

## บทที่ 2

### วิธีการดำเนินการวิจัย

#### 2.1 วิธีการดำเนินการวิจัย

เริ่มต้นสร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์สำหรับปัญหาที่นำมาวิจัย ได้แบบจำลองซึ่งเขียนได้เป็นสมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำ แล้วกำหนดเงื่อนไขขอบเขต และเงื่อนไขเริ่มต้นให้สอดคล้องกับปัญหา หาผลเฉลยโดยวิธีขึ้นประกอบอันตะ (Finite Element) ได้ผลเฉลยคือค่าความดันน้ำส่วนเกิน นำค่าความดันน้ำส่วนเกินที่ได้มาคำนวณหาค่าเปอร์เซ็นต์การอัดตัวระบายน้ำเฉลี่ย

ตรวจสอบค่าเปอร์เซ็นต์การอัดตัวระบายน้ำเฉลี่ยที่ได้ในกรณีระยะห่างระหว่างแถบทางระบายน้ำสำเร็จรูปห่างกันเท่ากับ 0.10 เมตร ในกรณีนี้การอัดตัวระบายน้ำที่เกิดขึ้นจะกลายเป็นการอัดตัวระบายน้ำมิติเดียว ซึ่งหาผลเฉลยได้สำหรับดินเอกพันธ์ที่ไม่มีผิวเสียดสี (อัตราส่วนสัมประสิทธิ์การซึมได้ของดินในบริเวณผิวเสียดสีต่อสัมประสิทธิ์การซึมได้ของดินคงสภาพ

$k_s/k_0=1$ ) คือผลเฉลยของ Terzaghi (1943)

ตรวจสอบค่าเปอร์เซ็นต์การอัดตัวระบายน้ำเฉลี่ยอีกครั้งหนึ่งกับผลเฉลยของ อูคร สารแก่น (2550) สำหรับดินเอกพันธ์ที่ไม่มีผิวเสียดสี และอัตราส่วนระยะห่างระหว่างแถบทางระบายน้ำสำเร็จรูปต่อความกว้างของแถบเท่ากับ 10

#### 2.2 สร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์สำหรับปัญหาที่นำมาวิจัย

การสร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์สำหรับปัญหาที่นำมาวิจัย เป็นการเปลี่ยนปัญหาทางกายภาพมาเป็นปัญหาคณิตศาสตร์ เริ่มต้นจากการตั้งสมมุติฐานและอาศัยกฎเกณฑ์ทางกลศาสตร์ในงานวิจัยนี้คือกฎการไม่สูญหายของมวล ซึ่งได้แสดงเป็นสมการการต่อเนื่อง และกฎการตอบสนองต่อการรับแรงของก้อนดิน ซึ่งแสดงได้เป็นสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด มารวมกันเป็นทฤษฎีการอัดตัวระบายน้ำ ทฤษฎีการอัดตัวระบายน้ำสำหรับงานวิจัยนี้เป็นทฤษฎีการอัดตัวระบายน้ำ 2 มิติของ Terzaghi (1943) ซึ่งแสดงได้เป็นสมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำ ดังมีรายละเอียดต่อไปนี้

##### 2.2.1 สมมุติฐาน ในงานวิจัยนี้ได้ตั้งสมมุติฐานไว้ดังนี้

- (1) ดินอ้อมตัวเอกพันธ์ คุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง ไร้น้ำหนัก อูณหภูมิคงตัว และอยู่ในสถานะสมดุลขณะเกิดการอัดตัวระบายน้ำ
- (2) เนื้อดินและน้ำที่อยู่ในช่องว่างเป็นวัสดุอัดตัวไม่ได้

(3) น้ำในดินไหลซึมตามแนวราบ และการไหลซึมเป็นไปตามกฎของ *Darcy*  
 (4) สัมประสิทธิ์การซึมได้ตามแนวราบของดินคงตัวตลอดเวลาที่เกิดการอัดตัว  
 ระบายน้ำ

(5) การอัดตัวได้ของดินเกิดขึ้นตามแนวตั้งเพียงแนวเดียว และการวิรูปเกิดขึ้น  
 น้อย

(6) สัมประสิทธิ์การเปลี่ยนแปลงปริมาตรตามแนวตั้งของดินคงตัวตลอดเวลาที่  
 เกิดการอัดตัวระบายน้ำ

(7) สัมประสิทธิ์การซึมได้ตามแนวราบของดินในบริเวณผิวเสียดสีลดลง จาก  
 ดินคงสภาพ และมีค่าคงตัวตลอดเวลาที่เกิดการอัดตัวระบายน้ำ แต่สัมประสิทธิ์การเปลี่ยนแปลง  
 ปริมาตรตามแนวตั้งของดินคงตัวเท่ากันหมดตลอดเวลาที่เกิดการอัดตัวระบายน้ำ ไม่ว่าจะเป็ดิน  
 คงสภาพหรือดินบริเวณที่เกิดผิวเสียดสี

(8) บริเวณผิวเสียดสีเป็นแท่งทรงกระบอกมีหน้าตัดสม่ำเสมอเป็นรูป  
 สี่เหลี่ยมผืนผ้า ขนาด กว้าง ( $pd$ ) ยาว ( $a+(p-1)d$ ) ล้อมแถบทางระบายน้ำสำเร็จรูป โดยที่  $a$  และ  $d$   
 เป็นขนาดของแบบที่ใช้ติดตั้งแถบทางระบายน้ำสำเร็จรูป และ  $p$  มีค่าเท่ากับ 2 ถึง 3 ตาม *Basu and*  
*Prezzi* (2007)

(9) ละทิ้งความหนาของแถบทางระบายน้ำสำเร็จรูป และแถบทางระบายน้ำ  
 สำเร็จรูปมีสัมประสิทธิ์การซึมได้สูงมาก

(10) น้ำหนักบรรทุกกดทับบนผิวดินแผ่กระจายสม่ำเสมอตลอดเวลาที่เกิดการอัด  
 ตัวระบายน้ำ ความเครียดเฉือนที่เกิดขึ้นในดินเนื่องจากการทรุดตัวต่างระดับ ไม่มีผลต่อการอัดตัว  
 ระบายน้ำ (ความเครียดอิสระ (*Free Strain*))

(11) บริเวณที่ปรับปรุงเสถียรภาพของชั้นดินกว้างใหญ่มาก แถบทางระบายน้ำ  
 สำเร็จรูปที่ติดตั้ง และผิวเสียดสีที่เกิดขึ้น ไม่มีผลต่อการกระจายความเค้นที่เกิดขึ้นในดินอัน  
 เนื่องมาจากน้ำหนักกดทับ

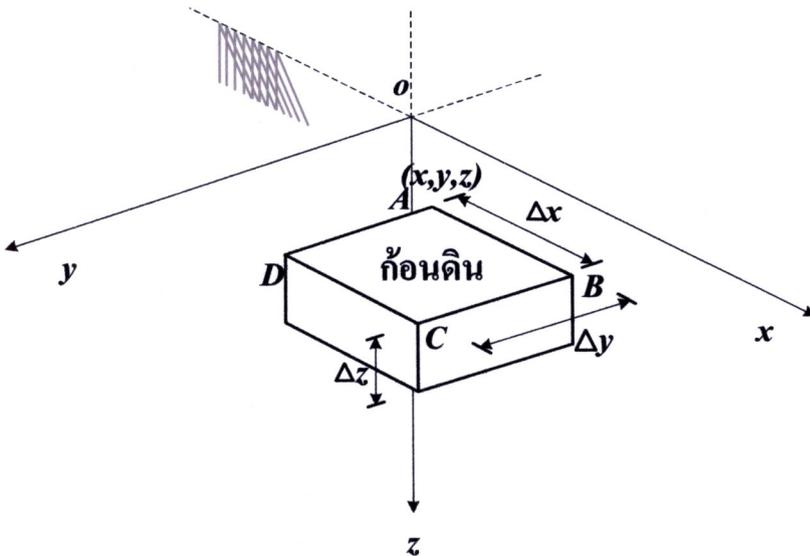
สมมุติฐานข้อที่ 1 ถึง 6 เหมือนกับสมมุติฐานที่ใช้ในทฤษฎีการอัดตัวระบายน้ำของ  
*Terzaghi* (1943)

## 2.2.2 สมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำ

ในขณะที่เกิดการอัดตัวระบายน้ำ การเปลี่ยนแปลงความดันน้ำส่วนเกินที่จุดต่างๆในบริเวณ  
 ที่เกิดการอัดตัวระบายน้ำ สอดคล้องกับกฎการไม่สูญหายของมวล และกฎการตอบสนองต่อการรับ  
 แรงของก้อนดิน

เนื่องจากปัญหาที่นำมาวิจัย ความหนาของชั้นดินมากกว่าระยะห่างแถบทางระบายน้ำ สำเร็จรูปมาก เส้นทางที่น้ำระบายออกสู่ผิวดินตามแนวคั้งโดยทั่วไปยาวกว่าเส้นทางที่น้ำระบายเข้าสู่แถบทางระบายน้ำสำเร็จรูปมาก และตามธรรมชาติของดิน สัมประสิทธิ์การซึมได้ของดินตามแนวคั้งต่ำกว่าสัมประสิทธิ์การซึมได้ของดินตามแนวราบ ดังนั้นการไหลของน้ำจึงใกล้เคียงการไหลตามแนวนอน

