorname{int}\tilde{\mathbf{A}}^{(3)} = -7$ ทำให้ได้ค่าตัวกำหนดของ $\tilde{\mathbf{A}}$ คือ

$$\det\tilde{\mathbf{A}} = \frac{1}{\operatorname{int}\tilde{\mathbf{A}}^{(3)}}\det\tilde{\mathbf{A}}^{(2)} = \frac{42}{-7} = -6$$

ดังนั้น $\det\mathbf{A} = -\det\tilde{\mathbf{A}} = 6$

อย่างไรก็ตาม วิธีการสลับแถวหรือหลัก เพื่อให้ได้เมทริกซ์ภายในที่ปราศจากค่าศูนย์นั้น อาจไม่ประสบความสำเร็จสำหรับบางเมทริกซ์ ตัวอย่างเช่น $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ซึ่งไม่ว่าจะสลับแถวหรือหลักแบบใด ก็ยังคงมีศูนย์อยู่ในเมทริกซ์ภายใน ในตอนท้ายของหัวข้อถัดไป จะนำเสนอแนวทางการแก้ปัญหาของตัวอย่างนี้

4. เบื้องหลังความสำเร็จของวิธีควบแน่นของดอดจ์สัน

พิจารณาเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ขนาด 4×4

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}$$

โดยวิธีของยาโคบี เลือกตัดแถวที่ 2 และ 3 และตัดหลักที่ 2 และ 3 จะได้ ไมเนอร์ประกอบของ $\mathbf{A}$ คือ $\left[a^*_{2:3,\,2:3}\right] = \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = \operatorname{int}\mathbf{A}$ และไมเนอร์สอดคล้องของ $\mathbf{A}'$ คือ $\left[a'_{2:3,2:3}\right] = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{4,1} \\ C_{1,4} & C_{4,4} \end{bmatrix}$ โดยที่ $C_{j,i}$ คือ โคแฟกเตอร์ของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ซึ่งสามารถคำนวณได้โดยวิธีของยาโคบีอีกครั้ง โดยการตัดแถวและหลักที่บรรจุสมาชิกใน $\operatorname{int}\mathbf{M}_{j,i}$ จะได้ว่า

$$C_{1,1} = \left|\mathbf{A}_{2:4,2:4}\right| = \frac{1}{a_{3,3}}\begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,3} & a_{3,4} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = \frac{1}{a_{3,3}}\begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,3} & a_{3,4} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} \end{Vmatrix}$$

$$C_{4,1}=-\left|\mathbf{A}_{1:3,2:4}\right|=\frac{-1}{a_{2,3}}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{2,3} & a_{2,4}\\ a_{3,3} & a_{3,4}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{1,3} & a_{1,4}\\ a_{2,3} & a_{2,4}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,2} & a_{2,3}\end{vmatrix}\end{vmatrix}=\frac{-1}{a_{2,3}}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,2} & a_{2,3}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{1,3} & a_{1,4}\\ a_{2,3} & a_{2,4}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{2,3} & a_{2,4}\\ a_{3,3} & a_{3,4}\end{vmatrix}\end{vmatrix}$$

$$C_{1,4}=-\left|\mathbf{A}_{2:4,1:3}\right|=\frac{-1}{a_{3,2}}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{3,2} & a_{3,3}\\ a_{4,2} & a_{4,3}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_{3,1} & a_{3,2}\\ a_{4,1} & a_{4,2}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{2,1} & a_{2,2}\\ a_{3,1} & a_{3,2}\end{vmatrix}\end{vmatrix}=\frac{-1}{a_{3,2}}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{2,1} & a_{2,2}\\ a_{3,1} & a_{3,2}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_{3,1} & a_{3,2}\\ a_{4,1} & a_{4,2}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{3,2} & a_{3,3}\\ a_{4,2} & a_{4,3}\end{vmatrix}\end{vmatrix}$$

และ

$$C_{4,4}=\left|\mathbf{A}_{1:4,1:4}\right|=\frac{1}{a_{2,2}}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,2} & a_{2,3}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_{2,1} & a_{2,2}\\ a_{3,1} & a_{3,2}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{vmatrix}\end{vmatrix}=\frac{1}{a_{2,2}}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,2} & a_{2,3}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_{2,1} & a_{2,2}\\ a_{3,1} & a_{3,2}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix}\end{vmatrix}$$

