

บทที่ 2

วิธีการดำเนินการวิจัย

2.1 วิธีดำเนินการวิจัย

วิเคราะห์ปัญหาการอัดตัวระบายน้ำของชั้นดินเหนียวไม่เอกพันธุ์ เกือบอิ่มตัว ที่มีความหนาชั้นดินจำกัด น้ำระบายออกได้ทั้งผิวบนและผิวล่างของชั้นดิน หรือน้ำระบายออกได้เฉพาะผิวบนหรือผิวล่างได้ทางเดียว ภายใต้น้ำหนักบรรทุกทุกแผ่กระจายสม่ำเสมอเพิ่มขึ้นฉับพลันแล้วคงตัว หาอัตราการทรุดตัวของชั้นดินเหนียว โดยเริ่มจากการสร้างแบบจำลองปัญหาที่นำมาวิเคราะห์ คือสมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำภายใต้น้ำหนักบรรทุกทุกแผ่กระจายสม่ำเสมอเพิ่มขึ้นฉับพลันแล้วคงตัว โดยอาศัยทฤษฎีการอัดตัวระบายน้ำมิติเดียวสำหรับดินไม่เอกพันธุ์ของ Schiffman, R.L. and Gibson, R.E. (1964) และทฤษฎีการอัดตัวระบายน้ำสำหรับดินเอกพันธุ์เกือบอิ่มตัวของ Conte, Eand Troncone, A (2006) หาผลเฉลยโดยใช้วิธีขึ้นประกอบอันตะ (Finite Element) จากนั้นตรวจสอบความถูกต้องกับผลเฉลยอัตราการทรุดตัวเนื่องจากการอัดตัวระบายน้ำของชั้นดินเหนียวเอกพันธุ์อิ่มตัวของ Terzaghi, K. (1923) และผลเฉลยอัตราการทรุดตัวเนื่องจากการอัดตัวระบายน้ำของดินเหนียวไม่เอกพันธุ์ อิ่มตัว ภายใต้น้ำหนักบรรทุกทุกแผ่กระจายสม่ำเสมอเพิ่มขึ้นฉับพลันแล้วคงตัวตามรูป 2.1 โดยมีรายละเอียดของการไม่เอกพันธุ์ของดินเป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงพหุนามของค่าสัมประสิทธิ์การซึมได้ ($k(z)$) และค่าสัมประสิทธิ์การเปลี่ยนแปลงปริมาตร ($m_v(z)$) ตามความลึก (z) ดังรูป 2.2 ตาม

2.2 ปัญหาที่นำมาวิจัย

วิเคราะห์อัตราการทรุดตัวของชั้นดินเหนียวไม่เอกพันธุ์ เกือบอิ่มตัว ที่มีความหนาชั้นดินจำกัด น้ำระบายออกได้ทั้งผิวบนและผิวล่างของชั้นดิน หรือน้ำระบายออกได้เฉพาะผิวบนหรือผิวล่างได้ทางเดียว ภายใต้น้ำหนักบรรทุกทุกแผ่กระจายสม่ำเสมอเพิ่มขึ้นฉับพลันแล้วคงตัวดังรูป 2.1 โดยมีรายละเอียดของการไม่เอกพันธุ์ของดินเป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงพหุนามของค่าสัมประสิทธิ์การซึมได้ ($k(z)$) และค่าสัมประสิทธิ์การเปลี่ยนแปลงปริมาตร ($m_v(z)$) ตามความลึก (z) ดังรูป 2.2 ตาม

สมการ $\frac{k(z)}{k_o} = (1 + \alpha \frac{z}{H})^p$, $\frac{k(z)}{k_o} = \left\{ 1 + (1 + \alpha)^p - \left[1 + \alpha \left(1 - \frac{z}{H} \right) \right]^p \right\}$ และ

$\frac{m_v(z)}{m_{vo}} = (1 + \beta \frac{z}{H})^q$, $\frac{m_v(z)}{m_{vo}} = \left\{ 1 + (1 + \beta)^q - \left[1 + \beta \left(1 - \frac{z}{H} \right) \right]^q \right\}$

โดยที่ $k_o = k(0)$, $m_{vo} = m_v$, ตัวแปรเสริมมีค่า α , β , p และ q ได้มาจากการวิเคราะห์ผลการวิจัยดินเหนียวอ่อนกรุงเทพมหานครที่บริเวณรังสิตของ Taesiri, Y. (1976) โดย นวพล (2549) มีค่าดังนี้

ก) $\alpha = -1.4$, $\beta = -0.2$ และ $p = q = 2$

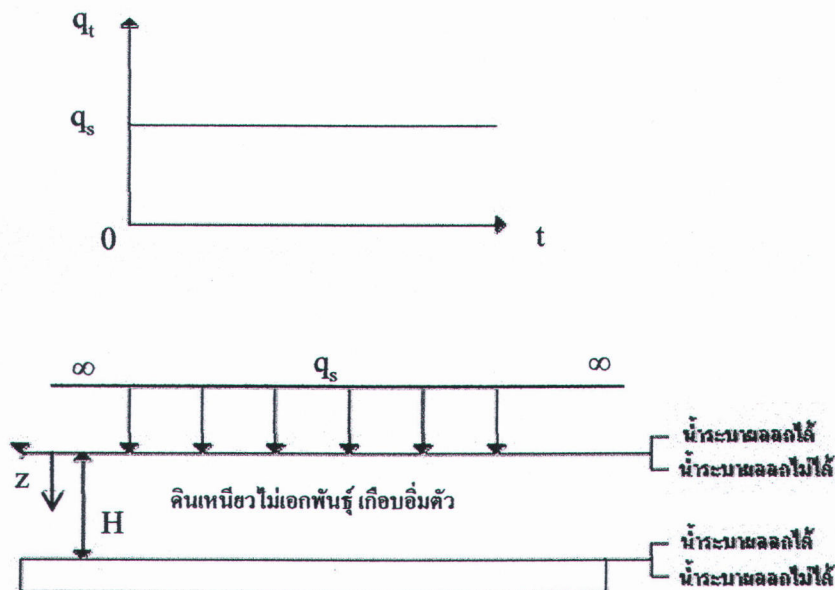
ข) $\alpha = -0.3$, $\beta = -0.2$, $p = 0, 1, 2$ และ $q = 0, 1, 2$

การไม่อิ่มตัวของดินขึ้นอยู่กับตัวแปรเสริมความดันน้ำส่วนเกินในสภาวะการอัดตัวได้มีติเดียวที่ผิวบนของชั้นดิน η_0 กำหนดค่า η_0 ตาม Conte, E and Troncone, A (2006) ดังนี้

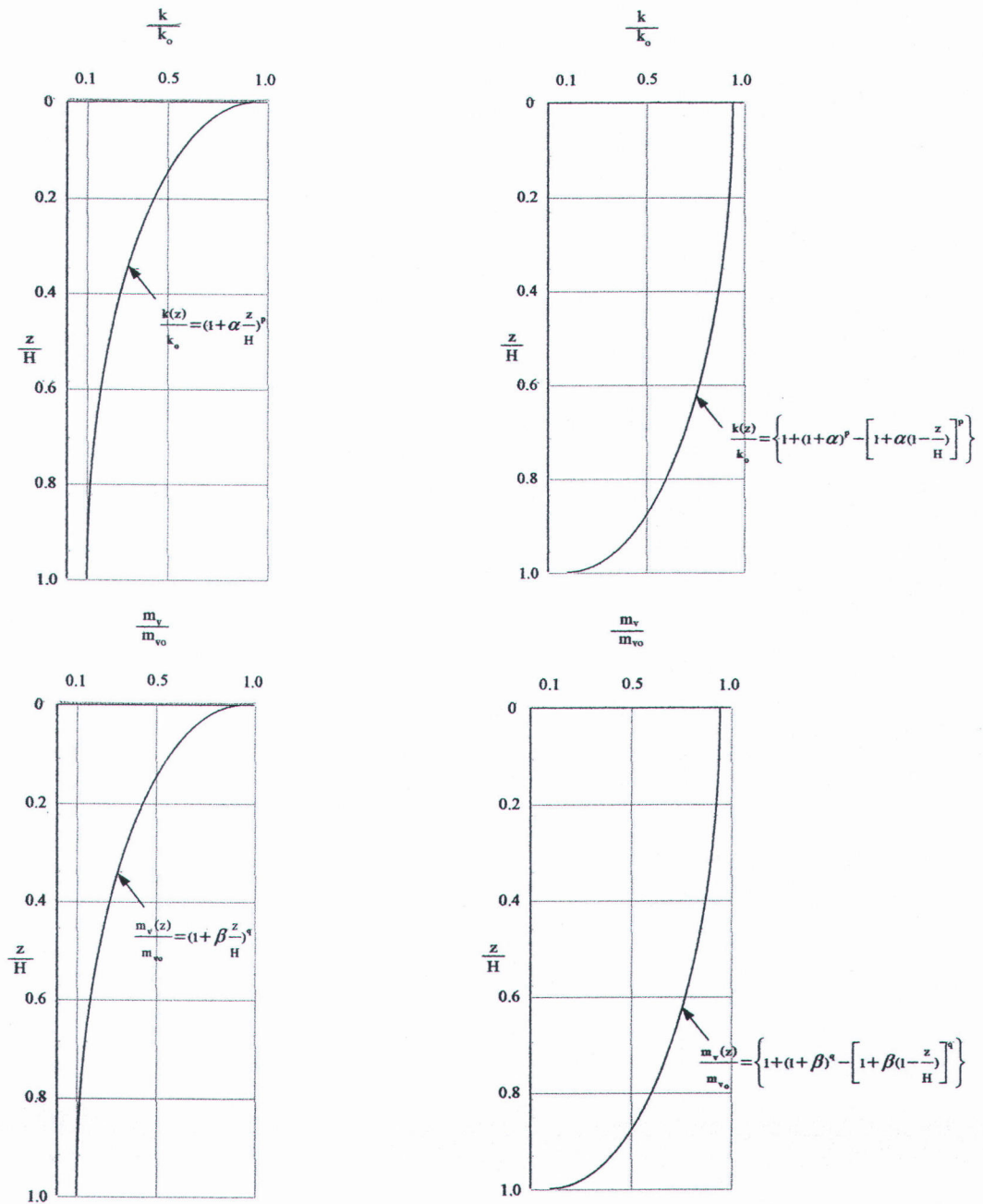
$\eta_0 = 0.80, 0.85, 0.90, 0.95, 1.00$

หาอัตราการทรุดตัวที่ตัวประกอบเวลา $T = \frac{k_o t}{\gamma_w m_{vo} H^2}$; (γ_w เป็นหน่วยน้ำหนักของน้ำ) เท่ากับ