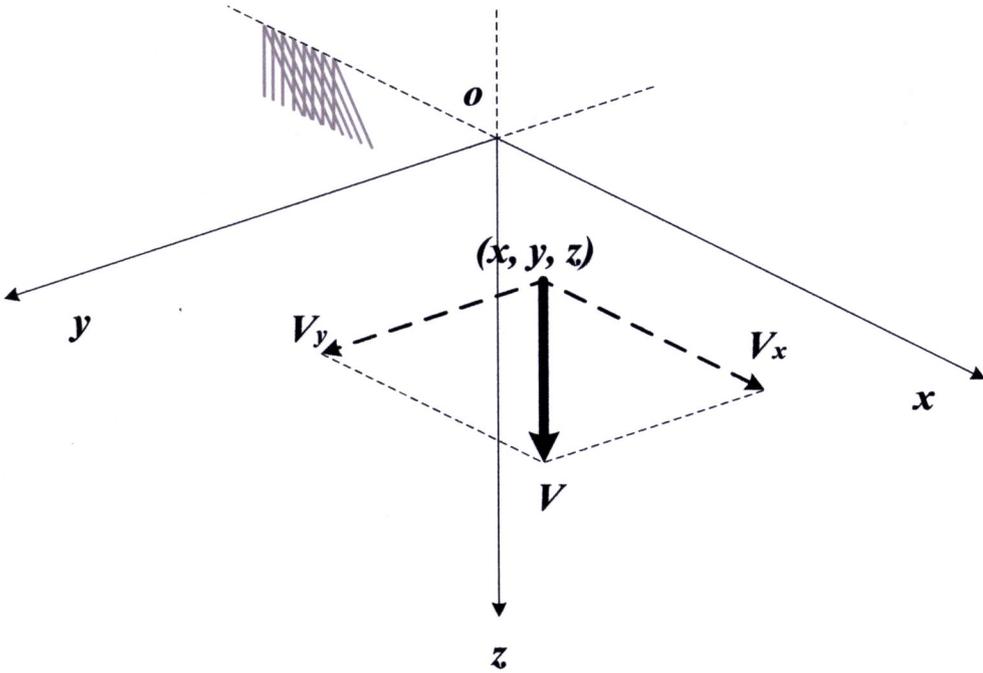
พิจารณาก่อนดินอ้อมตัวทรงลูกบาศก์ขนาด กว้าง  $x$  ยาว  $y$  หนา  $\Delta z$  หน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า  $ABCD$  ขณะเวลา  $t$  ดังแสดงในรูป 2.1 ให้พิกัด  $(x, y, z)$  เป็นพิกัดของจุด  $A$  ซึ่งอยู่ในบริเวณที่เกิดการอัดตัวระบายน้ำขณะเวลา  $t$



รูป 2.1 ก่อนดินรูปทรงลูกบาศก์

ในขณะใด ๆ น้ำส่วนหนึ่งจะไหลซึมเข้าสู่ก่อนดิน และน้ำอีกส่วนหนึ่งไหลซึมออกจากก่อนดิน ให้  $V$  เป็นความเร็วเต็มพื้นผิว (Superficial velocity) ของน้ำในดินที่จุด  $(x, y, z)$  ขณะเวลา  $t$  มีทิศทางตามแนวราบ ดังรูป 2.2 เพื่อให้คำนวณง่ายขึ้น จึงแยกความเร็วเต็มพื้นผิว  $V$  ออกเป็นความเร็วองค์ประกอบทิศทางตามแกน  $x$  บวก และ  $y$  บวก คือ  $V_x$  และ  $V_y$  ตามลำดับ ดังนั้น  $V_x$  และ  $V_y$  เป็นฟังก์ชันของ  $x, y, z$  และ  $t$

ให้  $V_{xA}$  และ  $V_{xB}$  เป็นองค์ประกอบความเร็วเต็มพื้นผิวทิศทางตามแกน  $x$  บวก ที่จุด  $A$  และ  $B$  ตามลำดับ ในทำนองเดียวกันให้  $V_{yA}$  และ  $V_{yD}$  เป็นองค์ประกอบความเร็วเต็มพื้นผิวทิศทางตามแกน  $y$  บวก ที่จุด  $A$  และ  $D$  ตามลำดับ



รูป 2.2 องค์ประกอบความเร็วเต็มพื้นที่ทิศทางตามแกน x บวก และ y บวก

ดังนั้น

$$V_{xA} = V_x(x, y, z, t)$$

$$V_{xB} = V_x(x + \Delta x, y, z, t)$$

$$V_{yA} = V_y(x, y, z, t)$$

$$V_{yD} = V_y(x, y + \Delta y, z, t)$$

ที่เวลา  $t$

$$\text{น้ำไหลเข้าสู่ก้อนดิน} \approx \Delta x \Delta z V_{yA} + \Delta y \Delta z V_{xA} \dots\dots\dots (2.1)$$

$$\text{น้ำไหลซึมออกจากก้อนดิน} \approx \Delta x \Delta z V_{yD} + \Delta y \Delta z V_{xB} \dots\dots\dots (2.2)$$

จากสมมุติฐานข้อ 1 และข้อ 2 เมื่อมวลดินคงตัวปริมาตรของก้อนดินก็คงตัวด้วย ให้  $R$  เป็น อัตราปริมาตรน้ำที่สะสมในก้อนดินขณะเวลา  $t$  ดังนั้นจากกฎการไม่สูญหายของมวล

$$R \approx (\Delta x \Delta z V_{yA} - \Delta x \Delta z V_{yD}) + (\Delta y \Delta z V_{xA} + \Delta y \Delta z V_{xB})$$

แทนค่า  $V_{xA}, V_{yA}, V_{xB}$  และ  $V_{yD}$  ได้

$$R \approx [V_x(x, y, z, t) - V_x(x + \Delta x, y, z, t)] \Delta y \Delta z + [V_y(x, y, z, t) - V_y(x, y + \Delta y, z, t)] \Delta x \Delta z \dots\dots\dots (2.3)$$

ให้  $e$  เป็นอัตราส่วนช่องว่างที่จุด  $(x, y, z)$  ขณะเวลา  $t$

$V_s$  เป็นปริมาตรเนื้อดิน ขณะเวลา  $t$

$V_v$  เป็นช่องว่างของก้อนดิน ขณะเวลา  $t$

ดังนั้น  $e$  เป็นฟังก์ชันของ  $x, y, z$  และ  $t$   $V_v$  เป็นฟังก์ชันของ  $t$  จากความสัมพันธ์ระหว่างสถานะ (Phase relationship) ได้

$$V_s \approx \left( \frac{1}{1+e} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \dots\dots\dots (2.4)$$

และ  $V_v(t) \approx e(x, y, z, t) V_s$

จากสมมติฐานข้อที่ 5 การวิรูปน้อย  $V_s$  เปลี่ยนไปน้อย ดังนั้น

$$V_v(t + \Delta t) \approx e(x, y, z, t + \Delta t) V_s$$

จากสมมติฐานข้อที่ 1 ดินอิมตัว ปริมาตรช่องว่างเท่ากับปริมาตรน้ำในก้อนดิน ดังนั้นอัตราปริมาตรน้ำที่สะสม

$$R \approx \frac{[V_v(t + \Delta t) - V_v(t)]}{\Delta t}$$

แทนค่า  $V_v(t + \Delta t)$  และ  $V_v(t)$  ได้

$$R \approx \frac{[e(x, y, z, t + \Delta t) - e(x, y, z, t)] V_s}{\Delta t} \dots\dots\dots (2.5)$$

แทนค่า  $R$  จากสมการ (2.3) และ  $V_s$  จากสมการ (2.4) ลงในสมการ (2.5) แล้วเอา

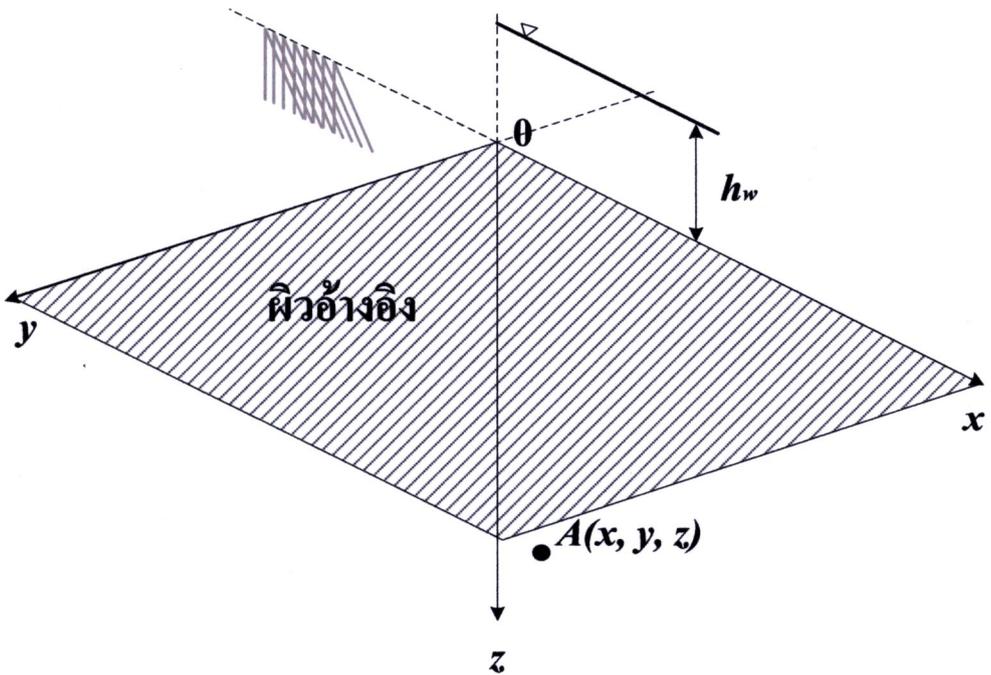
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$  หารตลอด

$$\begin{aligned} & \frac{[V_x(x, y, z, t) - V_x(x + \Delta x, y, z, t)]}{\Delta x} + \frac{[V_y(x, y, z, t) - V_y(x, y + \Delta y, z, t)]}{\Delta y} \\ & \approx \frac{1}{1+e} \frac{[e(x, y, z, t + \Delta t) - e(x, y, z, t)]}{\Delta t} \dots\dots\dots (2.6) \end{aligned}$$

คิดลิมิต  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$  และ  $\Delta t \rightarrow 0$  ได้สมการต่อเนื่อง

$$-\frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y} = \left( \frac{1}{1+e} \right) \frac{\partial e}{\partial t} \dots\dots\dots (2.7)$$

เปลี่ยน  $V_x$  และ  $V_y$  ออกโดยใช้กฎของ Darcy กำหนดผิวอ้างอิง (Datum) ดังรูปที่ 2.3



รูป 2.3 ผิวอ้างอิง

ให้  $k_x$  และ  $k_y$  เป็นสัมประสิทธิ์การซึมได้ตามแนวแกน  $x$  และ  $y$  ตามลำดับ จากสมมุติฐานข้อ 1 และข้อ 4 ได้

$$k_x = k_y = k_h$$

โดยที่  $k_h$  เป็นสัมประสิทธิ์การซึมได้ตามแนวราบ และ  $k_h$  มีค่าคงตัว จากสมมุติฐานข้อ 3 น้ำในดินไหลซึมตามกฎของ Darcy

$$V_x = k_x i_x = k_h i_x \tag{2.8}$$

$$V_y = k_y i_y = k_h i_y \tag{2.9}$$

โดยที่  $i_x$  เป็น  $i_y$  เป็นความลาดเชิงชลศาสตร์ (Hydraulic gradient) ตามแนวแกน  $x$  และ  $y$  ตามลำดับ