จากสูตร (2) ของทฤษฎีบทยาโคบี จะได้ ตัวกำหนดของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ คือ

$$\det\mathbf{A}=\frac{\det\left[a'_{2:3,2:3}\right]}{\det\left[a^{*}_{2:3,2:3}\right]}=\frac{1}{\begin{vmatrix}a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}C_{1,1} & C_{4,1}\\ C_{1,4} & C_{4,4}\end{vmatrix}=\frac{1}{\begin{vmatrix}a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}C_{4,4} & -C_{4,1}\\ -C_{1,4} & C_{1,1}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{\begin{vmatrix}a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}\frac{1}{a_{2,2}}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,2} & a_{2,3}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_{2,1} & a_{2,2}\\ a_{3,1} & a_{3,2}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix}\end{vmatrix} & \frac{1}{a_{2,3}}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,2} & a_{2,3}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{1,3} & a_{1,4}\\ a_{2,3} & a_{2,4}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{2,3} & a_{2,4}\\ a_{3,3} & a_{3,4}\end{vmatrix}\end{vmatrix}\\ \frac{1}{a_{3,2}}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{2,1} & a_{2,2}\\ a_{3,1} & a_{3,2}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_{3,1} & a_{3,2}\\ a_{4,1} & a_{4,2}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{3,2} & a_{3,3}\\ a_{4,2} & a_{4,3}\end{vmatrix}\end{vmatrix} & \frac{1}{a_{3,3}}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{2,3} & a_{2,4}\\ a_{3,3} & a_{3,4}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_{3,2} & a_{3,3}\\ a_{4,2} & a_{4,3}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{3,3} & a_{3,4}\\ a_{4,3} & a_{4,4}\end{vmatrix}\end{vmatrix}\end{vmatrix} \tag{3}$$

ทั้งนี้สามารถแจกแจงขั้นตอนการคำนวณในสมการ (3) ได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 คำนวณค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อยขนาด 2×2 ของ $\mathbf{A}$ และจัดเรียงเป็นเมทริกซ์ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,3} & a_{2,4} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,3} & a_{3,4} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,2} \\ a_{4,1} & a_{4,2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

พบว่าเมทริกซ์ดังกล่าว คือ เมทริกซ์ควบแน่น $\mathbf{A}^{(3)}$ ซึ่งได้จากการควบแน่นครั้งที่ 1 ในวิธีควบแน่นของดอดจ์สัน

ขั้นที่ 2 หาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อยขนาด 2×2 ทุกตัวในเมทริกซ์ที่ได้จากขั้นที่ 1 และหารสมาชิกที่ได้ด้วยสมาชิกใน $\operatorname{int}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$ ในตำแหน่งเดียวกัน ซึ่งจะได้ค่าของสมาชิกทั้งหมดในสมการ (3)

จะพบว่า ขั้นตอนนี้ตรงกับการควบแน่นครั้งที่ 2 ในวิธีควบแน่นของดอดจ์สัน และไมเนอร์สอดคล้อง $\left[a'_{2:3,2:3} \right]$ คือ เมทริกซ์ควบแน่น $\mathbf{A}^{(2)}$

ขั้นที่ 3 หาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ที่ได้จากขั้นที่ 2 และหารด้วย $|\operatorname{int}\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$ ซึ่งจะได้ว่าค่าตัวกำหนดของ $\mathbf{A}$ คือ การควบแน่นครั้งสุดท้ายของวิธีควบแน่นของดอดจ์สัน

จากการหาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด 4×4 ข้างต้น พบว่า วิธีควบแน่นของดอดจ์สัน ได้มาจากการแจกแจงขั้นตอนในวิธีของยาโคบีนั่นเอง โดยเงื่อนไขที่ทำให้วิธีของดอดจ์สันประสบความสำเร็จ คือ ต้องไม่มีการหารด้วยศูนย์เกิดขึ้นในกระบวนการ สำหรับรายละเอียดการพิสูจน์วิธีควบแน่นของดอดจ์สันสำหรับเมทริกซ์ขนาด $n\times n$ ใด ๆ จะแสดงรายละเอียดในบทความการคำนวณค่าตัวกำหนดด้วยวิธีของยาโคบีและวิธีควบแน่นของดอดจ์สัน ตอนที่ 2 วารสารคณิตศาสตร์ฉบับถัดไป