0.001, 0.002, 0.003, 0.004, 0.006, 0.008, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.06, 0.08, 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.60, 0.80, 1.00, 2.00, 3.00, 4.00, 6.00, 8.00 และ 10.0



รูป 2.1 ปัญหาที่นำมาวิเคราะห์



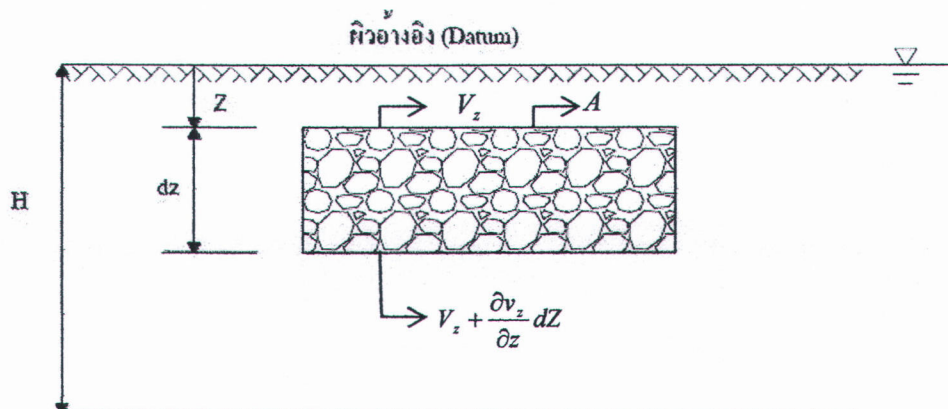
รูป 2.2 การเปลี่ยนแปลงเชิงพหุนามของค่าสัมประสิทธิ์การซึมได้และค่าสัมประสิทธิ์การเปลี่ยนแปลงปริมาตรตามความลึก

2.3 แบบจำลองปัญหาที่นำมาวิเคราะห์

ปัญหาที่นำมาวิจัยเป็นปัญหาการทรุดตัวเนื่องจากการอัดตัวระบายน้ำของชั้นดินเหนียว ไม่เอกพันธ์ เกือบอิมิตัว ที่มีความหนาชั้นดินจำกัด น้ำระบายออกได้ทั้งผิวบนและผิวล่างของชั้นดิน หรือน้ำระบายออกได้เฉพาะผิวบนหรือผิวล่างได้ทางเดียว ภายใต้ให้น้ำหนักบรรทุกทุกแผ่กระจายสม่ำเสมอเพิ่มขึ้นฉับพลันแล้วคงตัวซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีการอัดตัวระบายน้ำมิติเดียวสำหรับดิน ไม่เอกพันธ์ของ Schiffman, R.L. and Gibson, R.E. (1964) และทฤษฎีการอัดตัวระบายน้ำสำหรับดิน เอกพันธ์เกือบอิมิตัวของ Conte, E and Troncone, A (2006)

2.3.1 การสร้างแบบจำลอง

การสร้างแบบจำลองปัญหาที่นำมาวิเคราะห์ คือสมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำเทียม (Pseudo Consolidation) อาศัยกฎ 2 ข้อ คือ ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดของก้อนดิน (การอัดตัวได้) กฎการไม่สูญหายของมวล (สมการความต่อเนื่อง) รวมกันสมมุติฐานของ Schiffman, R.L. and Gibson, R.E. (1964) ยกเว้นน้ำในช่องว่างระหว่างเม็ดดินอัดตัวได้ตามสมมุติฐานของ Conte, E and Troncone, A (2006) และไม่คือน้ำหนักดิน



รูป 2.3 ชั้นก้อนดิน

พิจารณาชั้นก้อนดินในรูป 2.3

$$\text{อัตราน้ำไหลออกจากก้อนดินสุทธิ} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} dz \right) A \quad (2.1)$$

โดยที่ A เป็นพื้นที่หน้าตัด



ก่อนดินหดตัวในแนวดิ่ง

$$= \varepsilon_z dz \quad (2.2)$$

โดยที่ ε_z เป็น ความเครียดในแนวดิ่ง

เพราะฉะนั้นปริมาตรส่วนลดลงของก้อนดิน

$$= A(\varepsilon_z dz) \quad (2.3)$$

อัตราปริมาตรส่วนลดลงของก้อนดิน

$$= \frac{\partial}{\partial t} [A(\varepsilon_z dz)] \quad (2.4)$$

ปริมาตรน้ำในก้อนดิน

$$= n_p A dz \quad (2.5)$$

โดยที่ n_p เป็นความพรุน

ความสูงของน้ำในก้อนดิน

$$= n_p dz \quad (2.6)$$

ให้ u เป็นความดันน้ำส่วนเกินในก้อนดิน

ดังนั้น ความเครียดของน้ำในก้อนดิน

$$= u \beta_w \quad (2.7)$$

โดยที่ β_w เป็น โมดูลัสเชิงปริมาตร (Bulk Modulus) ของน้ำ

เพราะฉะนั้นระยะหดตัวของน้ำในก้อนดิน

$$= (u \beta_w) n_p dz \quad (2.8)$$

ปริมาตรที่หดตัวเนื่องจากความดันของน้ำ

$$= A(u \beta_w) n_p dz \quad (2.9)$$

อัตราปริมาตรหดตัวเนื่องจากความดันของน้ำ

$$= \frac{\partial}{\partial t} [A(u \beta_w) n_p dz] \quad (2.10)$$

จากกฎการไม่สูญหายของมวล

อัตราปริมาตรส่วนลดลงของก้อนดิน = อัตราปริมาตรน้ำไหลออกสุทธิจากก้อนดิน

+ อัตราปริมาตรหดตัวเนื่องจากความดันของน้ำ

$$\frac{\partial}{\partial t} [A(\varepsilon_z dz)] = \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} dz \right) A + \frac{\partial}{\partial t} [A(u \beta_w) n_p dz] \quad (2.11)$$

จัดใหม่ได้สมการต่อเนื่อง

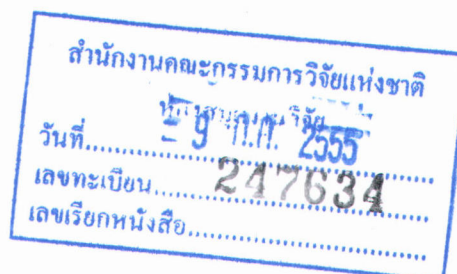
$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} + \beta_w n_p \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.12)$$

$$\text{ให้ } i_z = -\frac{\partial h}{\partial z} \quad (2.13)$$

โดยที่ i_z เป็น ความลาดทางชลศาสตร์ (Hydraulic Gradient)

และที่ h เป็น หัวรวม (Total Head)

$$h = -z + \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma_w} \quad (2.14)$$



โดยที่ z เป็น หัวระดับ

$\frac{V^2}{2g}$ เป็น หัวความเร็ว

$\frac{p}{\gamma_w}$ เป็น หัวความดัน

γ_w เป็น หน่วยน้ำหนักของน้ำ

เนื่องจากน้ำไหลซึมช้ามาก $\frac{V^2}{2g}$ ละทิ้งหัวความเร็วได้

$$h = -z + 0 + \frac{p}{\gamma_w} \quad (2.15)$$

เนื่องจากน้ำไหลตามกฎของ Darcy

$$v_z = k(z).i_z \quad (2.16)$$

โดยที่ $k(z)$ เป็นสัมประสิทธิ์การซึมได้ตามแนวดิ่งของน้ำ

แต่จากคำจำกัดความ $p = u + u_s$ (2.17)

โดยที่ u_s เป็น ความดันน้ำสถิต มีค่าเท่ากับ

$$u_s = \gamma_w(z) \quad (2.18)$$

เนื่องจากความเคียดน้อย γ_w เปลี่ยนแปลงน้อยมาก

จากแคลคูลัส

$$\frac{\partial u_s}{\partial z} = \gamma_w \quad (2.19)$$

แทนค่า p จากสมการ (2.17) และ u_s จากสมการ (2.18) ลงในสมการ (2.15) หาอนุพันธ์ในส่วนตัวแปร z ได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial z} &= -1 + \frac{1}{\gamma_w} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u_s}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{\gamma_w} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

แทนค่า $\frac{\partial h}{\partial z}$ จากสมการ(2.20) ลงในสมการ (2.13) ได้

$$i_z = -\frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.21)$$

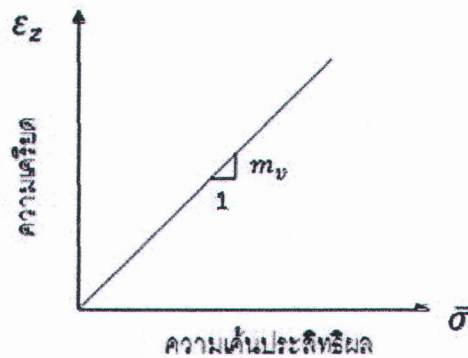
แทนค่า i_z จากสมการ (2.21) ลงในสมการ (2.16) ได้

$$v_z = k(z) \left(-\frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (2.22)$$

หาอนุพันธ์ในส่วนตัวแปร z ได้

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{k(z)}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (2.23)$$