จากคำจำกัดความ

$$i_x = -\frac{\partial h}{\partial x} \tag{2.10}$$

$$i_y = -\frac{\partial h}{\partial y} \tag{2.11}$$

โดยที่  $h$  เป็นหัวรวม (Total Head) ที่จุด  $(x, y, z)$  ในขณะเวลา  $t$  และ  $h$  เป็นฟังก์ชันของ  $x, y, z$  และ  $t$  จากรูป 2.3

$$h(x, y, z, t) = -z + \frac{1}{\gamma_w}(u + u_s) \quad \text{..... (2.12)}$$

โดยที่  $u$  เป็นความดันน้ำส่วนเกินที่จุด  $(x, y, z)$  ขณะเวลา  $t$  และ  $u$  เป็นฟังก์ชันของ  $x, y, z$  และ  $t$

$u_s$  เป็นความดันน้ำในสถานะคงที่ (*Steady state*) ที่จุด  $(x, y, z)$  และ  $u_s$  เป็นฟังก์ชันของ  $z$

$\gamma_w$  เป็นหน่วยน้ำหนักของน้ำที่จุด  $(x, y, z)$  ขณะเวลา  $t$  และ  $\gamma_w$  มีค่าคงตัวตามสมมุติฐานข้อ 1 และข้อ 2

จากกลศาสตร์ของไหล

$$u_s(z) = (z + h_w)\gamma_w \quad \text{..... (2.13)}$$

โดยที่  $h_w$  เป็นระดับความสูงของน้ำใต้ดินจากผิวอ้างอิง และ  $h_w$  มีค่าคงตัวแทนค่า  $u_s$  จากสมการ (2.13) ลงในสมการ (2.12) ได้

$$h(x, y, z, t) = h_w + \frac{u(x, y, z, t)}{\gamma_w} \quad \text{..... (2.14)}$$

แทนค่า  $h$  จากสมการ (2.14) ลงในสมการ (2.10) ได้

$$i_x = -\frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{..... (2.15)}$$

แทนค่า  $i_x$  จากสมการ (2.15) ลงในสมการ (2.8) ได้

$$V_x = -\frac{k_h}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{..... (2.16)}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$V_y = -\frac{k_h}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{..... (2.17)}$$

แทนค่า  $V_x$  จากสมการ (2.16) และ  $V_y$  จากสมการ (2.17) ลงในสมการการต่อเนื่อง (2.7) ได้

$$\frac{k_h}{\gamma_w} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \left( \frac{1}{1+e} \right) \frac{\partial e}{\partial t} \quad \text{..... (2.18)}$$

เปลี่ยน  $e$  ออก จากกฎการตอบสนองต่อการรับแรงของก้อนดิน สำหรับการอัดตัวได้ของดินตามแนวตั้งเพียงแนวเดียวตามสมมุติฐานข้อ 5 และ  $e$  เป็นฟังก์ชันของความเค้นกดทับประสิทธิผลตามแนวตั้ง  $\sigma_z$  เขียนเป็นสมการได้

$$\frac{de}{d\sigma_z} = -a_v \quad \text{..... (2.19)}$$

โดยที่  $a_v$  เป็นสัมประสิทธิ์การอัดตัวได้ของโครงก้อนดิน จากสมมุติฐานข้อ 5 การวิรูปน้อยและข้อ 6 ซึ่ง  $a_v$  มีค่าคงตัว

เนื่องจากน้ำหนักคินน้อยเมื่อเทียบกับน้ำหนักบรรทุกทุกกตัทบบนผิวดิน ในทางปฏิบัติ โดยทั่วไปใกล้เคียงกับสมมุติฐานข้อ 1 อาศัยสมมุติฐานข้อ 1 ข้อ 10 และข้อ 11 ได้

$$\sigma_z = q_s \quad \dots\dots\dots (2.20)$$

โดยที่  $q_s$  เป็นน้ำหนักบรรทุกทุกกตัทบบัแพร่กระจายบนผิวดิน มีค่าคงตัวตามสมมุติฐานข้อ 1  $\sigma_z$  เป็นความเค้นกตัทบบัทั้งหมดตามแนวคั้งที่จุด  $(x, y, z)$  ขณะเวลา  $t$

ความเค้นกตัทบบัประสิทธิผลตามแนวคั้งที่จุด  $(x, y, z)$  ขณะเวลา  $t$  ตามคำจำกัดความมีค่าเท่ากับ

$$\bar{\sigma}_z(x, y, z, t) = \sigma_z - u(x, y, z, t) - u_s(z) \quad \dots\dots\dots (2.21)$$

แทนค่า  $\sigma_z$  จากสมการ (2.20) ลงในสมการ (2.21) ได้

$$\bar{\sigma}_z(x, y, z, t) = q_s - u(x, y, z, t) - u_s(z) \quad \dots\dots\dots (2.22)$$

อัตราส่วนช่องว่าง  $e$  เป็นฟังก์ชันของความเค้นกตัทบบัประสิทธิผลตามแนวคั้ง  $\bar{\sigma}_z$  และความเค้นกตัทบบัประสิทธิผลตามแนวคั้ง  $\bar{\sigma}_z$  เป็นฟังก์ชันของ  $(x, y, z)$  และ  $t$  จากกฎลูกโซ่อนุพันธ์ย่อยของ  $e$  ในส่วนตัวแปร  $t$  เท่ากับ

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{de}{d\bar{\sigma}_z} \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (2.23)$$

แทนค่า  $\frac{de}{d\bar{\sigma}_z}$  จากสมการ (2.19) และ  $\bar{\sigma}_z$  จากสมการ (2.22) ลงในสมการ (2.23) ได้

$$\frac{\partial e}{\partial t} = a_v \frac{\partial u}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (2.24)$$

แทนค่า  $\frac{\partial e}{\partial t}$  จากสมการ (2.24) ลงในสมการ (2.18) ได้สมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k_h}{\gamma_w m_v} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \dots\dots\dots (2.25)$$

โดยที่  $m_v$  เป็นสัมประสิทธิ์การเปลี่ยนแปลงปริมาตรตามแนวคั้ง  $= \frac{a_v}{1+e}$  มีค่าคงตัวตามสมมุติฐานข้อ 6 ดังนั้นสมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำสำหรับปัญหาที่นำมาวิจัย เขียนได้คั้งนี้

ในดินคงสภาพ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k_o}{\gamma_w m_{vo}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \dots\dots\dots (2.26)$$

ในผิวเสียดสี ตามมุติฐานข้อ 7  $m_{vs} = m_{vo}$

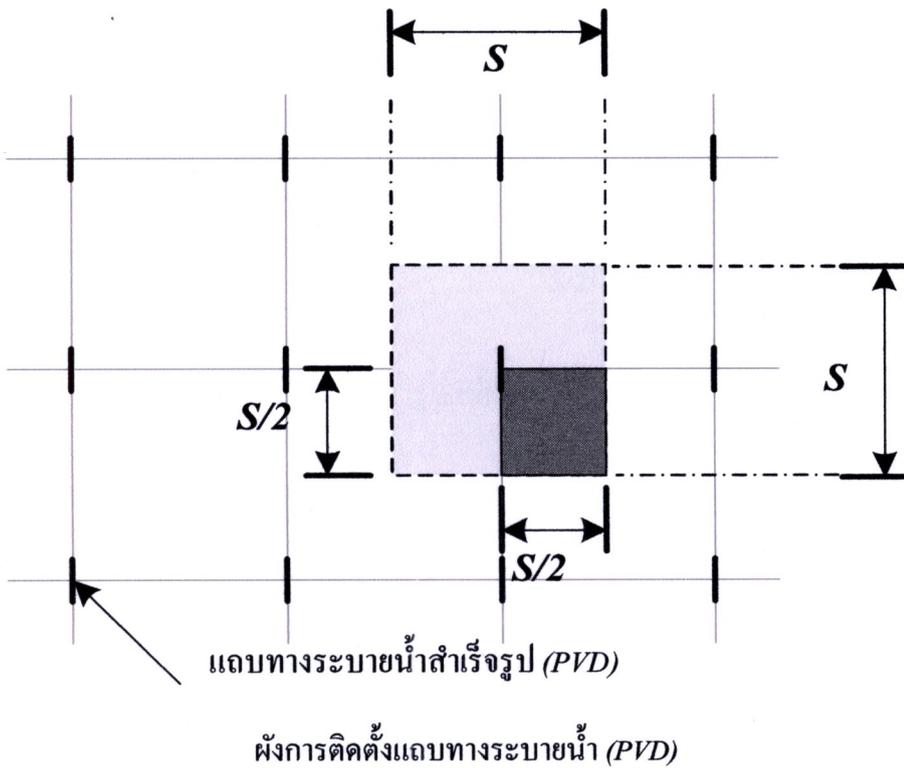
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k_s}{\gamma_w m_{vo}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \dots\dots\dots (2.27)$$