ในกรณีที่มีสมาชิกบางตัวใน $\operatorname{int}\mathbf{A}$ เป็นศูนย์ เช่น ในตัวอย่าง 3.2 เราสามารถแก้ปัญหาได้โดยการสลับแถวหรือสลับหลัก เพื่อทำให้ $\operatorname{int}\mathbf{A}$ ที่ไม่มีสมาชิกภายในเป็นศูนย์ แต่ในบางกรณีพบว่าไม่สามารถแก้ปัญหาโดยการสลับแถวหรือหลักได้ เช่นในตัวอย่างที่ 4.1

ตัวอย่าง 4.1 พิจารณาเมทริกซ์

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

พบว่า ไม่สามารถการสลับแถวหรือหลัก เพื่อทำให้สมาชิกใน $\operatorname{int}\mathbf{A}$ ทุกตัวไม่เป็นศูนย์ แต่กระบวนการควบแน่นของดอดจ์สัน ยังคงสามารถดำเนินการได้ แต่เพียงต้องแก้ไขในบางขั้นตอน การควบแน่นครั้งที่ 1 สามารถดำเนินการได้โดยไม่มีปัญหา และได้ผลดังนี้

$$\mathbf{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

แต่ในการควบแน่นครั้งที่ 2 เพื่อหาเมทริกซ์ควบแน่น $\mathbf{A}^{(2)}$ พบว่า ไม่สามารถหาสมาชิก $a_{2,1}^{(2)}$ ได้

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ ? & 0 \end{bmatrix}$$

เนื่องจากต้องการหารด้วยสมาชิก $a_{3,2}$ ใน $\operatorname{int}\mathbf{A}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ ($a_{3,2} = 0$)

แต่เมื่อย้อนกลับพิจารณาการหาตัวกำหนดจากในสมการ (3) โดยวิธีของยาโคบี จะได้ว่า $\mathbf{A}^{(2)} = \left[a'_{2:3,2:3} \right]$ เนื่องจาก $\left[a'_{2:3,2:3} \right] = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{4,1} \\ C_{1,4} & C_{4,4} \end{bmatrix}$ ดังนั้น สมาชิก $a_{2,1}^{(2)}$ ใน $\mathbf{A}^{(2)}$ คือ

$$a_{2,1}^{(2)} = C_{1,4} = \left|\mathbf{A}_{2:4,1:3}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

จากที่กระบวนการควบแน่นได้แนวคิดมาจากวิธีของยาโคบี ที่มีการตัดแถวและตัดหลักของ $\mathbf{A}_{2:4,1:3}$ ที่บรรจุสมาชิกใน $\operatorname{int}\mathbf{A}_{2:4,1:3}$ ในกรณีนี้หากดำเนินการในลักษณะเดิมก็จะเกิดปัญหาขึ้น ดังนั้น ทำการสลับแถวที่ 1 และแถวที่ 2 ของ $\mathbf{A}_{2:4,1:3}$ จะได้ $\tilde{\mathbf{A}}_{2:4,1:3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ จากนั้นตัดแถวที่ 2 และตัดหลักที่ 2 ของ $\tilde{\mathbf{A}}_{2:4,1:3}$ ทำให้ได้ ไมเนอร์ประกอบ คือ $\left[\tilde{a}_{2,2}^{*} \right] = 1$ และไมเนอร์สอดคล้อง