จากเส้นโค้งการอัดตัวได้มีมิติเดียว



รูป 2.4 เส้นโค้งการอัดตัวได้มีมิติเดียวของดิน

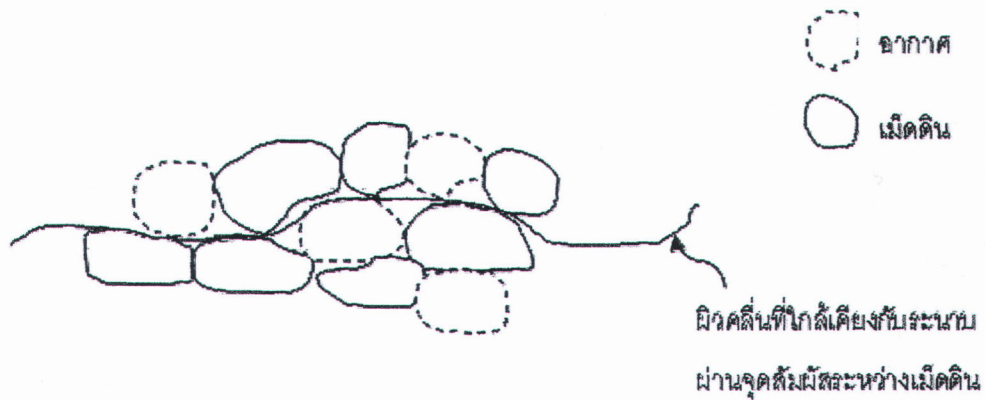
ได้สัมประสิทธิ์การเปลี่ยนแปลงปริมาตร

$$m_v = \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial \bar{\sigma}} \quad (2.24)$$

จากกฎลูกโซ่ได้

$$\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} = m_v \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} \quad (2.25)$$

จากคำจำกัดความความความเค้นประสิทธิผลของดินอิ่มตัว ซึ่งนำมาใช้กับดินเกือบอิ่มตัวได้ เพราะสามารถเลือกพิจารณากรณีที่ใกล้เคียงกับระนาบผ่านจุดสัมผัสระหว่างเม็ดดินและน้ำโดยไม่ผ่านอากาศในช่องว่างที่ไม่ต่อเนื่องกันได้ดังรูป 2.5



รูป 2.5 ทิศเคลื่อนที่ผ่านจุดสัมผัสระหว่างเม็ดดิน

ความเค้นทั้งหมด (Total Stress)

$$\sigma = \bar{\sigma} + u + u_s \quad (2.26)$$

ไม่คิดน้ำหนักดิน u_s มีค่าเป็นศูนย์

เพราะฉะนั้นสมการ (2.26) กลายเป็น

$$\bar{\sigma} = \sigma - u \quad (2.27)$$

หาอนุพันธ์ในส่วนตัวแปร t ได้

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.28)$$

แทน $\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t}$ จากสมการ (2.28) ลงในสมการ (2.25)

$$\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} = m_v \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (2.29)$$

แทน $\frac{\partial v_z}{\partial z}$ จากสมการ (2.23) $\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t}$ จากสมการ (2.29) ลงในสมการ (2.12) และ γ_w เปลี่ยนแปลงไป

น้อยมาก แล้วจัดสมการใหม่ได้

$$\frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial}{\partial z} \left(k(z) \frac{\partial u}{\partial z} \right) = m_v \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) \quad (2.30)$$

โดยที่ η เป็นตัวแปรเสริมความดันในช่องว่างระหว่างเม็ดดิน (Pore Pressure Parameter) ในสภาวะ

ไม่มีการเคลื่อนตัวทางด้านข้าง ที่ความลึก z

$$\eta = \frac{m_v}{m_v + \beta_w n_p} \quad (2.31)$$

$$\therefore \eta_0 = \frac{m_{v0}}{m_{v0} + \beta_w n_p} \quad (2.32)$$

กำจัด $\beta_w n_p$ ออกจากสมการ (2.31) และ (2.32) ได้

$$\eta = \left[1 - \frac{(1 - \eta_0)}{\left(\frac{m_v}{m_{v0}} \right) \eta_0 + (1 - \eta_0)} \right] \quad (2.33)$$

แทนค่า η จากสมการ (2.33) และ $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$ ลงในสมการ (2.30) ได้สมการควบคุมการอัดตัว

ระบายน้ำสำหรับดินไม่เอกพันธุ์ เกือบอิมตัว ภายใต้ให้น้ำหนักบรรทุกคงตัว

$$\frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial}{\partial z} \left(k(z) \frac{\partial u}{\partial z} \right) = m_v \left\{ 1 - \frac{(1 - \eta_0)}{\left(\frac{m_v}{m_{v0}} \right) \eta_0 + (1 - \eta_0)} \frac{\partial u}{\partial t} \right\}; 0 < z < H, 0 < t \quad (2.34)$$

2.3.2 ตรวจสอบสมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำ

- กรณีเฉพาะ ดินไม่เอกพันธุ์ อิมตัว

$$\therefore \eta_0 = 1 \quad (2.35)$$

แทนค่า η_0 จากสมการ (2.35) ลงในสมการ (2.34) ได้สมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำของ

Schiffman, R.L. and Gibson, R.E. (1964)

$$\frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial}{\partial z} \left(k(z) \frac{\partial u}{\partial z} \right) = m_v \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right\} \quad (2.36)$$

- กรณีเฉพาะ ดินเอกพันธุ์ เกือบอิมตัว

$$\therefore \frac{m_v}{m_{v0}} = 1 \quad (2.37)$$

$$\frac{k_z}{k_{z0}} = 1 \quad (2.38)$$

ดังนั้น η เท่ากับ η_0

แทนค่า m_{v0} และ k_{z0} จากสมการ (2.37) และ (2.38) ลงในสมการ (2.33) และ (2.34) ได้สมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำของ Conte, E and Troncone, A (2006)

$$C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta_0} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (2.39)$$

โดยที่

C_v เป็นสัมประสิทธิ์การอัดตัวระบายน้ำ (Coefficient of Consolidation)

$$C_v = \frac{k_0}{\gamma_w m_{v0}} \quad (2.40)$$

2.4 การหาผลเฉลย

นำแบบจำลองความดันน้ำส่วนเกินที่ได้ คือสมการ (2.34) มาแปลงเป็นแบบจำลองในรูปตัวแปรไร้มิติในรูปตัวแปรไร้มิติหาผลเฉลยโดยใช้วิธีขึ้นประกอบอันตะ เขียนแบบจำลองในรูปขึ้นประกอบอันตะ ได้ชุดสมการพีชคณิตซึ่งเขียนในรูปแบบเมทริกซ์ (Matrix) ได้เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของเวกเตอร์ความดันน้ำส่วนเกินในรูปตัวแปรไร้มิติเป็นสมการเมทริกซ์สามแนวเฉียง (Tridiagonal Matrix) แก่ชุดสมการโดยวิธีของจอร์จ (Jordan) ได้การกระจายค่าความดันน้ำส่วนเกินในรูปตัวแปรไร้มิติ

นำการกระจายค่าความดันน้ำส่วนเกินในรูปตัวแปรไร้มิติที่ได้ ไปคาดคะเนหาการเปลี่ยนแปลงค่าความเค้นประสิทธิผลตามความลึกของชั้นดิน แล้วคำนวณระยะทรุดตัวขณะนั้นจากค่าความเค้นประสิทธิผลที่ได้และค่าสัมประสิทธิ์การเปลี่ยนแปลงปริมาตรตามสมการ (2.2) ถึง (2.5) ใช้วิธีเชิงตัวเลขของซิมป์สัน (Simpson) หาปริพันธ์ (Integrate) ได้อัตราการทรุดตัว

2.4.1 แบบจำลองในรูปตัวแปรไร้มิติ

เพื่อให้ครอบคลุมปัญหาที่นำมาวิจัยได้กว้างขวางมากขึ้น จึงหาผลเฉลยสำหรับปัญหาทั่วไปซึ่งติดอยู่ในรูปตัวแปรความหนาชั้นดิน (H) เวลาตั้งแต่บรรทุกน้ำหนัก (t) น้ำหนักบรรทุกแผ่กระจายสูงสุด (q_s) ค่าสัมประสิทธิ์การซึมได้ ($k(z)$) และค่าสัมประสิทธิ์การเปลี่ยนแปลงปริมาตร ($m_v(z)$)

ในการหาผลเฉลยจึงต้องกำจัดตัวแปรเหล่านี้ทั้งหมด โดยรวมตัวแปรเหล่านี้เข้ากับตัวแปรที่มีอยู่เดิม คือ ความลึกวัดจากผิวบนของชั้นดิน (z) ช่วงเวลาที่ชั้นดินรับน้ำหนักบรรทุก (t) ค่าความดันน้ำส่วนเกิน (u) ค่าสัมประสิทธิ์การซึมได้ที่ระดับผิวบนของชั้นดิน (k_o) และค่าสัมประสิทธิ์การเปลี่ยนแปลงปริมาตรที่ระดับผิวบนของชั้นดิน (m_{v0}) โดยกำหนดตัวแปรไร้มิติ Z T และ U ขึ้นมาใหม่แล้วเขียนแบบจำลองในรูปตัวแปรไร้มิติเพื่อให้พจน์ของตัวแปร H t q_s $k(z)$ และ $m_v(z)$ ที่มีอยู่หายไปได้ดังนี้

$$\text{ให้} \quad Z = \frac{z}{H} \quad (2.41)$$

$$T = \frac{k_o t}{\gamma_w m_{v0} H^2} \quad (2.42)$$

$$U(Z, T) = \frac{u(z, t)}{q_s} \quad (2.43)$$

กำหนดให้

$u(z, t), U(Z, T)$	เป็น	ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า
$z, Z, t, T, k(z), m_v(z), q_s(t)$	เป็น	ตัวแปรที่ทราบค่า
$p, q, \alpha, \beta, \eta$	เป็น	ตัวคงค่าเลือก (Arbitrary Constant)
$\gamma_w, k_o, m_{v0}, \eta_0$ (Bulk modulus)	เป็น	ค่าคงตัว (Constant)

ให้

$$k(Z) = \frac{k(z)}{k_o} = \{1 + \alpha Z\}^p \quad \text{หรือ} \quad (2.44)$$

$$k(Z) = \frac{k(z)}{k_o} = \{1 + (1 + \alpha)^p - [1 + \alpha(1 - Z)]^p\} \quad (2.45)$$

$$m_v(Z) = \frac{m_v(z)}{m_{v0}} = \{1 + \beta Z\}^q \quad \text{หรือ} \quad (2.46)$$

$$m_v(Z) = \frac{m_v(z)}{m_{v0}} = \{1 + (1 + \beta)^q - [1 + \beta(1 - Z)]^q\} \quad (2.47)$$