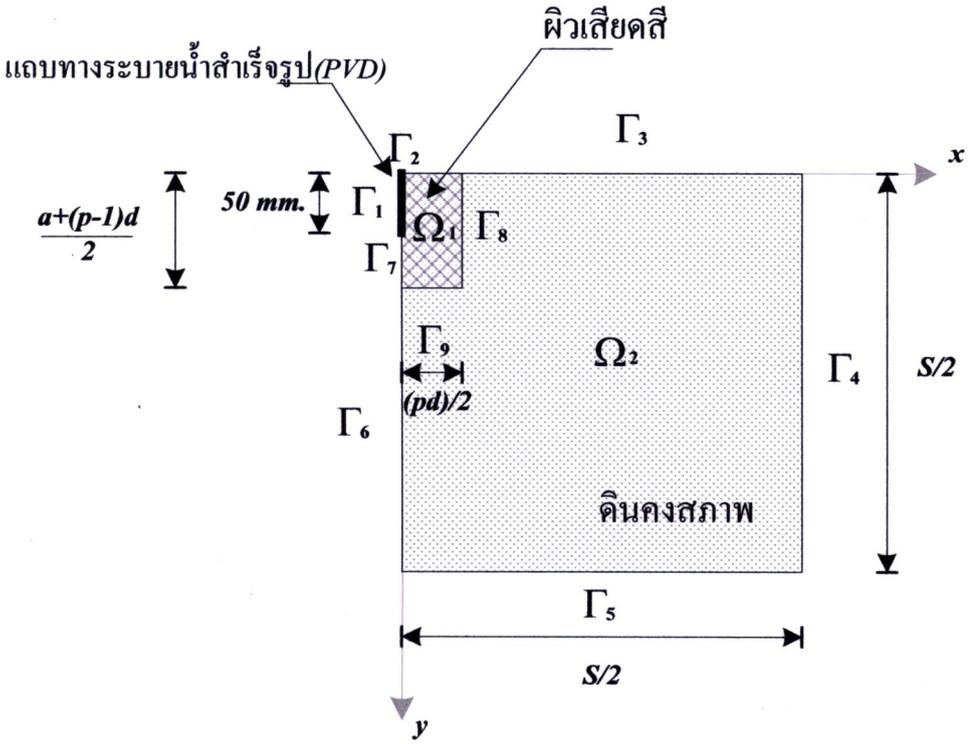
โดยที่  $k_o$  และ  $k_s$  เป็นสัมประสิทธิ์การซึมได้ตามแนวราบของดินคงสภาพ และบริเวณผิวเสียดสีตามลำดับ  $m_{vo}$  และ  $m_{vs}$  เป็นสัมประสิทธิ์การเปลี่ยนแปลงปริมาตรตามแนวคั้งของดินคงสภาพ และผิวเสียดสีตามลำดับ  $k_o, k_s, m_{vo}$  และ  $m_{vs}$  มีค่าคงตัวตามสมมุติฐานข้อ 7

### 2.3 การหาผลเฉลย

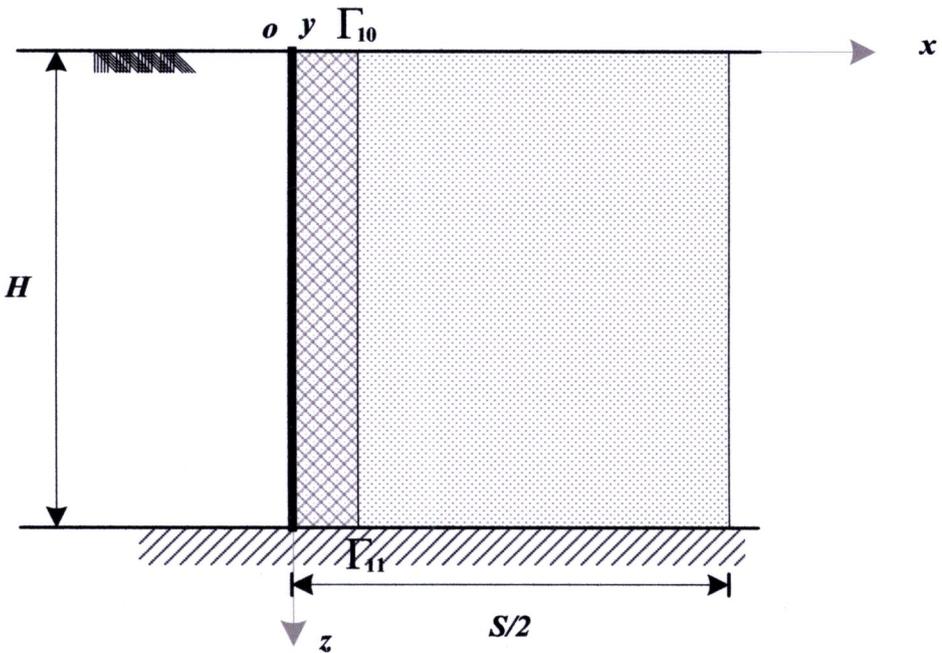
จากสมมุติฐานข้อ 11 และโดยสมมาตร การอัดตัวระบายนํ้าเข้าสู่แถบทางระบายนํ้าสำเร็จรูปแต่ละแถบเหมือนกัน ดังนั้นบริเวณที่ไหลซึมเข้าสู่แถบทางระบายนํ้าสำเร็จรูปเป็นรูปทรงบอกรหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัส ขนาดด้านเท่ากับระยะห่างของแถบ ดังรูป 1.11

ตั้งระบบพิกัดฉากคาร์ทีเซียน  $x, y, z$  ไว้ที่กลางแถบทางระบายนํ้า ดินที่เกิดการอัดตัวระบายนํ้าเข้าสู่แถบทางระบายนํ้าถูกแบ่งออกเป็น 4 ส่วนเท่าๆกันโดยสมมาตรอีกครั้ง การอัดตัวระบายนํ้าของดินแต่ละส่วนเหมือนกัน จึงหาผลเฉลยการอัดตัวระบายนํ้าของดินเพียงส่วนเดียว ดังรูป 2.4





รูปแปลน



รูปด้านตั้ง

รูป 2.4 ส่วนหนึ่งของดินที่อัดตัวระบายน้ำเข้าสู่แถบทางระบายน้ำ

### 2.3.1 เงื่อนไขขอบเขต

จากรูป 2.5 แบ่งบริเวณการอัดตัวระบายน้ำได้เป็น 2 บริเวณคือ บริเวณดินแปรสภาพ (ผิวเสียดสี Smear zone)  $\Omega_1$  และบริเวณดินคงสภาพ  $\Omega_2$  ผิวบริเวณที่เกิดการอัดตัวระบายน้ำแบ่งได้เป็นผิวภายนอก และผิวภายใน ผิวภายนอกประกอบด้วยผิวแถบทางระบายน้ำ  $\Gamma_1$  ผิวเสียดสี  $\Gamma_2$  และ  $\Gamma_7$  ผิวดินคงสภาพ  $\Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$  และ  $\Gamma_6$  ผิวบน  $\Gamma_{10}$  และผิวล่าง  $\Gamma_{11}$  จากสมมุติฐานข้อ 9 ละทิ้งความหนาของแถบทางระบายน้ำ ผิวภายในประกอบด้วยผิวรอยต่อระหว่างดินคงสภาพและผิวเสียดสีคือ  $\Gamma_8$  และ  $\Gamma_9$

#### เงื่อนไขขอบเขต

ผิว  $\Gamma_1$  จากสมมุติฐานข้อ 9 สัมประสิทธิ์การซึมได้ของแถบทางระบายน้ำมีค่าสูงมาก ความดันน้ำส่วนเกินเท่า 0

$$u(o, y, z, t) = 0 \quad 0 \leq y \leq 50 \text{ มม.}, 0 \leq z \leq H \text{ มม.}, 0 < t \dots\dots\dots (2.28)$$

ผิว  $\Gamma_2$  โดยสมมาตรน้ำซึมผ่านไม่ได้ ความลาดเชิงชลศาสตร์ตามแนวแกน  $y$  เท่ากับ 0

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, o, z, t) = 0 \quad 0 < x \leq \frac{pd}{2} \text{ มม.}, 0 \leq z \leq H \text{ มม.}, 0 < t \dots\dots\dots (2.29)$$

ผิว  $\Gamma_3$  โดยสมมาตร น้ำซึมผ่านไม่ได้ ความลาดเชิงชลศาสตร์ตามแนวแกน  $y$  เท่ากับ 0

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, o, z, t) = 0 \quad \frac{pd}{2} < x \leq \frac{S}{2} \text{ มม.}, 0 \leq z \leq H \text{ มม.}, \\ 0 < t \dots\dots\dots (2.30)$$

ผิว  $\Gamma_4$  โดยสมมาตร น้ำซึมผ่านไม่ได้ ความลาดเชิงชลศาสตร์ตามแนวแกน  $x$  เท่ากับ 0

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{pd}{2}, y, z, t\right) = 0 \quad 0 \leq y \leq \frac{S}{2} \text{ มม.}, 0 \leq z \leq H \text{ มม.}, \\ 0 < t \dots\dots\dots (2.31)$$

ผิว  $\Gamma_5$  โดยสมมาตรน้ำซึมผ่านไม่ได้ ความลาดเชิงชลศาสตร์ตามแนวแกน  $y$  เท่ากับ 0

$$\frac{\partial u}{\partial y}\left(x, \frac{S}{2}, z, t\right) = 0 \quad 0 \leq x \leq \frac{S}{2} \text{ มม.}, 0 \leq z \leq H \text{ มม.}, \\ 0 < t \dots\dots\dots (2.32)$$

ผิว  $\Gamma_6$  โดยสมมาตรน้ำซึมผ่านไม่ได้ ความลาดเชิงชลศาสตร์ตามแนวแกน  $x$  เท่ากับ 0

$$\frac{\partial u}{\partial x}(o, x, z, t) = 0 \quad \frac{1}{2}[a + (p-1)d] \leq y \leq \frac{S}{2} \text{ มม.}, \\ 0 \leq z \leq H, 0 < t \dots\dots\dots (2.33)$$

ผิว  $\Gamma_7$  โดยสมมาตรน้ำซึมผ่านไม่ได้ ความลาดเชิงขลศาสตร์ตามแนวแกน  $x$  เท่ากับ 0

$$\frac{\partial u}{\partial x}(o, x, z, t) = 0 \quad 50 \leq y \leq \frac{1}{2}[a + (p-1)d] \text{ มม.},$$

$$0 \leq z \leq H \text{ มม.}, \quad 0 < t \quad \dots\dots\dots (2.34)$$

ผิว  $\Gamma_8$  อัตราการไหลซึมของน้ำออกจากบริเวณ  $\Omega_2$  เข้าสู่บริเวณ  $\Omega_1$  เท่ากัน ตามกฎการ  
 มาสซุหยหายของมวล

$$k_o \lim_{x \rightarrow \frac{pd}{2}^+} \frac{\partial u}{\partial x} = k_s \lim_{x \rightarrow \frac{pd}{2}^-} \frac{\partial u}{\partial x} \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2}[a + (p-1)d] \text{ มม.},$$

$$0 \leq z \leq H \text{ มม.}, \quad 0 < t \quad \dots\dots\dots (2.35)$$

ผิว  $\Gamma_9$  อัตราการไหลซึมของน้ำออกจากบริเวณ  $\Omega_2$  เข้าสู่บริเวณ  $\Omega_1$  เท่ากัน ตามกฎการ  
 มาสซุหยหายของมวล

$$k_o \lim_{y \rightarrow \frac{1}{2}[a+(p-1)d]^+} \frac{\partial u}{\partial x} = k_s \lim_{y \rightarrow \frac{1}{2}[a+(p-1)d]^-} \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$0 \leq x \leq \frac{pd}{2} \text{ มม.}, \quad 0 \leq y \leq H, \quad 0 < t \quad \dots\dots\dots (2.36)$$