$\left[\tilde{a}'_{2,2}\right] = \begin{bmatrix} \tilde{C}'_{1,1} & \tilde{C}'_{3,1} \\ \tilde{C}'_{1,3} & \tilde{C}'_{3,3} \end{bmatrix}$ โดยที่ $\tilde{C}'_{k,l}$ คือ โคแฟกเตอร์ขนาด 2×2 ของ $\tilde{\mathbf{A}}_{2:4,1:3}$ และจากสูตร (2) ของทฤษฎีบทยาโคบี จะได้ว่า

$$a_{2,1}^{(2)} = -\left|\tilde{\mathbf{A}}_{2:4,1:3}\right| = -\frac{\begin{vmatrix} \tilde{C}'_{1,1} & \tilde{C}'_{3,1} \\ \tilde{C}'_{1,3} & \tilde{C}'_{3,3} \end{vmatrix}}{1} = -\begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

นั่นคือ เมทริกซ์ควบแน่นครั้งที่ 2 คือ $\mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

จากนั้นทำการควบแน่น $\mathbf{A}^{(2)}$ และหารด้วย $\operatorname{int} \mathbf{A}^{(3)} = 2$ จะได้

$$\det \mathbf{A} = \frac{4}{2} = 2$$

ซึ่งเป็นค่าของตัวกำหนดที่ถูกต้องของ $\mathbf{A}$

6. สรุป

ในการหาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาดใหญ่ด้วยมือ ผู้ดำเนินการหามักมีกำลังใจ เมื่อพบว่าเมทริกซ์ที่ต้องคำนวณนั้นเต็มไปด้วยศูนย์ ซึ่งสามารถเลือกใช้กระบวนการลดรูปแบบเกาส์-จอร์แดนหรือการกระจายตัวประกอบร่วมเกี่ยว ในการหาค่าตัวกำหนดได้โดยไม่ยุ่งยาก แต่ถ้าเมื่อใดต้องหาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ที่เต็มไปด้วยจำนวนที่ไม่ใช่ศูนย์ กระบวนการควบแน่นของดอดจ์สันก็เป็นอีกวิธีการหนึ่งที่น่าสนใจ เนื่องจากมีขั้นตอนที่เรียบง่ายและไม่ซับซ้อน แต่ในทางกลับกัน จากสองตัวอย่างสุดท้าย พบว่าวิธีควบแน่นของดอดจ์สันมีปัญหา เมื่อต้องคำนวณตัวกำหนดของเมทริกซ์ที่มีศูนย์อยู่ในตำแหน่งที่สำคัญ สำหรับวิธีของยาโคบี มีการคำนวณหาค่าตัวกำหนดผ่านค่าตัวกำหนดของไมเนอร์ประกอบและไมเนอร์สอดคล้อง แต่มีความยุ่งยากในการหาไมเนอร์สอดคล้อง วิธีการนี้จึงไม่เป็นที่รู้จักในวงกว้าง แต่เมื่อดอดจ์สันได้แจกแจงขั้นตอนเกี่ยวกับสูตรที่ได้จากวิธีของยาโคบี เขาจึงได้กระบวนในวิธีควบแน่นของดอดจ์สัน แต่อย่างไรก็ตามวิธีของยาโคบีสามารถช่วยแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในวิธีการควบแน่นของดอดจ์สันในบางกรณีได้

เอกสารอ้างอิง

[1] สุทัศน์ ยกส้าน (4 ธันวาคม 2549). Lewis Carroll นักประพันธ์และนักคณิตศาสตร์ (ผู้ชอบเด็ก). *หนังสือพิมพ์ผู้จัดการรายวัน,* น. **.

Yoksan, S. (2006, December 4). Lewis Carroll: The Novelist and Mathematician (Lolita Lover). *Manager Daily Newspaper*, p. **.

[2] Abeles, F. F. (2008). Dodgson Condensation: The Historical and Mathematical Development of an Experimental Method. *Linear Algebra and its Applications,* 429, p. 429 - 438.

[3] Dodgson, C. L. (1866). Condensation of Determinants, Being a New and Brief Method for Computing their Arithmetical Values. *Proceedings of the Royal Society of London*, 15, p. 150 - 155.

[4] Leggett, D., Perry, J. and Torrence, E. (2011). Computing Determinants by Double-Crossing. *The College Mathematics Journal*, 42, p. 43 - 54.

[5] Rise, A. and Torrence, E. (2007). “Shutting up like a telescope”: Lewis Carroll's “Curious” Condensation Method for Evaluating Determinants. *The College Mathematics Journal*. 38, p. 85 - 95.