จากแคลคูลัส

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial Z} q_s = \frac{\partial U}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial z} q_s = \frac{\partial U}{\partial Z} \frac{q_s}{H} \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ k(z) \frac{\partial u}{\partial z} \right\} = \frac{q_s}{H^2} \frac{\partial}{\partial Z} \left\{ k_o k(Z) \frac{\partial U}{\partial Z} \right\} \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial T} \frac{q_s k_0}{\gamma_w m_{v0} H^2} \quad (2.50)$$

แทนค่า $\frac{\partial u}{\partial z}$ สมการที่ (2.48) $\frac{\partial}{\partial z} \left\{ k(z) \frac{\partial U}{\partial z} \right\}$ ลงในสมการ (2.49) และ $\frac{\partial u}{\partial t}$ จากสมการ (2.50)

ลงในสมการ (2.30) ได้สมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำภายใต้น้ำหนักบรรทุกทุกคงตัว ในรูปตัวแปรไร้มิติแบบใช้งานได้ยาก (Strong form) ดังนี้

$$\frac{q_s}{\gamma_w H^2} \frac{\partial}{\partial Z} \left\{ k_0 k(Z) \frac{\partial U}{\partial Z} \right\} = m_{v0} m_v(Z) \left(1 + \frac{(1-\eta_0)}{\eta_0 \left(\frac{m_v}{m_{v0}} \right)} \right) \left\{ \frac{q_s k_0}{\gamma_w m_{v0} H^2} \frac{\partial U}{\partial T} \right\} \quad (2.51)$$

$$\text{หรือ} \quad \frac{\partial}{\partial Z} \left\{ k(Z) \frac{\partial U}{\partial Z} \right\} = m_v(Z) \left(1 + \frac{(1-\eta_0)}{\eta_0 \left(\frac{m_v}{m_{v0}} \right)} \right) \left\{ \frac{\partial U}{\partial T} \right\} \quad (2.52)$$

สร้างสมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำภายใต้น้ำหนักบรรทุกทุกคงตัวในรูปตัวแปรไร้มิติ แบบใช้งานง่าย (Weak form) โดยวิธีถ่วงน้ำหนักส่วนตกค้าง (Weighted Residue Method) ได้ดังนี้
ให้ $R(Z, T)$ เป็นส่วนตกค้าง (Residue)

$$R(Z, T) = \frac{\partial}{\partial Z} \left\{ k(Z) \frac{\partial U}{\partial Z} \right\} - m_v(Z) \left(1 + \frac{(1-\eta_0)}{\eta_0 \left(\frac{m_v}{m_{v0}} \right)} \right) \left\{ \frac{\partial U}{\partial T} \right\} \quad (2.53)$$

และ $W(Z)$ เป็น ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักใดๆ ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

จากบทตั้งมูลฐานของแคลคูลัสของการแปรผัน (Fundamental Lemma of the Calculus of Variations) ได้เงื่อนไข

ถ้า $\int_0^1 W(Z) R(Z, T) dZ = 0$ เป็นจริงทุกฟังก์ชัน $W(Z)$ แล้ว

$$R(Z, T) = 0 \quad (2.54)$$



$$\text{หรือ } \frac{\partial}{\partial Z} \left\{ k(Z) \frac{\partial U}{\partial Z} \right\} = m_v(Z) \left(1 + \frac{(1-\eta_0)}{\eta_0 \left(\frac{m_v}{m_{v0}} \right)} \right) \left\{ \frac{\partial U}{\partial T} \right\} \quad (2.55)$$

$$\text{ดังนั้น } \int_0^1 W(Z) R(Z, T) dZ = 0 \quad \text{ทุกฟังก์ชัน } W(Z) \quad (2.56)$$

แทนค่า $R(Z, T)$ จากสมการที่ (2.53) ลงในสมการ (2.56) แล้วจัดสมการใหม่ได้

$$\int_0^1 W(Z) \frac{\partial}{\partial Z} \left\{ k(Z) \frac{\partial U}{\partial Z} \right\} dZ - \int_0^1 W(Z) m_v(Z) \left(1 + \frac{(1-\eta_0)}{\eta_0 \left(\frac{m_v}{m_{v0}} \right)} \right) \left\{ \frac{\partial U}{\partial T} \right\} dZ = 0 \quad (2.57)$$

หรือ

$$\int_0^1 W(Z) \frac{\partial}{\partial Z} \left\{ k(Z) \frac{\partial U}{\partial Z} \right\} dZ - \frac{\partial}{\partial T} \int_0^1 W(Z) m_v(Z) \left(1 + \frac{(1-\eta_0)}{\eta_0 \left(\frac{m_v}{m_{v0}} \right)} \right) U dZ = 0 \quad (2.58)$$

พิจารณาสมการ (2.58) ที่ละพจน์ได้ดังนี้

$$\int_0^1 W(Z) m_v(Z) U dZ \quad \text{หาค่าได้ ถ้าทราบฟังก์ชัน } U$$

$$\int_0^1 W(Z) \frac{\partial}{\partial Z} \left\{ k(Z) \frac{\partial U}{\partial Z} \right\} dZ \quad \text{เป็นพจน์ที่ต้องเปลี่ยนรูปให้ใช้งานได้ง่าย คือ ลดอันดับ } \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \text{ ลง ซึ่ง}$$

ทำได้โดยการหาปริพันธ์ที่ละส่วน (Integration by Part) ได้ดังนี้

$$\int_0^1 W(Z) \frac{\partial}{\partial Z} \left\{ k(Z) \frac{\partial U}{\partial Z} \right\} dZ = W(Z) k(Z) \frac{\partial U}{\partial Z} \Big|_0^1 - \int_0^1 W'(Z) k(Z) \frac{\partial U}{\partial Z} dZ \quad (2.59)$$

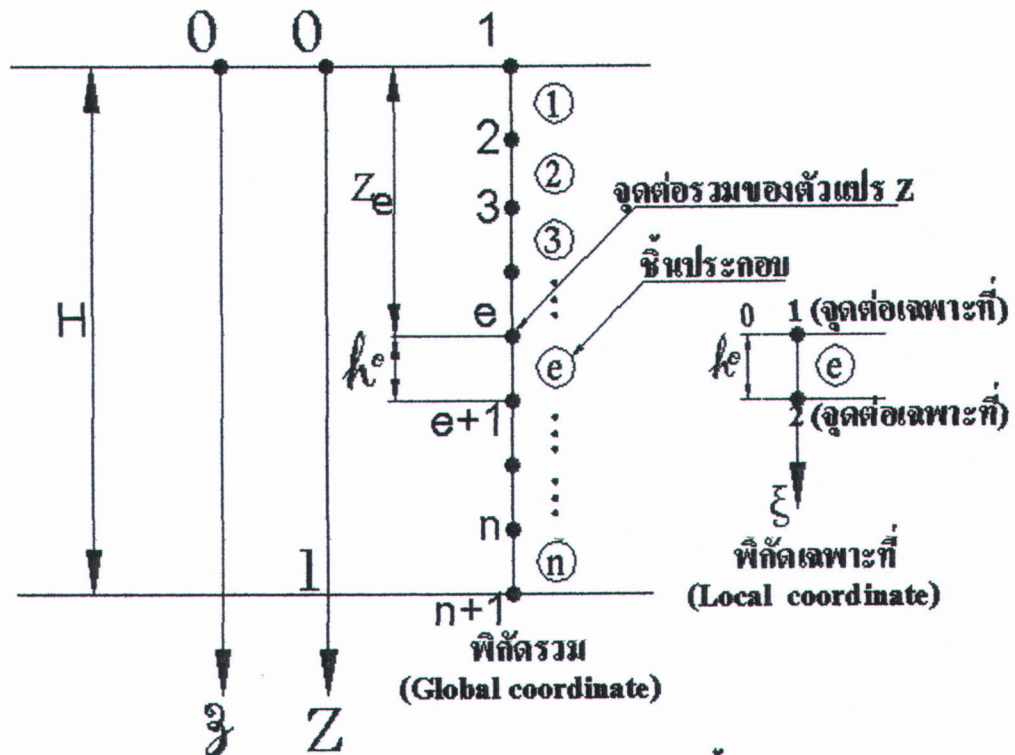
$$\text{แทนค่า } \int_0^1 W(Z) \frac{\partial}{\partial Z} \left\{ k(Z) \frac{\partial U}{\partial Z} \right\} dZ \text{ จากสมการ (2.59) ลงในสมการ (2.58) ได้สมการควบคุมการ}$$

อัดตัวระบายนํ้ารูปแบบใช้งานได้ง่ายเป็น

$$\int_0^1 W'(Z) k(Z) \frac{\partial U}{\partial Z} dZ + \frac{\partial}{\partial T} \int_0^1 W(Z) m_v(Z) \left(1 + \frac{(1-\eta_0)}{\eta_0 \left(\frac{m_v}{m_{v0}} \right)} \right) U dZ = 0 \quad (2.60)$$

1.4.2 การแก้สมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำรูปแบบใช้งานได้ง่าย

การแก้สมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำรูปแบบใช้งานได้ง่าย ทำได้โดยการแบ่งชั้นดินออกเป็นชั้นประกอบ (Element) n ชั้น ต่อกันดังรูป 2.5



ใช้ตัวพ่วงล่างหลังออกจุดต่อ(Node) ตัวพ่วงบนหลังออกชั้นประกอบ(Element)

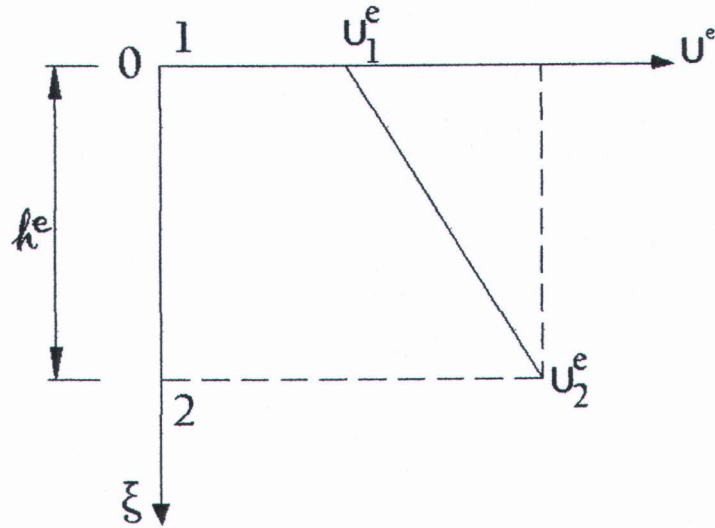
รูป 2.6 การแบ่งชั้นดินออกเป็นชั้นประกอบ n ชั้น