ผิว  $\Gamma_{10}$  อัตราการไหลซึมออกของน้ำจากผิวบนชั้นดินเท่ากับ 0 เนื่องจากน้ำไหลซึมตาม  
 แนวราบ ตามสมมุติฐานข้อ 3

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x, y, o, t) = 0 \quad 0 \leq x \leq \frac{S}{2} \text{ มม.}, \quad 0 \leq y \leq \frac{S}{2} \text{ มม.},$$

$$0 < t \quad \dots\dots\dots (2.37)$$

ผิว  $\Gamma_{11}$  อัตราการไหลซึมออกของน้ำจากผิวบนชั้นดินเท่ากับ 0 เนื่องจากน้ำไหลซึมตาม  
 แนวราบ ตามสมมุติฐานข้อ 3

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x, y, H, t) = 0 \quad 0 \leq x \leq \frac{S}{2} \text{ มม.}, \quad 0 \leq y \leq \frac{S}{2} \text{ มม.},$$

$$0 < t \quad \dots\dots\dots (2.38)$$

**2.3.2 เงื่อนไขเริ่มต้น**

เนื่องจากน้ำหนักบรรทุกกดทับบนผิวดิน ( $q_s$ ) แผ่กระจายสม่ำเสมอเพิ่มขึ้นอย่างฉับพลัน  
 ทันที จากสมมุติฐานข้อ 1 ข้อ 2 ข้อ 5 และข้อ 11 ตัวแปรเสริมความดันน้ำส่วนเกิน (Pore pressure  
 parameter)  $C$  เท่ากับ 1 ตาม Lambe, T.W. and Whitman, R.V (1979) ดังนั้น

$$u(x, y, z, o) = q_s, \quad 0 \leq x \leq \frac{S}{2} \text{ มม.}, \quad 0 \leq y \leq \frac{S}{2} \text{ มม.},$$

$$0 \leq z \leq H \text{ มม.} \quad \dots\dots\dots (2.39)$$

**2.3.3 การหาผลเฉลยความดันน้ำส่วนเกิน**

เพื่อให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาได้มากขึ้น จึงติดค่าต่างๆอยู่ในรูปตัวแปรคือ ระยะห่าง  
 ระหว่างแถบทางระบายน้ำสำเร็จรูป  $S$  น้ำหนักบรรทุกกดทับบนผิวดิน  $q_s$  เวลาตั้งแต่เริ่มบรรทุก

น้ำหนักกดทับ  $t$  สัมประสิทธิ์การเปลี่ยนแปลงปริมาตรตามแนวตั้งของดินคงสภาพ  $m_v$  สัมประสิทธิ์การซึมได้ของตามแนวราบของดินคงสภาพ  $k_o$  และสัมประสิทธิ์การซึมได้ตามแนวราบของผิวเสียดสี  $k_s$

ในการหาผลเฉลยจึงต้องกำจัดตัวแปรเหล่านี้ทั้งหมด โดยเปลี่ยนตัวแปรใหม่ให้เป็นตัวแปรไว้มีดังนี้

ให้

$$U = \frac{u}{q_s}$$

$$K_h = \frac{k_s}{k_o}$$

$$T = \frac{k_o t}{\gamma_w m_{v_o} d_{ceq}^2}$$



โดยที่  $d_{ceq}$  เป็นเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลมที่มีพื้นที่เท่ากับบริเวณที่น้ำไหลซึมเข้าสู่แถบทางระบายน้ำสำเร็จรูปแต่ละแถบ

$$d_{ceq} = \frac{2S}{\sqrt{\pi}}$$

จากสมมุติฐานข้อ 3 น้ำไหลซึมตามแนวราบ ดังนั้นทุกจุด  $(x, y, z)$  ภายในบริเวณที่เกิดการอัดตัวระบายน้ำ  $\Omega_1$  และ  $\Omega_2$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad 0 < t \quad \dots\dots\dots (2.40)$$

จากสมการ (2.37) สมการ (2.38) สมการ (2.39) และสมการ (2.40) บ่งชี้ว่า  $u$  ไม่ขึ้นกับ  $z$  นั่นคือ

$$u(x, y, z, t) = u(x, y, t) \quad 0 \leq x \leq \frac{S}{2} \text{ มม.}, \quad 0 \leq y \leq \frac{S}{2} \text{ มม.}, \quad 0 \leq t \quad \dots\dots\dots (2.41)$$

อาศัยสมการ (2.41) และกฎลูกโซ่เขียนสมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำ เงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขเริ่มต้นในรูปตัวแปรใหม่  $U, T, K_h$  และ  $d_{ceq}$  ได้ดังนี้

**(1) สมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำ**

ในดินคงสภาพ

$$\frac{\partial U}{\partial T} = d_{ceq}^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad 0 < T \quad \dots\dots\dots (2.42)$$

ในผิวเสียดสี (*Smear zone*)

$$\frac{\partial U}{\partial T} = d_{ceq}^2 K_h \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad 0 < T \quad \dots\dots\dots (2.43)$$

**(2) เงื่อนไขขอบเขต**

$$U(o, y, T) = 0 \quad 0 \leq y \leq 50 \text{ มม.}, \quad 0 < T \quad \dots\dots\dots (2.44)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, o, T) = 0 \quad 0 < x \leq \frac{S}{2} \text{ มม.}, \quad 0 < T \quad \dots\dots\dots (2.45)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \left( \frac{pd}{2}, y, T \right) = 0 \quad 0 \leq y \leq \frac{S}{2} \text{ มม.}, 0 < T \dots\dots\dots (2.46)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} \left( x, \frac{S}{2}, T \right) = 0 \quad 0 \leq x \leq \frac{S}{2} \text{ มม.}, 0 < T \dots\dots\dots (2.47)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} (0, y, T) = 0 \quad 50 < y \leq \frac{S}{2} \text{ มม.}, 0 < T \dots\dots\dots (2.48)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{pd}{2}^+} \frac{\partial U}{\partial x} = K_h \lim_{x \rightarrow \frac{pd}{2}^-} \frac{\partial U}{\partial x} \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2} [a + (p-1)d] \text{ มม.},$$

$$0 < T \dots\dots\dots (2.49)$$

$$\lim_{y \rightarrow \frac{1}{2} [a + (p-1)d]^+} \frac{\partial u}{\partial y} = K_h \lim_{y \rightarrow \frac{1}{2} [a + (p-1)d]^-} \frac{\partial U}{\partial y} \quad 0 \leq x \leq \frac{pd}{2} \text{ มม.}, 0 < T \dots\dots\dots (2.50)$$

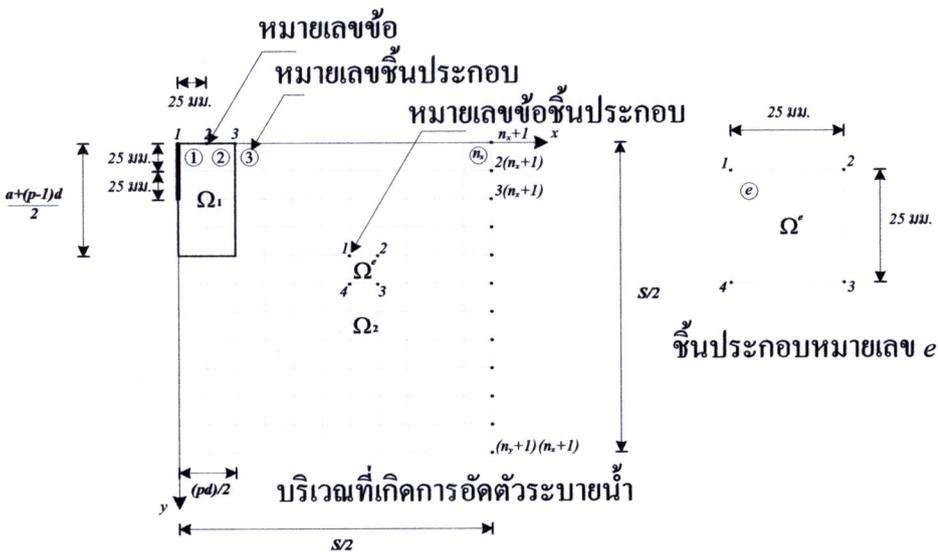
**(3) เงื่อนไขเริ่มต้น**

$$U(x, y, T) = 1 \quad 0 \leq x \leq \frac{S}{2} \text{ มม.}, 0 \leq y \leq \frac{S}{2},$$

$$0 < T \dots\dots\dots (2.51)$$

หาผลเฉลยโดยวิธีชิ้นประกอบอันตะ (*Finite element method*) สร้างสมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำ และเงื่อนไขขอบเขตสมการ (2.42) ถึงสมการ (2.50) แบบใช้งานง่าย (*Weak form*) โดยวิธีถ่วงน้ำหนักส่วนตกค้าง (*Weighted residue method*)

แบ่งบริเวณที่เกิดการอัดตัวระบายน้ำ (รูปที่ 2.5)  $\Omega_1$  และ  $\Omega_2$  ออกเป็นชิ้นประกอบสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 25 มม. x 25 มม. ต่อเนื่องกันเต็มบริเวณ  $\Omega_1$  และ  $\Omega_2$  และมีจำนวนชิ้นประกอบตามแกน  $x$  คือ  $n_x$  เท่ากับจำนวนชิ้นประกอบตามแกน  $y$  คือ  $n_y$  ดังรูป 2.5



**รูป 2.5** การลงหมายเลขรวมของชิ้นประกอบและข้อ

จัดสมการ (2.42) และสมการ (2.43) ใหม่ได้

$$d^2_{ceq} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + d^2_{ceq} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial U}{\partial T} = 0$$

$$0 < T \quad \text{ภายในบริเวณ } \Omega_2 \quad \dots\dots\dots (2.52)$$

$$d^2_{ceq} K_h \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + d^2_{ceq} K_h \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial U}{\partial T} = 0$$

$$0 < T \quad \text{ภายในบริเวณ } \Omega_1 \quad \dots\dots\dots (2.53)$$

จากบทตั้งมูลฐานของแคลคูลัสของการแปรผัน (*Fundamental lemma of the calculus of variations*) เขียนสมการ (2.52) และสมการ (2.53) ในรูปปริพันธ์ของค่าถ่วงน้ำหนักส่วนตค้างได้เป็น

$$\int_{\Omega_2} W \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( d^2_{ceq} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( d^2_{ceq} \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \frac{\partial U}{\partial T} \right\} dx dy = 0 \quad \dots\dots\dots (2.54)$$

$$\int_{\Omega_1} W \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( d^2_{ceq} K_h \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( d^2_{ceq} K_h \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \frac{\partial U}{\partial T} \right\} dx dy = 0 \quad \dots\dots\dots (2.55)$$