ให้ $k^e(\xi)$, $m_v^e(\xi)$, $U^e(\xi)$ และ $W^e(\xi)$ เป็นค่าฟังก์ชัน $k(Z)$, $m_v(Z)$, $U(Z, T)$ และ $W(Z)$ บนชั้นประกอบ e ตามลำดับ โดยที่

ξ เป็นค่าพิกัดเฉพาะที่

U_1^e และ U_2^e เป็นค่าฟังก์ชัน U^e ที่จุดต่อเฉพาะที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

ประมาณค่าฟังก์ชัน $U^e(\xi)$ บนชั้นประกอบแต่ละชั้นเป็นค่าฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear Function) ในส่วนตัวแปร ξ ดังแสดงในรูป 2.7



รูป 2.7 การเปลี่ยนแปลงค่าฟังก์ชัน $U^e(\xi)$

เขียนฟังก์ชัน $U^e(\xi)$ คิดอยู่ในรูปตัวแปร U_1^e และ U_2^e ได้ดังนี้

$$U^e(\xi) = U_1^e N_1^e(\xi) + U_2^e N_2^e(\xi) \quad (2.61)$$

โดยที่

$$N_1^e[\xi] = 1 - \frac{\xi}{h^e} \quad (2.62)$$

$$N_2^e[\xi] = \frac{\xi}{h^e} \quad (2.63)$$

เขียนสมการควบคุมการอัดตัวระบายน้ำรูปแบบใช้งานได้ง่ายสำหรับจีนประกอบอันตะ แต่ละจีนได้ในทำนองเดียวกัน ได้ดังนี้

$$\int_{z_e}^{z_{e+1}} W'(Z) k(Z) \frac{\partial U}{\partial Z} dZ + \frac{\partial}{\partial T} \int_{z_e}^{z_{e+1}} W(Z) m_v(Z) \left(1 + \frac{(1-\eta_0)}{\eta_0 \left(\frac{m_v}{m_{v0}} \right)} \right) U dZ = W(Z) k(Z) \frac{\partial U}{\partial Z} \Big|_{z_e}^{z_{e+1}} \quad (2.64)$$

เปลี่ยนตัวแปร Z เป็น ξ โดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่าง พิกัดรวม กับ พิกัดเฉพาะที่

$$Z = \xi + Z_e \quad (2.65)$$

ได้พจน์ในสมการที่ (2.64) ที่ละพจน์ดังนี้

$$\int_{z_e}^{z_{e+1}} W'(Z)k(Z) \frac{\partial U}{\partial Z} dZ = \int_0^{h^e} W'(\xi)k^e(\xi) \frac{\partial U^e}{\partial \xi} d\xi \quad (2.66)$$

$$\int_{z_e}^{z_{e+1}} W(Z)m_v(Z) \left(1 + \frac{(1-\eta_0)}{\eta_0 \left(\frac{m_v}{m_{v0}} \right)} \right) U dZ = \int_0^{h^e} W^e(\xi)m_v^e(\xi) \left(1 + \frac{(1-\eta_0)}{\eta_0 \left(\frac{m_v}{m_{v0}} \right)} \right) U^e d\xi \quad (2.67)$$

$$W(Z)k(Z) \frac{\partial U}{\partial Z} \Big|_{z_e}^{z_{e+1}} = W^e(\xi)k^e(\xi) \frac{\partial U^e}{\partial \xi} \Big|_0^{h^e} \quad (2.68)$$

แทนค่า $U^e(\xi)$ แล้วหาปริพันธ์ (Integrate) โดยเลือกฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก $W^e(\xi)$ สองค่าตาม Galerkin ได้ดังนี้

$$W^e(\xi) = N_1^e(\xi) \quad (2.69)$$

และ $W^e(\xi) = N_2^e(\xi) \quad (2.70)$

เพราะ มีตัวแปรไม่ทราบค่า 2 ตัวแปร คือ U_1^e และ U_2^e

จาก $U^e(\xi) = U_1^e N_1^e(\xi) + U_2^e N_2^e(\xi) \quad (2.71)$

ได้สมการขึ้นประกอบดังนี้

$$m_{11}^e \dot{U}_1^e + m_{12}^e \dot{U}_2^e + k_{11}^e U_1^e + k_{12}^e U_2^e = V_1^e \quad (2.72)$$

$$m_{21}^e \dot{U}_1^e + m_{22}^e \dot{U}_2^e + k_{21}^e U_1^e + k_{22}^e U_2^e = V_2^e \quad (2.73)$$

โดยที่

$$m_{11}^e = \int_0^{h^e} m_v^e(\xi) \left(1 + \frac{(1-\eta_0)}{\eta_0 \left(\frac{m_v}{m_{v0}} \right)} \right) N_1^e N_1^e d\xi \approx m_v(Z_e) \left(1 + \frac{(1-\eta_0)}{\eta_0 \left(\frac{m_v}{m_{v0}} \right)} \right) \left(\frac{h^e}{3} \right) \quad (2.74)$$

$$m_{12}^e = \int_0^{h^e} m_v^e(\xi) \left(1 + \frac{(1-\eta_0)}{\eta_0 \left(\frac{m_v}{m_{v0}} \right)} \right) N_1^e N_2^e d\xi \approx m_v(Z_e) \left(1 + \frac{(1-\eta_0)}{\eta_0 \left(\frac{m_v}{m_{v0}} \right)} \right) \left(\frac{h^e}{6} \right) \quad (2.75)$$

$$m_{21}^e = \int_0^{h^e} m_v^e(\xi) \left(1 + \frac{(1-\eta_0)}{\eta_0 \left(\frac{m_v}{m_{v0}} \right)} \right) N_2^e N_1^e d\xi \approx m_{12}^e \left(1 + \frac{(1-\eta_0)}{\eta_0 \left(\frac{m_v}{m_{v0}} \right)} \right) \quad (2.76)$$

$$m_{22}^e = \int_0^{h^e} m_v^e(\xi) \left(1 + \frac{(1-\eta_0)}{\eta_0 \left(\frac{m_v}{m_{v0}} \right)} \right) N_2^e N_2^e d\xi \approx m_v(Z_e) \left(1 + \frac{(1-\eta_0)}{\eta_0 \left(\frac{m_v}{m_{v0}} \right)} \right) \left(\frac{h^3}{3} \right) \quad (2.77)$$

$$k_{11}^e = \int_0^{h^e} k^e(\xi) \frac{dN_1^e}{d\xi} \frac{dN_2^e}{d\xi} d\xi \approx k(Z_e) \left(\frac{1}{h^e} \right) \quad (2.78)$$

$$k_{12}^e = \int_0^{h^e} k^e(\xi) \frac{dN_1^e}{d\xi} \frac{dN_2^e}{d\xi} d\xi \approx k(Z_e) \left(-\frac{1}{h^e} \right) \quad (2.79)$$

$$k_{21}^e = \int_0^{h^e} k^e(\xi) \frac{dN_2^e}{d\xi} \frac{dN_1^e}{d\xi} d\xi \approx k_{12}^e \quad (2.80)$$

$$k_{22}^e = \int_0^{h^e} k^e(\xi) \frac{dN_2^e}{d\xi} \frac{dN_2^e}{d\xi} d\xi \approx k(Z_e) \left(\frac{1}{h^e} \right) \quad (2.81)$$

$$V_1^e = -k^e(0) \left(\frac{\partial U^e}{\partial \xi} \right)_\xi = 0 \quad (2.82)$$

$$\text{และ } V_2^e = k^e(h^e) \left(\frac{\partial U^e}{\partial \xi} \right)_\xi = h^e \quad (2.83)$$

เขียนสมการขึ้นประกอบในรูปเมทริกซ์ (Matrix)

$$[m^e] \{ \dot{U}^e \} + [k^e] \{ U^e \} = \{ V^e \} \quad (2.84)$$

โดยที่

$$[m^e] = m_v(Z_e) \frac{h^e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

$$[k^e] = \frac{k(Z_e)}{h^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

$$\{ U^e \}^T = [U_1^e \quad U_2^e] \quad (2.87)$$

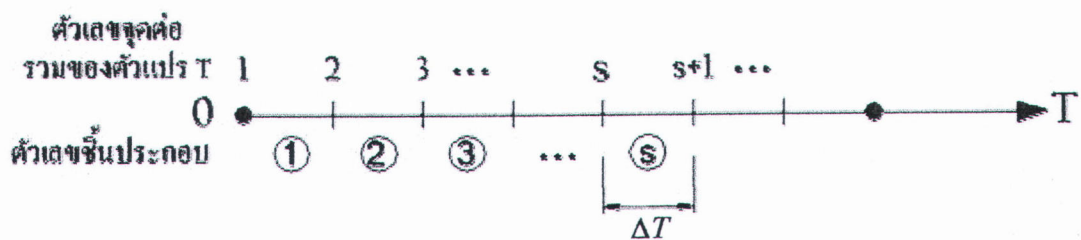
$$\{ \dot{U}^e \}^T = \left[\frac{dU_1^e}{dt} \quad \frac{dU_2^e}{dT} \right] \quad (2.88)$$

$$\{U\}_S^T = [U_1 \ U_2 \ U_3 \ \dots \ U_{n+1}]_{(1) \times (n+1)} \quad (2.96)$$

$$\{\dot{U}\}_S^T = [\dot{U}_1 \ \dot{U}_2 \ \dot{U}_3 \ \dots \ \dot{U}_{n+1}]_{(1) \times (n+1)} \quad (2.97)$$

$$\{V\}_S^T = [V_1^1 \ 0 \ 0 \ \dots \ V_{n+1}^n]_{(1) \times (n+1)} \quad (2.98)$$

แบ่งตัวประกอบเวลา T ออกเป็นชิ้นประกอบ (Element) ยาว ΔT เท่ากัน และต่อกัน ดังรูป 4.4