โดยที่  $W = W(x, y)$  เป็นฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักที่มีความต่อเนื่องใน  $\Omega_1$  และ  $\Omega_2$  ลดอันดับอนุพันธ์ลง จากสูตรอนุพันธ์ผลคูณ

$$W \frac{\partial}{\partial x} \left( d^2_{ceq} \frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( W d^2_{ceq} \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \left( d^2_{ceq} \frac{\partial U}{\partial x} \right) \frac{\partial W}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (2.55)$$

และ

$$\int_{\Omega^e} W \frac{\partial}{\partial x} \left( d^2_{ceq} \frac{\partial U}{\partial x} \right) dx dy = \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial x} \left( W d^2_{ceq} \frac{\partial U}{\partial x} \right) dx dy$$

$$- \int_{\Omega^e} \left( d^2_{ceq} \frac{\partial U}{\partial x} \right) \frac{\partial W}{\partial x} dx dy \quad \dots\dots\dots (2.56)$$

โดยที่  $\Omega^e$  เป็นบริเวณที่เกิดการอัดตัวระบายน้ำของชั้นประกอบหมายเลข  $e$  ซึ่งอยู่บนบริเวณ  $\Omega_2$  แต่จากทฤษฎีของกรีน (*Green's theorem*)

$$\int_{\Omega^e} \frac{\partial U}{\partial x} \left( W d^2_{ceq} \frac{\partial U}{\partial x} \right) dx dy = \oint_{\Gamma^e} m_x W d^2_{ceq} \frac{\partial U}{\partial x} d\Gamma^e \quad \dots\dots\dots (2.57)$$

โดยที่  $\Gamma^e$  เป็นเส้นรอบรูปของบริเวณชั้นประกอบหมายเลข  $e$

$d\Gamma^e$  เป็นความยาวชั้นประกอบของเส้นรอบรูป  $\Gamma^e$  มีค่าเป็นบวก

$m_x$  เป็นโคไซน์แสดงทิศทาง (*Direction cosine*) ตามแกน  $x$  ของเวกเตอร์หน่วยตามแนวตั้งฉาก (*Unit normal vector*) กับเส้นรอบรูป เวกเตอร์หน่วยนี้มีทิศพุ่งออกจากภายในชั้นประกอบหมายเลข  $e$

รวมสมการ (2.56) และ (2.57) เข้าด้วยกัน

$$\int_{\Omega^e} W \frac{\partial U}{\partial x} \left( d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial x} \right) dx dy = \int_{\Gamma^e} m_x W d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial x} d\Gamma^e - \int_{\Omega^e} \left( d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial x} \right) \frac{\partial W}{\partial x} dx dy \quad \dots\dots\dots (2.58)$$

โดยที่  $\Omega^e$  อยู่ในบริเวณ  $\Omega_2$

ในทำนองเดียวกัน

$$\int_{\Omega^e} W \frac{\partial U}{\partial y} \left( d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma^e} m_y W d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial y} d\Gamma^e - \int_{\Omega^e} \left( d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial y} \right) \frac{\partial W}{\partial y} dx dy \quad \dots\dots\dots (2.59)$$

โดยที่  $m_y$  เป็นโคไซน์แสดงทิศทาง (*Direction cosine*) ตามแกน  $y$  ของเวกเตอร์หน่วยตามแนวตั้งฉาก (*Unit normal vector*) กับเส้นรอบรูป เวกเตอร์หน่วยนี้มีทิศพุ่งออกจากภายในชั้นประกอบหมายเลข  $e$

สมการ (2.52) เป็นจริงภายในบริเวณ  $\Omega_2$  ดังนั้นสมการ (2.52) และสมการ (2.54) เป็นจริงภายในบริเวณ  $\Omega^e$  ซึ่งอยู่ภายในบริเวณ  $\Omega_2$  ด้วยคั้งนั้น

$$\int_{\Omega^e} W \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \frac{\partial U}{\partial T} \right\} dx dy = 0 \quad 0 < T \quad \dots\dots\dots (2.60)$$

แทนค่า  $\int_{\Omega^e} W \frac{\partial U}{\partial x} \left( d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial x} \right) dx dy$  จากสมการ (2.58)

และ  $\int_{\Omega^e} W \frac{\partial U}{\partial y} \left( d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx dy$  จากสมการ (2.59) ลงในสมการ (2.60) ได้สมการควบคุม

การอัดตัวระบายน้ำรูปแบบใช้งานง่าย สำหรับชั้นประกอบอิสระ แต่ละชั้นในบริเวณ  $\Omega_2$  ดังนี้

$$\int_{\Gamma^e} \left\{ m_x W d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial x} + m_y W d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial y} \right\} d\Gamma^e - \int_{\Omega^e} \left\{ d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} + d_{ceq}^2 \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial T} \right\} dx dy = 0 \quad \dots\dots\dots (2.61)$$

ประมาณค่าฟังก์ชัน  $U$  ทุกจุด  $(x,y)$  ตลอดบริเวณชั้นประกอบ  $\Omega^e$  ที่ตัวประกอบเวลา  $T$  ด้วยสมการ

$$U(x, y, T) = U^e(x, y, T) \approx \sum_{j=1}^4 U_j^e(T) \Psi_j^e(x, y) \quad 0 < T \quad \dots\dots\dots (2.62)$$

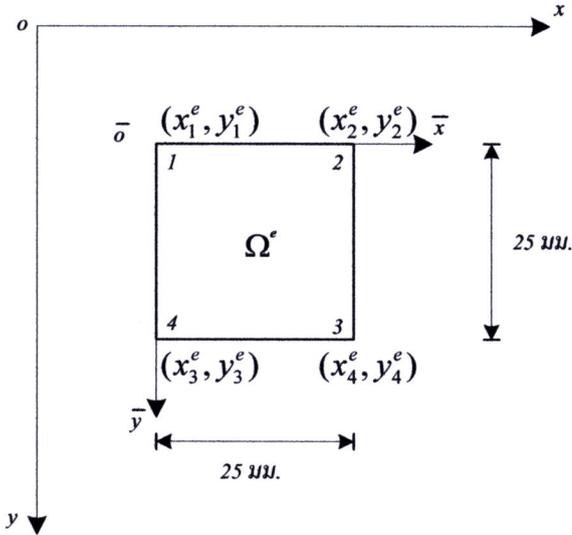
โดยที่  $U_j^e$  เป็นค่า  $U$  ที่ข้อ  $j$  ของชั้นประกอบ  $e$  ที่ตัวประกอบเวลา  $T$

$J$  เป็นเลขเต็มหน่วยมีค่าเท่ากับ 1, 2, 3 และ 4

$\Psi_j^e$  เป็นฟังก์ชันประมาณค่าในช่วง (*Interpolation function*) ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

$$\Psi_j^e(x_i^e, y_i^e) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } i \neq j \\ 1 & \text{ถ้า } i = j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad \dots\dots\dots (2.63)$$

$x_j^e$  และ  $y_j^e$  เป็นพิกัด  $i$  ของจันประกอบ  $e$  ในระบบพิกัด  $xy$  ดังรูป 2.6



รูป 2.6 ระบบพิกัดเฉพาะที่  $\bar{x}\bar{y}$

การหาฟังก์ชัน  $\Psi_j^e(x, y)$  ทำได้ง่ายขึ้นโดยใช้ระบบพิกัดเฉพาะที่  $\bar{x}\bar{y}$  (ในรูป 2.6) ซึ่งมีการแปลงพิกัดตามสมการ

$$\bar{x} = x - x_1^e \quad \dots\dots\dots (2.64)$$

$$\bar{y} = y - y_1^e \quad \dots\dots\dots (2.65)$$

ดังนั้น  $\Psi_j^e(x, y) = \Psi_j^e(\bar{x}, \bar{y}) \quad \dots\dots\dots (2.66)$

และสมการ (2.63) กลายเป็น

$$\Psi_j^e(x_i^e, y_i^e) = \Psi_j^e(\bar{x}_i, \bar{y}_i) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } i \neq j \\ 1 & \text{ถ้า } i = j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad \dots\dots\dots (2.67)$$

โดยที่  $\bar{x}_i$  และ  $\bar{y}_i$  เป็นพิกัดของข้อ  $i$  ของจันประกอบ  $e$  ในระบบ  $\bar{x}\bar{y}$

จากสมการ (2.63) เมื่อ  $j = 1$  ได้เงื่อนไข

$$\Psi_j^e(\bar{x}_i, \bar{y}_i) = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad \dots\dots\dots (2.68)$$

และ  $\Psi_1^e(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = 0 \quad \dots\dots\dots (2.69)$

นั่นคือจากสมการ (2.68) เลือก  $\Psi_1^e = 0$  บนเส้น  $x=25$  และ  $y=25$  ดังนั้น  $\Psi_1^e(\bar{x}, \bar{y}) = 0$  มีรูปแบบเป็น

$$\Psi_1^e(\bar{x}, \bar{y}) = c_1(25 - \bar{x})(25 - \bar{y}) \quad \dots\dots\dots (2.70)$$

โดยที่  $c_1$  เป็นตัวคงค่าเลือก (*Arbitrary constant*)

โดยที่  $c_1$  จากการแทนค่าพิกัดข้อ 1 คือ  $\bar{x}_1 = 0$  และ  $\bar{y}_1 = 0$  ลงในสมการ (2.69) และสมการ

(2.70) ได้ 
$$c_1 = \frac{1}{(25)(25)} \quad \dots\dots\dots (2.71)$$

ดังนั้น 
$$\Psi_1^e(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{(25)(25)}(25 - \bar{x})(25 - \bar{y}) = \left(1 - \frac{\bar{x}}{25}\right)\left(1 - \frac{\bar{y}}{25}\right) \quad \dots\dots\dots (2.72)$$