รูป 2.8 การแบ่งชิ้นประกอบของตัวประกอบเวลา

ดังนั้น สมการที่ (2.93) กลายเป็น

$$[m] \left\{ \dot{U} \right\}_{s+1} + [k] \{U\}_{s+1} = \{V\}_{s+1} \quad (2.99)$$

เอา $(1-\lambda)$ คูณ สมการที่ (2.93) ได้

$$(1-\lambda)[m] \left\{ \dot{U} \right\}_s + (1-\lambda)[k] \{U\}_s = (1-\lambda)\{V\}_s \quad (2.100)$$

เอา λ คูณ สมการที่ (2.99) ได้

$$\lambda[m] \left\{ \dot{U} \right\}_{s+1} + \lambda[k] \{U\}_{s+1} = \lambda\{V\}_{s+1} \quad (2.101)$$

เอา สมการที่ (2.100) บวกสมการที่ (2.101) ได้

$$[m] \left[(1-\lambda) \left\{ \dot{U} \right\}_s + \lambda \left\{ \dot{U} \right\}_{s+1} \right] + [k] \left[(1-\lambda) \{U\}_s + \lambda \{U\}_{s+1} \right] = [(1-\lambda)\{V\}_s + \lambda\{V\}_{s+1}] \quad (2.102)$$

$$\text{ประมาณ } (1-\lambda) \left\{ \dot{U} \right\}_s + \lambda \left\{ \dot{U} \right\}_{s+1} \approx \left\{ \dot{U} \right\}_{s+1} \approx \frac{\{U\}_{s+1} - \{U\}_s}{(\Delta T)} \quad \text{โดยที่ } 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (2.103)$$

ดังนั้น สมการที่ (2.102) กลายเป็น

$$\left[\frac{\{U\}_{s+1} - \{U\}_s}{\Delta T} \right] + [K] \{ (1-\lambda)\{U\}_s + \lambda\{U\}_{s+1} \} = \{ (1-\lambda)\{V\}_s + \lambda\{V\}_{s+1} \} \quad (2.104)$$

จัดรูปสมการ (2.104) ใหม่ ได้

$$\left[\frac{[m]}{(\Delta T)} + \lambda[K] \right] \{U\}_{s+1} = \left[\frac{[m]}{(\Delta T)} - (1-\lambda)[K] \right] \{U\}_s + \{ (1-\lambda)\{V\}_s + \lambda\{V\}_{s+1} \} \quad (2.105)$$

กำหนดเงื่อนไขขอบเขต

$$\text{ขอบบน : นำระบายออกได้} \quad \therefore U_1 = 0_{s=1, 2, 3, \dots} \quad (2.106)$$

$$\text{ขอบล่าง : นำระบายออกไม่ได้} \quad V_{n+1}^n = 0_{s=1, 2, 3, \dots} \quad (2.107)$$

เงื่อนไขขอบเขตที่เหลือก็ทำได้ในทำนองเดียวกัน แทนลงในสมการที่ (2.105) แล้วตัดแถว (Row) แรกออกได้

$$\left[\frac{[\hat{m}]}{(\Delta T)} + \lambda[\hat{K}] \right] \{U\}_{s+1} = \left[\frac{[\hat{m}]}{(\Delta T)} - (1-\lambda)[\hat{K}] \right] \{U\}_s \quad (2.108)$$

โดยที่

$$[\hat{m}] = \begin{bmatrix} m_{22}^1 + m_{11}^2 & m_{12}^2 & & & & \\ m_{21}^2 & m_{22}^2 + m_{11}^3 & m_{12}^3 & & & \\ & m_{21}^3 & m_{22}^3 + m_{11}^4 & m_{12}^4 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & m_{12}^{n-1} & m_{22}^{n-1} + m_{11}^n & m_{12}^n \\ \text{สมมาตร} & & & & m_{21}^n & m_{22}^n \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (2.109)$$

$$[\hat{k}] = \begin{bmatrix} k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 & & & & \\ k_{21}^1 & k_{22}^2 + k_{11}^3 & k_{12}^3 & & & \\ & k_{21}^3 & k_{22}^3 + k_{11}^4 & k_{12}^4 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & k_{12}^{n-1} & k_{22}^{n-1} + k_{11}^n & k_{12}^n \\ & & & & & k_{21}^n & k_{22}^n \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (2.110)$$

สมมาตร

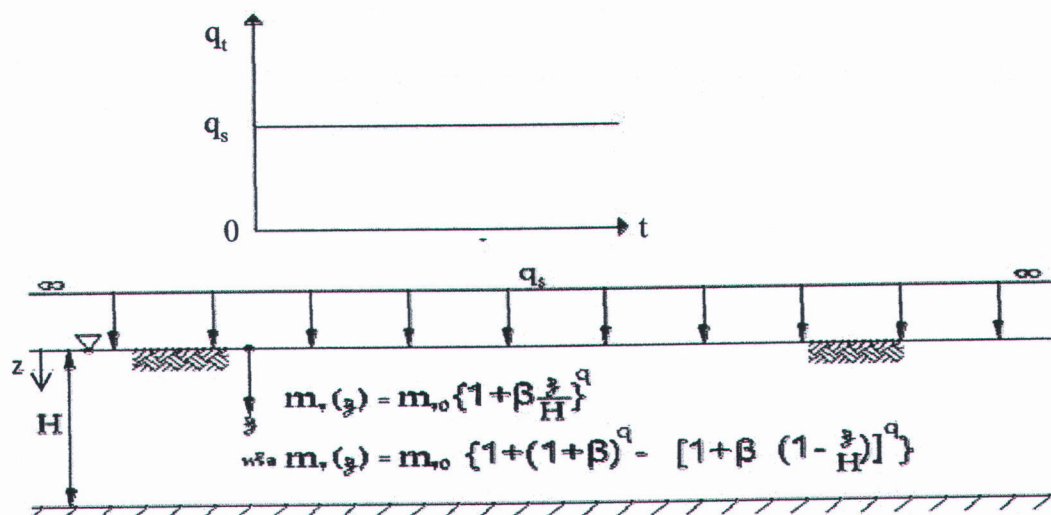
$$\{U\}_S^T = [U_2 \ U_3 \ \dots \ U_{n+1}]_{(1 \times n)} \quad S = 1, 2, 3, \dots \quad (2.111)$$

เลือกจำนวนชั้นประกอบ 80 ชั้น $\lambda = 0.5 \ \Delta T = 1 \times 10^{-4}$

หาผลเฉลยชุดสมการชั้นประกอบอิสระ โดยใช้วิธีของจอร์แดน (Jordan) ได้ $U(Z, T)$

2.4.3 อัตราการทรุดตัว

อัตราการทรุดตัวแสดงได้ด้วย เปอร์เซ็นต์การทรุดตัวที่เวลาต่างๆ ซึ่งแยกออกเป็นเปอร์เซ็นต์การทรุดตัวที่เวลา $t = 0$ (เปอร์เซ็นต์การทรุดตัวทันที) และเปอร์เซ็นต์การทรุดตัวที่เวลา $t > 0$ เนื่องจากชั้นดินเหนียวเป็นชั้นดินเหนียวเกือบอิ่มตัว จึงเกิดการทรุดตัวทันทีได้



รูป 2.9 น้ำหนักกระทำต่อชั้นดิน

จากรูป 2.7 ให้

$\rho(t)$ เป็น ระยะทรุดตัวเนื่องจากการอัดตัวระบายน้ำในขณะเวลา t ใดๆ

$\rho(\infty)$ เป็น ระยะทรุดตัวทั้งหมดเนื่องจากการอัดตัวระบายน้ำ

$\rho(0)$ เป็น ระยะทรุดตัวทันที

จากตัวแปรเสริมความดันน้ำส่วนเกิน $\eta(z)$

$$u(z,0) = q_s \eta(z) \quad (2.112)$$

$$\bar{\sigma}(z,0) = q_s - u(z,0) = q_s [1 - \eta(z)] \quad (2.113)$$

จากเส้นโค้งการอัดตัวได้

$$\rho_c(0) = \int_0^H \bar{\sigma}(z,0) m_v(z) dz = \int_0^H q_s [1 - \eta(z)] m_v(z) dz \quad (2.114)$$

$$\rho_c(\infty) = \int_0^H \bar{\sigma}(z,\infty) m_v(z) dz = \int_0^H q_s m_v(z) dz \quad (2.115)$$

กรณี $t=0$: เปอร์เซ็นต์การทรุดตัวทันทีที่กำหนดได้ในรูป $U_\rho(0)$

$$U_\rho(0) = \frac{\rho_c(0)}{\rho_c(\infty)} \times 100 \% \quad (2.116)$$

แทนค่า $\rho_c(0)$ จากสมการ (2.114) และ $\rho_c(\infty)$ จากสมการ (2.115) ได้

$$U_\rho(0) = \frac{\int_0^H q_s [1 - \eta(z)] m_v(z) dz}{\int_0^H q_s m_v(z) dz} \times 100 \% \quad (2.117)$$

$$\text{หรือ } U_\rho(0) = \frac{\int_0^H [1 - \eta(z)] \left(\frac{m_v(z)}{m_{v0}} \right) dz}{\int_0^H \left(\frac{m_v(z)}{m_{v0}} \right) dz} \times 100 \% \quad (2.118)$$

เปลี่ยนตัวแปร $Z = \frac{z}{H}$ ได้

$$U_{\rho}(0) = \frac{\int_0^1 [1 - \eta(Z)] m_v(Z) dZ}{\int_0^1 m_v(Z) dZ} \times 100 \% \quad (2.119)$$

โดยที่ $m_v(Z) = \frac{m_v(z)}{m_{v0}} = \left\{ 1 + \beta \frac{z}{H} \right\}^q$ (2.120)

หรือ $m_v(Z) = \frac{m_v(z)}{m_{v0}} = \left\{ 1 + (1 + \beta)^q - \left[1 + \beta \left(1 - \frac{z}{H} \right) \right]^q \right\}$ (2.121)

จาก $\eta(Z) = \frac{m_v(Z)\eta_0}{m_v(Z)\eta_0 + (1 - \eta_0)}$ (2.122)