ในทำนองเดียวกันหา  $\Psi_2^e(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $\Psi_3^e(\bar{x}, \bar{y})$  และ  $\Psi_4^e(\bar{x}, \bar{y})$  ได้เป็น

$$\Psi_2^e(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\bar{x}}{25} \left(1 - \frac{\bar{y}}{25}\right) \quad \dots\dots\dots (2.73)$$

$$\Psi_3^e(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\bar{x}}{25} \left(1 - \frac{\bar{y}}{25}\right) \quad \dots\dots\dots (2.74)$$

$$\Psi_4^e(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\bar{x}}{25} \left(1 - \frac{\bar{y}}{25}\right) \quad \dots\dots\dots (2.75)$$

เขียนสมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำของชั้นประกอบ  $e$  ในบริเวณ  $\Omega_2$  จากสมการ

(2.61) ได้ 
$$\int_{\Omega^e} \left\{ W \frac{\partial U}{\partial T} + d^2_{ceq} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} + d^2_{ceq} \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial y} \right\} dx dy = \int_{\Gamma^e} q_n W d\Gamma^e \quad \dots\dots\dots (2.76)$$

โดยที่ 
$$q_n = m_x d^2_{ceq} \frac{\partial U}{\partial x} + m_y d^2_{ceq} \frac{\partial U}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (2.77)$$

ประมาณค่า  $U$  ด้วย  $U^e$  และ  $W$  ด้วย  $\Psi_j^e (j = 1, 2, 3, 4)$  ได้สมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำของชั้นประกอบ  $e$  ในบริเวณ  $\Omega_2$  ในรูปของเมทริกซ์ (*Matrix*) ดังนี้

$$[M^e] \{ \dot{U}^e \} + [K^e] \{ U^e \} = \{ Q^e \} \quad \dots\dots\dots (2.78)$$

โดยที่ 
$$U^e = \frac{\partial U^e}{\partial T}$$

$$M_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \Psi_i^e \Psi_j^e dx dy \quad \dots\dots\dots (2.79)$$

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \left( d^2_{ceq} \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial x} + d^2_{ceq} \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial y} \right) dx dy \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad \dots\dots\dots (2.80)$$

$$Q_i^e = \int_{\Gamma^e} q_n \Psi_i^e d\Gamma^e \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad \dots\dots\dots (2.81)$$

ในทำนองเดียวกัน สมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำของชั้นประกอบ  $e$  ในบริเวณ  $\Omega_1$  ในรูปของเมทริกซ์ (*Matrix*) เขียนได้เป็น

$$[M^e] \{ \dot{U}^e \} + K_h [K^e] \{ U^e \} = K_h \{ Q^e \} \quad \dots\dots\dots (2.82)$$

เขียนสมการควบคุมการอัตราระบายน้ำของชั้นประกอบทุกชั้นโดยใช้สมการ (2.76)

สำหรับชั้นประกอบที่อยู่ใน  $\Omega_2$  และใช้สมการ (2.82) สำหรับชั้นประกอบที่อยู่ใน  $\Omega_1$  จนครบทุกชั้นประกอบ แล้วบวกสมการควบคุมการอัตราระบายน้ำของชั้นประกอบทุกชั้นเข้าด้วยกัน นั่นคือประกอบสมการควบคุมการอัตราระบายน้ำของชั้นประกอบเข้าด้วยกันจนครบทุกชั้น อาศัยการต่อเนื่องของ  $U$  ที่ข้อ เปลี่ยนหมายเลขชั้นประกอบที่ข้อเดียวกันเป็นหมายเลขรวมของข้อ และการหักล้างกันของ  $q_n$  บนด้านติดกันระหว่างชั้นประกอบแต่ละชั้นที่อยู่ในเนื้อเดียวกัน และอาศัยเงื่อนไขขอบเขตสมการ (2.49) และสมการ (2.50) ในการหักล้างกันของ  $q_n$  บนด้านติดกันระหว่างชั้นประกอบแต่ละชั้นที่อยู่ในดินเนื้อต่างกัน เหลือ  $q_n$  บนเส้นรอบรูป  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$ , และ  $\Gamma_7$  ได้สมการควบคุมการอัตราระบายน้ำแบบใช้งานง่ายใหม่ในรูปชุดสมการเชิงอนุพันธ์ดังนี้

$$[M]\{\dot{U}^e\} + [K]\{U\} = \{Q\} \quad \dots\dots\dots (2.83)$$

โดยที่  $\{U^e\}^T = \left[ \frac{\partial U_1}{\partial T}, \frac{\partial U_2}{\partial T}, \frac{\partial U_3}{\partial T}, \dots, \frac{\partial U_{(n_s+1)(n_x+1)}}{\partial T} \right]$

$$\{U\}^T = [U_1, U_2, U_3, \dots, U_{(n_s+1)(n_x+1)}]$$

และ  $\{Q\}^T = [Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_{(n_s+1)(n_x+1)}]$

กำหนดเงื่อนไขขอบเขตเส้นรอบรูป  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$ , และ  $\Gamma_7$  ได้โดยตรง โดยใช้สมการ (2.28) ถึงสมการ (2.34) สมการ (2.37) และสมการ (2.38)

$\{U\}$  และ  $\{Q\}$  ที่เกิดขึ้นมีลักษณะดังนี้คือ ถ้า  $U_i = 0$ ;  $Q_i$  ไม่ทราบค่าและ  $U_i$  ไม่ทราบค่า  $Q_i = 0$  ละทั้งสมการที่ไม่ทราบค่า  $Q_i$  จัดสมการใหม่ได้

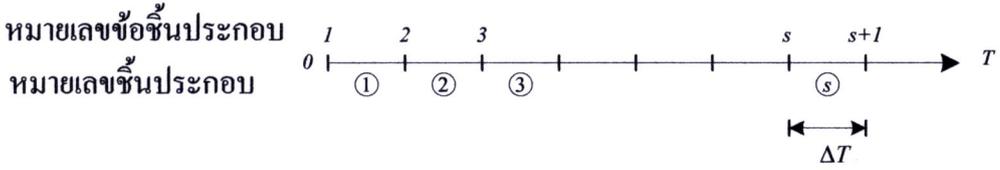
$$[M^r]\{\dot{U}^r\} + [K^r]\{U^r\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (2.84)$$

โดยที่  $[M^r]$  และ  $[K^r]$  เป็นเมทริกซ์  $[M]$  และ  $[K]$  ที่ละทิ้งแถว (Row) และสดมภ์ (Column)  $i$  ที่ไม่ทราบค่า  $Q_i$

$$\{\dot{U}^r\} \text{ และ } \{U^r\} \text{ เป็นเวกเตอร์แนวตั้ง (Column vector) } \{\dot{U}\} \text{ และ } \{U\} \text{ ที่ละทิ้ง}$$

แถว  $i$  ที่ไม่ทราบค่า  $Q_i$

แบ่งตัวประกอบเวลา  $T$  ออกเป็นชั้นส่วนประกอบเวลายาว  $\Delta T$  เท่ากัน และต่อกันดังรูป 2.7 ดังนั้นข้อที่  $S$  และ  $S+1$



รูป 2.7 การแบ่งขึ้นประกอบของตัวประกอบเวลา  $T$

สมการ (2.84) กลายเป็น

$$[M^r] \left\{ \dot{U}^r \right\}_s + [K^r] \{U^r\}_s = \{0\} \quad \dots\dots\dots (2.85)$$

และ  $[M^r] \left\{ \dot{U}^r \right\}_{s+1} + [K^r] \{U^r\}_{s+1} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (2.86)$

เอา  $(1 - \lambda)$  คูณสมการที่ (2.85) ได้

$$(1 - \lambda)[M^r] \left\{ \dot{U}^r \right\}_s + (1 - \lambda)[K^r] \{U^r\}_s = \{0\} \quad \dots\dots\dots (2.87)$$

เอา  $\lambda$  คูณสมการที่ (2.86) ได้

$$\lambda[M^r] \left\{ \dot{U}^r \right\}_{s+1} + \lambda[K^r] \{U^r\}_{s+1} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (2.88)$$

เอาสมการ (2.87) บวก สมการ (2.88) ได้

$$[M^r] \left[ (1 - \lambda) \left\{ \dot{U}^r \right\}_s + \lambda \left\{ \dot{U}^r \right\}_{s+1} \right] + [K^r] \left[ (1 - \lambda) \{U^r\}_s + \lambda \{U^r\}_{s+1} \right] = \{0\} \quad \dots\dots\dots (2.89)$$

ประมาณ  $(1 - \lambda) \left\{ \dot{U}^r \right\}_s + \lambda \left\{ \dot{U}^r \right\}_{s+1} \approx \left\{ \dot{U}^r \right\}_{s+1} \approx \frac{\{U^r\}_{s+1} - \{U^r\}_s}{\Delta T} \{0\}$   
 $0 \leq \lambda \leq 1 \quad \dots\dots\dots (2.90)$

ดังนั้นสมการ (2.89) กลายเป็น

$$[M^r] \left[ \frac{\{U^r\}_{s+1} - \{U^r\}_s}{\Delta T} \right] + [K^r] \left[ (1 - \lambda) \{U^r\}_s + \lambda \{U^r\}_{s+1} \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (2.91)$$

จัดรูปสมการ (2.91) ใหม่เป็น

$$\left[ \frac{[M^r]}{\Delta T} + \lambda[K^r] \right] \{U^r\}_{s+1} = \left[ \frac{[M^r]}{\Delta T} - (1 - \lambda)[K^r] \right] \{U^r\}_s \quad \dots\dots\dots (2.92)$$

กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นตามสมการ (2.51)

$$\{U^r\}_1 = \{1\} \quad s = 1 \quad \dots\dots\dots (2.87)$$

ใช้  $\{U^r\}_1$  จำนวน  $\{U^r\}_2$  จากสมการ (2.86) ตามวิธีกำจัดของเกาส์ (*Gauss elimination method*) และใช้  $\{U^r\}_2$  จำนวน  $\{U^r\}_3$  ทำวนเช่นนี้ไปเรื่อยๆเพื่อหา  $\{U^r\}_4, \{U^r\}_5, \{U^r\}_6, \dots$  จนถึงข้อที่ต้องการ