$\therefore 1 - \eta(Z) = 1 - \frac{m_v(Z)\eta_0}{m_v(Z)\eta_0 + (1 - \eta_0)} = \frac{1 - \eta_0}{m_v(Z)\eta_0 + (1 - \eta_0)}$ (2.123)

หรือ $[1 - \eta(Z)] m_v(Z) = \frac{(1 - \eta_0) m_v(Z)}{m_v(Z)\eta_0 + (1 - \eta_0)}$ (2.124)

• กรณี $m_v(z) = m_{v0} \left\{ 1 + \beta \frac{z}{H} \right\}^q$

$$\int_0^1 m_v(Z) dZ = \frac{1}{\beta(q+1)} \{ (1 + \beta)^{q+1} - 1 \} \quad (2.125)$$

$$\int_0^1 [1 - \eta(Z)] m_v(Z) dZ = (1 - \eta_0) \int_0^1 \frac{m_v(Z)}{m_v(Z)\eta_0 + (1 - \eta_0)} dZ \quad (2.126)$$

หรือ $\int_0^1 [1 - \eta(Z)] m_v(Z) dZ = (1 - \eta_0) \int_0^1 \frac{(1 + \beta)^q}{\eta_0(1 + \beta)^q + (1 - \eta_0)} dZ$ (2.127)

- ถ้า $q = 0$

$$\int_0^1 [1 - \eta(Z)] m_v(Z) dZ = (1 - \eta_0) \int_0^1 \frac{1}{\eta_0 + (1 - \eta_0)} dZ = (1 - \eta_0) \quad (2.128)$$

- ถ้า $q = 1$

$$\int_0^1 [1 - \eta(Z)] m_v(Z) dZ = (1 - \eta_0) \int_0^1 \frac{(1 + \beta Z)}{\eta_0(1 + \beta Z) + (1 - \eta_0)} dZ \quad (2.129)$$

โดย

$$\int_0^1 \frac{(1+\beta Z)}{\eta_0(1+\beta Z)+(1-\eta_0)} dZ = \frac{1}{\beta} \int_{Z=0}^{Z=1} \frac{(1+\beta Z)}{\eta_0(1+\beta Z)+(1-\eta_0)} d(1+\beta Z) \quad (2.130)$$

หาปริพันธ์ได้

$$\int_0^1 \frac{(1+\beta Z)}{\eta_0(1+\beta Z)+(1-\eta_0)} dZ = \frac{1}{\beta\eta_0} \left[\beta - \frac{(1-\eta_0)}{\eta_0} \ln|1+\beta\eta_0| \right] \quad (2.131)$$

$$\therefore \int_0^1 [1-\eta(Z)] m_v(Z) dZ = (1-\eta_0) \int_0^1 \frac{(1+\beta Z)}{\eta_0(1+\beta Z)+(1-\eta_0)} dZ \quad (2.132)$$

$$\text{หรือ} \int_0^1 [1-\eta(Z)] m_v(Z) dZ = \frac{(1-\eta_0)}{\beta\eta_0} \left[\beta - \frac{(1-\eta_0)}{\eta_0} \ln|1+\beta\eta_0| \right] \quad (2.133)$$

- ถ้า $q=2$

$$\int_0^1 [1-\eta(Z)] m_v(Z) dZ = (1-\eta_0) \int_0^1 \frac{(1+\beta Z)^2}{\eta_0(1+\beta Z)^2+(1-\eta_0)} dZ \quad (2.134)$$

$$\text{โดย} \int_0^1 \frac{(1+\beta Z)^2}{\eta_0(1+\beta Z)^2+(1-\eta_0)} dZ = \frac{1}{\beta} \int_{Z=0}^{Z=1} \frac{(1+\beta Z)^2}{\eta_0(1+\beta Z)^2+(1-\eta_0)} d(1+\beta Z) \quad (2.135)$$

หาปริพันธ์ได้

$$\int_0^1 \frac{(1+\beta Z)^2}{\eta_0(1+\beta Z)^2+(1-\eta_0)} dZ = \frac{1}{\beta\eta_0} \left[\beta + \sqrt{\frac{(1-\eta_0)}{\eta_0}} \left\{ \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{(1-\eta_0)}{\eta_0}}} \right) - \arctan \left(\frac{(1+\beta)}{\sqrt{\frac{(1-\eta_0)}{\eta_0}}} \right) \right\} \right] \quad (2.136)$$

$$\therefore \int_0^1 [1-\eta(Z)] m_v(Z) dZ = (1-\eta_0) \int_0^1 \frac{(1+\beta Z)^2}{\eta_0(1+\beta Z)^2+(1-\eta_0)} dZ \quad (2.137)$$

$$\text{หรือ} \int_0^1 [1-\eta(Z)] m_v(Z) dZ = \frac{(1-\eta_0)}{\beta\eta_0} \left[\beta + \sqrt{\frac{(1-\eta_0)}{\eta_0}} \left\{ \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{(1-\eta_0)}{\eta_0}}} \right) - \arctan \left(\frac{(1+\beta)}{\sqrt{\frac{(1-\eta_0)}{\eta_0}}} \right) \right\} \right] \quad (2.138)$$

ดังนั้นหาค่าอัตราทรุดตัวทันทีได้

$$U_{\rho}(0) = (1-\eta_0) \times 100\% \quad \text{เมื่อ } q=0 \quad (2.139)$$

$$U_{\rho}(0) = \frac{(1-\eta_0)}{\beta\eta_0} \left[\beta - \frac{(1-\eta_0)}{\eta_0} \ln|1+\beta\eta_0| \right] \left(\frac{2}{2+\beta} \right) \times 100\% \quad \text{เมื่อ } q=1 \quad (2.140)$$

$$U_{\rho}(0) = \frac{(1-\eta_0)}{\beta\eta_0} \left[\beta + \sqrt{\frac{(1-\eta_0)}{\eta_0}} \left\{ \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{(1-\eta_0)}{\eta_0}}} \right) - \arctan \left(\frac{(1+\beta)}{\sqrt{\frac{(1-\eta_0)}{\eta_0}}} \right) \right\} \right] \left(\frac{3}{3+3\beta+\beta^2} \right) \times 100\% \quad \text{เมื่อ } q=2 \quad (2.141)$$

$$\bullet \text{ กรณี } m_v(z) = m_{v0} \left\{ 1 + (1+\beta)^q - \left[1 + \beta \left(1 - \frac{z}{H} \right) \right]^q \right\}$$

$$\int_0^1 m_v(Z) dZ = \int_0^1 \left\{ 1 + (1+\beta)^q - [1 + \beta(1-Z)]^q \right\} dZ \quad (2.142)$$

หาปริพันธ์ได้

$$\int_0^1 m_v(Z) dZ = 1 + (1+\beta)^q + \frac{1}{\beta(q+1)} [1 - (1+\beta)^{q+1}] \quad (2.143)$$

$$\text{หรือ } \int_0^1 m_v(Z) dZ = \frac{1}{\beta(q+1)} \{ \beta(q+1) + 1 + [\beta q - 1](1+\beta)^q \} \quad (2.144)$$

$$\therefore \int_0^1 [1 - \eta(Z)] m_v(Z) dZ = (1-\eta_0) \int_0^1 \frac{m_v(Z)}{m_v(Z)\eta_0 + (1-\eta_0)} dZ \quad (2.145)$$

$$\text{หรือ } \int_0^1 [1 - \eta(Z)] m_v(Z) dZ = (1-\eta_0) \int_0^1 \frac{1 + (1+\beta)^q - [1 + \beta(1-Z)]^q}{\eta_0 \{ 1 + (1+\beta)^q - [1 + \beta(1-Z)]^q \} + (1-\eta_0)} dZ \quad (2.146)$$

- ถ้า $q=0$

$$\int_0^1 [1 - \eta(Z)] m_v(Z) dZ = (1-\eta_0) \int_0^1 \frac{1}{\eta_0 + (1-\eta_0)} dZ = (1-\eta_0) \quad (2.147)$$

- ถ้า $q=1$

$$\int_0^1 [1 - \eta(Z)] m_v(Z) dZ = (1-\eta_0) \int_0^1 \frac{(1+\beta Z)}{\eta_0(1+\beta Z) + (1-\eta_0)} dZ \quad (2.148)$$

$$\text{โดยที่ } \int_0^1 \frac{(1+\beta Z)}{\eta_0(1+\beta Z)+(1-\eta_0)} dZ = \frac{1}{\beta} \int_{Z=0}^{Z=1} \frac{(1+\beta Z)}{\eta_0(1+\beta Z)+(1-\eta_0)} d(1+\beta Z) \quad (2.149)$$

หาปริพันธ์ได้

$$\int_0^1 \frac{(1+\beta Z)}{\eta_0(1+\beta Z)+(1-\eta_0)} dZ = \frac{1}{\beta \eta_0} \left[\beta - \frac{(1-\eta_0)}{\eta_0} \ln|1+\beta \eta_0| \right] \quad (2.150)$$

$$\therefore \int_0^1 [1-\eta(Z)] m_v(Z) dZ = (1-\eta_0) \int_0^1 \frac{(1+\beta Z)}{\eta_0(1+\beta Z)+(1-\eta_0)} dZ \quad (2.151)$$

$$\text{หรือ } \int_0^1 [1-\eta(Z)] m_v(Z) dZ = \frac{(1-\eta_0)}{\beta \eta_0} \left[\beta - \frac{(1-\eta_0)}{\eta_0} \ln|1+\beta \eta_0| \right] \quad (2.152)$$

- ถ้า $q=2$

$$\int_0^1 [1-\eta(Z)] m_v(Z) dZ = (1-\eta_0) \int_0^1 \frac{1+(1+\beta)^2 - [1+\beta(1-Z)]^2}{\eta_0 \{1+(1+\beta)^2 - [1+\beta(1-Z)]^2\} + (1-\eta_0)} dZ \quad (2.153)$$

หาปริพันธ์ได้

$$\int_0^1 [1-\eta(Z)] m_v(Z) dZ = \frac{(1-\eta_0)}{\beta \eta_0} \left[[1+\beta(1-Z)]_0^1 - \int_{Z=0}^{Z=1} \frac{\left(\frac{1-\eta_0}{\eta_0} \right)}{\left\{ 1+(1+\beta)^2 - [1+\beta(1-Z)]^2 \right\} + \frac{(1-\eta_0)}{\eta_0}} d[1+\beta(1-Z)] \right] \quad (2.154)$$