งานวิจัยนี้ใช้ชิ้นประกอบอันตะรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 25 มม. x 25 มม. 4 ข้อ เชิงเส้นและ ส่วนเพิ่มเติมประกอบเวลา  $\Delta T = 0.0001$  เลือกค่า  $\lambda = 0.5$  ตามแรงค์ - นิคอลสัน (Crank - Nicolson) จำนวนปริพัทธ์  $\int_{\Omega^e} \Psi_i^e \Psi_j^e dx dy$  และ  $\int_{\Omega^e} \left( d_{ceq}^2 \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial x} + d_{ceq}^2 \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial y} \right) dx dy$  โดยการหาปริพัทธ์โดยตรงดังนี้

จากสมการ (2.64) และสมการ (2.65)

$$x = \bar{x} + x_1^e \quad \dots\dots\dots (2.93)$$

$$y = \bar{y} + y_1^e \quad \dots\dots\dots (2.94)$$

เปลี่ยนตัวแปร  $x$  และ  $y$  เป็น  $\bar{x}$  และ  $\bar{y}$  ตามสมการ (2.93) สมการ (2.94) และสมการ (2.66) ได้

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} \Psi_i^e \Psi_j^e dx dy &= \int_{x_1^e}^{x_1^e+25} \int_{y_1^e}^{y_1^e+25} \Psi_i^e(x, y) \Psi_j^e(x, y) dx dy \\ &= \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_i^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_j^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} \quad \dots\dots\dots (2.95) \end{aligned}$$

แทนค่า  $\Psi_1^e(\bar{x}, \bar{y}), \Psi_2^e(\bar{x}, \bar{y}), \Psi_3^e(\bar{x}, \bar{y})$  และ  $\Psi_4^e(\bar{x}, \bar{y})$  จากสมการ (2.72) สมการ (2.75) แล้วใช้ปริพัทธ์

$$\int_0^{25} \left( 1 - \frac{\bar{x}}{25} \right) d\bar{x} = \frac{25}{3} \quad \dots\dots\dots (2.96)$$

$$\int_0^{25} \left( 1 - \frac{\bar{x}}{25} \right) \left( \frac{\bar{x}}{25} \right) d\bar{x} = \frac{25}{6} \quad \dots\dots\dots (2.97)$$

$$\int_0^{25} \left( \frac{\bar{x}}{25} \right) \left( \frac{\bar{x}}{25} \right) d\bar{x} = \frac{25}{3} \quad \dots\dots\dots (2.98)$$

$$\int_0^{25} \left( 1 - \frac{\bar{x}}{25} \right) d\bar{x} = \frac{25}{2} \quad \dots\dots\dots (2.99)$$

$$\int_0^{25} \left( \frac{\bar{x}}{25} \right) d\bar{x} = \frac{25}{2} \quad \dots\dots\dots (2.100)$$

ได้

$$\begin{aligned} \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_1^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_1^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} &= \frac{625}{9} \\ \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_1^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_2^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} &= \frac{625}{18} = \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_2^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_1^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} \\ \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_1^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_3^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} &= \frac{625}{36} = \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_3^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_1^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} \\ \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_1^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_4^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} &= \frac{625}{18} = \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_4^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_1^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_2^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_2^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} &= \frac{625}{9} \\ \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_2^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_3^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} &= \frac{625}{18} = \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_3^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_2^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} \\ \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_2^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_4^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} &= \frac{625}{36} = \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_4^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_2^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} \\ \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_3^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_3^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} &= \frac{625}{9} \\ \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_3^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_4^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} &= \frac{625}{18} = \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_4^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_3^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} \\ \int_0^{25} \int_0^{25} \Psi_4^e(\bar{x}, \bar{y}) \Psi_4^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} &= \frac{625}{9} \end{aligned}$$

โดยกฎลูกโซ่

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial x} &= \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial \bar{x}} \\ \therefore \frac{\partial \Psi_1^e}{\partial x} &= -\frac{1}{25} \left( 1 - \frac{\bar{y}}{25} \right) \\ \frac{\partial \Psi_2^e}{\partial x} &= \frac{1}{25} \left( 1 - \frac{\bar{y}}{25} \right) \\ \frac{\partial \Psi_3^e}{\partial x} &= \frac{1}{25} \left( \frac{\bar{y}}{25} \right) \\ \frac{\partial \Psi_4^e}{\partial x} &= -\frac{1}{25} \left( \frac{\bar{y}}{25} \right) \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_1^e}{\partial y} &= -\frac{1}{25} \left( 1 - \frac{\bar{x}}{25} \right) \\ \frac{\partial \Psi_2^e}{\partial y} &= -\frac{1}{25} \left( \frac{\bar{x}}{25} \right) \\ \frac{\partial \Psi_3^e}{\partial y} &= \frac{1}{25} \left( \frac{\bar{x}}{25} \right) \\ \frac{\partial \Psi_4^e}{\partial y} &= \frac{1}{25} \left( 1 - \frac{\bar{x}}{25} \right) \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_1^e}{\partial x} \frac{\Psi_1^e}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y} &= \frac{1}{3} \\ \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_1^e}{\partial x} \frac{\Psi_2^e}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y} &= -\frac{1}{3} = \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_2^e}{\partial x} \frac{\Psi_1^e}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y} \\ \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_1^e}{\partial x} \frac{\Psi_3^e}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y} &= -\frac{1}{6} = \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_3^e}{\partial x} \frac{\Psi_1^e}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y} \\ \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_1^e}{\partial x} \frac{\Psi_4^e}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y} &= \frac{1}{6} = \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_4^e}{\partial x} \frac{\Psi_1^e}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y} \\ \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_2^e}{\partial x} \frac{\Psi_2^e}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y} &= \frac{1}{3} \\ \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_2^e}{\partial x} \frac{\Psi_3^e}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y} &= \frac{1}{6} = \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_3^e}{\partial x} \frac{\Psi_2^e}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_2^e}{\partial x} \frac{\Psi_4^e}{\partial x} d\bar{x}d\bar{y} &= -\frac{1}{6} = \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_4^e}{\partial x} \frac{\Psi_2^e}{\partial x} d\bar{x}d\bar{y} \\
 \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_3^e}{\partial x} \frac{\Psi_3^e}{\partial x} d\bar{x}d\bar{y} &= \frac{1}{3} \\
 \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_3^e}{\partial x} \frac{\Psi_4^e}{\partial x} d\bar{x}d\bar{y} &= -\frac{1}{3} = \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_4^e}{\partial x} \frac{\Psi_3^e}{\partial x} d\bar{x}d\bar{y} \\
 \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_4^e}{\partial x} \frac{\Psi_4^e}{\partial x} d\bar{x}d\bar{y} &= \frac{1}{3} \\
 \text{และ} \quad \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_1^e}{\partial y} \frac{\Psi_1^e}{\partial y} d\bar{x}d\bar{y} &= \frac{1}{3} \\
 \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_1^e}{\partial y} \frac{\Psi_2^e}{\partial y} d\bar{x}d\bar{y} &= \frac{1}{6} = \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_2^e}{\partial y} \frac{\Psi_1^e}{\partial y} d\bar{x}d\bar{y} \\
 \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_1^e}{\partial y} \frac{\Psi_3^e}{\partial y} d\bar{x}d\bar{y} &= -\frac{1}{6} = \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_3^e}{\partial y} \frac{\Psi_1^e}{\partial y} d\bar{x}d\bar{y} \\
 \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_1^e}{\partial y} \frac{\Psi_4^e}{\partial y} d\bar{x}d\bar{y} &= -\frac{1}{3} = \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_4^e}{\partial y} \frac{\Psi_1^e}{\partial y} d\bar{x}d\bar{y} \\
 \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_2^e}{\partial y} \frac{\Psi_2^e}{\partial y} d\bar{x}d\bar{y} &= \frac{1}{3} \\
 \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_2^e}{\partial y} \frac{\Psi_3^e}{\partial y} d\bar{x}d\bar{y} &= \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_3^e}{\partial y} \frac{\Psi_2^e}{\partial y} d\bar{x}d\bar{y} \\
 \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_2^e}{\partial y} \frac{\Psi_4^e}{\partial y} d\bar{x}d\bar{y} &= \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_4^e}{\partial y} \frac{\Psi_2^e}{\partial y} d\bar{x}d\bar{y} \\
 \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_3^e}{\partial y} \frac{\Psi_3^e}{\partial y} d\bar{x}d\bar{y} &= \frac{1}{3} \\
 \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_3^e}{\partial y} \frac{\Psi_4^e}{\partial y} d\bar{x}d\bar{y} &= \frac{1}{6} = \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_4^e}{\partial y} \frac{\Psi_3^e}{\partial y} d\bar{x}d\bar{y} \\
 \int_0^{25} \int_0^{25} \frac{\Psi_4^e}{\partial y} \frac{\Psi_4^e}{\partial y} d\bar{x}d\bar{y} &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\therefore [M^e] = \frac{625}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{และ} \quad [K^e] = \frac{d_{ceq}^2}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$



## 2.4 เปอร์เซ็นต์การอัดตัวระบายน้ำเฉลี่ย (Average Percentage of Consolidation)

กำหนดเปอร์เซ็นต์การอัดตัวระบายน้ำเฉลี่ย  $\bar{U}(T)$  เท่ากับค่าเฉลี่ยของความคืบหน้าส่วนเกินที่กระจายลดลงขณะใดๆ หาด้วยความคืบหน้าส่วนเกินตอนเริ่มต้น ดังนั้น

$$\bar{U}(T) = \frac{\int_{\Omega} [u(x, y, z, 0) - u(x, y, t)] dx dy}{\int_{\Omega} u(x, y, 0) dx dy} \times 100\% \quad \text{..... (2.101)}$$

จัดสมการ (2.101) พร้อมทั้งเปลี่ยนตัวแปร  $t$  เป็น  $T$  และ  $u$  เป็น  $U$  ได้

$$\bar{U}(T) = \left[ 1 - \frac{4}{s^2} \int_0^{s/2} \int_0^{s/2} U(x, y, T) dx dy \right] \times 100\% \quad \text{..... (2.102)}$$

หาปริพันธ์  $\int_0^{s/2} \int_0^{s/2} U(x, y, T) dx dy$  โดยวิธีของซิมป์สัน (Simpson) สองครั้งซ้อน ใช้ค่า  $U(x, y, T)$  ที่คำนวณได้จาก  $\{U\}$ , ซึ่งได้จาก  $\{U^r\}$ , เพิ่มสมาชิก (Element) 0 ลงไปตำแหน่งแถวที่ละทิ้ง