โดยที่

$$\int_{Z=0}^{Z=1} \frac{\left(\frac{1-\eta_0}{\eta_0} \right)}{\left\{ 1+(1+\beta)^2 - [1+\beta(1-Z)]^2 \right\} + \frac{(1-\eta_0)}{\eta_0}} dZ = \frac{1-\eta_0}{\eta_0} \int_{Z=0}^{Z=1} \frac{1}{\left\{ 1+(1+\beta)^2 + \frac{(1-\eta_0)}{\eta_0} \right\} - [1+\beta(1-Z)]^2} d[1+\beta(1-Z)] \quad (2.155)$$

$$= \frac{1-\eta_0}{\eta_0} \frac{1}{\sqrt{1+(1+\beta)^2 + \left(\frac{1-\eta_0}{\eta_0} \right)}} \int_{Z=0}^{Z=1} \frac{1}{1 - \left(\frac{[1+\beta(1-Z)]}{\sqrt{1+(1+\beta)^2 + \left(\frac{1-\eta_0}{\eta_0} \right)}} \right)^2} d \left(\frac{[1+\beta(1-Z)]}{\sqrt{1+(1+\beta)^2 + \left(\frac{1-\eta_0}{\eta_0} \right)}} \right) \quad (2.156)$$



$$\beta = -0.2 : 0 \leq \eta_0 \leq 1 ; 0.8 \leq \eta_0 \leq 1.0 ; \therefore 0 < \frac{[1 + \beta(1 - Z)]}{\sqrt{1 + (1 + \beta)^2 + \left(\frac{1 - \eta_0}{\eta_0}\right)}} < 1$$

$$\begin{aligned} \text{โดยที่} \int_{Z=0}^{Z=1} \frac{1}{1 - \frac{[1 + \beta(1 - Z)]}{\sqrt{1 + (1 + \beta)^2 + \left(\frac{1 - \eta_0}{\eta_0}\right)}}}^2 d \left(\frac{[1 + \beta(1 - Z)]}{\sqrt{1 + (1 + \beta)^2 + \left(\frac{1 - \eta_0}{\eta_0}\right)}} \right) \\ = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1 + \frac{[1 + \beta(1 - Z)]}{\sqrt{1 + (1 + \beta)^2 + \left(\frac{1 - \eta_0}{\eta_0}\right)}}}{1 - \frac{[1 + \beta(1 - Z)]}{\sqrt{1 + (1 + \beta)^2 + \left(\frac{1 - \eta_0}{\eta_0}\right)}}} \right]_{Z=0}^{Z=1} \end{aligned} \quad (2.157)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \ln \left[\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{1 + (1 + \beta)^2 + \left(\frac{1 - \eta_0}{\eta_0}\right)}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (1 + \beta)^2 + \left(\frac{1 - \eta_0}{\eta_0}\right)}}} \right] - \ln \left[\frac{1 + \frac{[1 + \beta]}{\sqrt{1 + (1 + \beta)^2 + \left(\frac{1 - \eta_0}{\eta_0}\right)}}}{1 - \frac{[1 + \beta]}{\sqrt{1 + (1 + \beta)^2 + \left(\frac{1 - \eta_0}{\eta_0}\right)}}} \right] \right\} \quad (2.158)$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^1 [1 - \eta(Z)] m_v(Z) dZ \\ = \frac{(1 - \eta_0)}{\beta \eta_0} \left[\beta + \left(\frac{1 - \eta_0}{\eta_0} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + (1 + \beta)^2 + \left(\frac{1 - \eta_0}{\eta_0}\right)}} \right] \frac{1}{2} \left\{ \ln \left[\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{1 + (1 + \beta)^2 + \left(\frac{1 - \eta_0}{\eta_0}\right)}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (1 + \beta)^2 + \left(\frac{1 - \eta_0}{\eta_0}\right)}}} \right] - \ln \left[\frac{1 + \frac{[1 + \beta]}{\sqrt{1 + (1 + \beta)^2 + \left(\frac{1 - \eta_0}{\eta_0}\right)}}}{1 - \frac{[1 + \beta]}{\sqrt{1 + (1 + \beta)^2 + \left(\frac{1 - \eta_0}{\eta_0}\right)}}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.159)$$

ดังนั้นจะสามารถหาค่าอัตราการทรุดตัวทันที

$$U_{\rho}(0) = (1-\eta_0) \times 100\% \quad \text{เมื่อ } q = 0 \quad (2.160)$$

$$U_{\rho}(0) = \frac{(1-\eta_0)}{\beta\eta_0} \left[\beta - \frac{(1-\eta_0)}{\eta_0} \ln|1+\beta\eta_0| \right] \left(\frac{2}{2+\beta} \right) \times 100\% \quad \text{เมื่อ } q = 1 \quad (2.161)$$

$$U_{\rho}(0) = \frac{(1-\eta_0)}{\beta\eta_0} \left[\beta + \left(\frac{1-\eta_0}{\eta_0} \right) \frac{1}{\sqrt{1+(1+\beta)^2 + \left(\frac{1-\eta_0}{\eta_0} \right)}} \right] \times$$

$$\left(\frac{1}{2} \right) \left\{ \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{1+(1+\beta)^2 + \left(\frac{1-\eta_0}{\eta_0} \right)}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{1+(1+\beta)^2 + \left(\frac{1-\eta_0}{\eta_0} \right)}}} \right) - \ln \left(\frac{1 + \frac{[1+\beta]}{\sqrt{1+(1+\beta)^2 + \left(\frac{1-\eta_0}{\eta_0} \right)}}}{1 - \frac{[1+\beta]}{\sqrt{1+(1+\beta)^2 + \left(\frac{1-\eta_0}{\eta_0} \right)}}} \right) \right\} \left(\frac{3}{3+3\beta+2\beta^2} \right) \times 100\%$$

เมื่อ $q = 2$ (2.162)

กรณี $t > 0$: อัตราการทรุดตัวที่เวลาใดๆ กำหนดได้ในรูป $U_{\rho}(T)$

$$U_{\rho}(T) = \frac{\rho_c(t)}{\rho_c(\infty)} \times 100\% = \frac{\int_0^H [q_s - u(z, t)] m_v(z) dz}{\int_0^H [q_s - 0] m_v(z) dz} \times 100\% \quad (2.163)$$

เปลี่ยนตัวแปร

$$Z = \frac{z}{H}$$

$$t = \frac{TH^2 \gamma_w m_v(z)}{k(z)}$$

$$U_{\rho}(T) = \frac{\int_0^1 [1 - U(Z, T)] m_v(Z) dZ}{\int_0^1 m_v(Z) dZ} \times 100\% \quad (2.164)$$

$$U_{\rho}(T) = \left(1 - \frac{\beta(q+1)}{\{(1+\beta)^{q+1} - 1\}} \int_0^1 U(Z, T) m_v(z) dZ \right) \times 100\% \quad (2.165)$$

- กรณี $m_v(z) = m_{v0} \left\{ 1 + \beta \frac{z}{H} \right\}^q$

$$\begin{aligned} \int_0^1 m_v(Z) dZ &= \int_0^1 \{1 + \beta Z\}^q dZ \\ &= \frac{1}{\beta} \int_0^1 \{1 + \beta Z\}^q d(\beta Z) \\ &= \frac{1}{\beta} \{1 + \beta Z\}^{q+1} \frac{1}{(q+1)} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{\beta(q+1)} \{(1 + \beta)^{q+1} - 1\} \end{aligned}$$

- ถ้า $q=0$

$$U_\rho(T) = \left(1 - \frac{\beta}{\{(1 + \beta) - 1\}} \int_0^1 U(Z, T) m_v(z) dZ \right) \times 100 \% \quad (2.165)$$

- ถ้า $q=1$

$$U_\rho(T) = \left(1 - \frac{2\beta}{\{(1 + \beta)^3 - 1\}} \int_0^1 U(Z, T) m_v(z) dZ \right) \times 100 \% \quad (2.166)$$

- ถ้า $q=2$

$$U_\rho(T) = \left(1 - \frac{3\beta}{\{(1 + \beta)^4 - 1\}} \int_0^1 U(Z, T) m_v(z) dZ \right) \times 100 \% \quad (2.167)$$

- กรณี $m_v(z) = m_{v0} \left\{ 1 + (1 + \beta)^q - \left[1 + \beta \left(1 - \frac{z}{H} \right) \right]^q \right\}$

$$\int_0^1 m_v(Z) dZ = \int_0^1 \{ 1 + (1 + \beta)^q - [1 + \beta(1 - Z)]^q \} dZ$$

หาปริพันธ์ได้

$$\int_0^1 m_v(Z) dZ = \frac{1}{\beta(q+1)} \{ \beta(q+1) + 1 + [\beta q - 1](1 + \beta)^q \} \quad (2.168)$$

$$\therefore U_\rho(T) = \frac{\int_0^1 [1 - U(Z, T)] m_v(Z) dZ}{\int_0^1 m_v(Z) dZ} \times 100\% \quad (2.169)$$

$$\text{หรือ } U_{\rho}(T) = \left(1 - \frac{\beta(q+1)}{\{\beta(q+1)+1+[\beta q-1](1+\beta)^q\}} \int_0^1 U(Z,T)m_v(Z)dZ \right) \times 100\% \quad (2.170)$$

- ถ้า $q=0$

$$U_{\rho}(T) = \left(1 - \int_0^1 U(Z,T)m_v(Z)dZ \right) \times 100\% \quad (2.171)$$

- ถ้า $q=1$

$$U_{\rho}(T) = \left(1 - \frac{2\beta}{\{2\beta+1+(\beta-1)(1+\beta)\}} \int_0^1 U(Z,T)m_v(Z)dZ \right) \times 100\% \quad (2.172)$$

- ถ้า $q=2$

$$U_{\rho}(T) = \left(1 - \frac{3\beta}{\{3\beta+1+(2\beta-1)(1+\beta)^2\}} \int_0^1 U(Z,T)m_v(Z)dZ \right) \times 100\% \quad (2.173)$$

หาปริพันธ์ $\int_0^1 U(Z,T)m_v(Z)dZ$ โดยวิธีเชิงตัวเลขของซิมป์สัน (Simpson)