

บทที่ 2

ทฤษฎีและผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 หลักการออกแบบโครงสร้างอาคารรับแรงแผ่นดินไหว

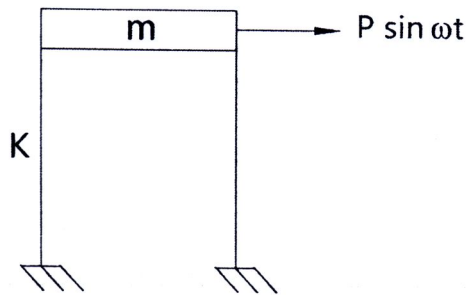
หลักการออกแบบอาคารทางวิศวกรรมโยธาจะต้องคำนึงถึงปลอดภัยและความประหยัด หลักการออกแบบโครงสร้างรับแรงแผ่นดินไหวที่สำคัญเป็นดังนี้

- 2.1.1. โครงสร้างเมื่อรับแรงแผ่นดินไหวระดับเล็ก โครงสร้างอาคารทั้งหมดต้องไม่ได้รับความเสียหาย
- 2.1.2. โครงสร้างเมื่อรับแรงแผ่นดินไหวระดับกลาง โครงสร้างอาคารส่วนที่รับแรงไม่ได้รับความเสียหาย โครงสร้างส่วนที่ไม่ได้รับแรงอนุญาตให้เสียหายได้ เช่น ผนัง กำแพง ฯ
- 2.1.3. โครงสร้างเมื่อรับแรงแผ่นดินไหวระดับใหญ่ โครงสร้างอาคารบางส่วนที่รับแรงอนุญาตให้เสียหายได้แต่โครงสร้างอาคารต้องไม่วิบัติ

แผ่นดินไหวระดับใหญ่มักเป็นสิ่งที่มีโอกาสเกิดขึ้นน้อยมาก การออกแบบจึงกำหนดให้อาคารทุกอาคารรับแรงแผ่นดินไหวระดับนี้อาคารอาจใช้งานต่อไปได้แต่ต้องไม่เกิดการวิบัติเพื่อผู้ใช้สอยอาคารสามารถออกจากอาคารได้ทัน

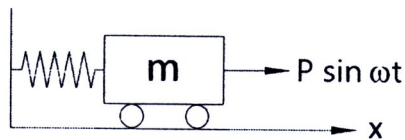
ประเทศไทยไม่ค่อยมีแผ่นดินไหว จึงมีสองแนวคิดความคิดเกี่ยวกับการออกแบบอาคารรับแรงแผ่นดินไหว แนวคิดแรกคือไม่จำเป็นต้องออกแบบอาคารรับแรงแผ่นดินไหวเพราะทำให้สิ้นเปลือง แนวคิดที่สองคิดว่าจำเป็นต้องออกแบบอาคารรับแรงแผ่นดินไหวเพราะถ้าเกิดแผ่นดินไหวขึ้นจะทำให้ประชาชนเสียชีวิตเหมือนประเทศเม็กซิโกหรือเฮติ ส่วนแนวคิดผู้วิจัยคือถ้าสามารถทำให้อาคารรับแรงแผ่นดินไหวระดับใหญ่ได้โดยอาคารไม่วิบัติและไม่มีสิ้นเปลืองค่าใช้จ่ายมากนัก ควรจะเป็นสิ่งที่ดี การใช้มวลหน่วงปรับค่าสลายพลังงานแรงแผ่นดินไหวเป็นวิธีหนึ่งที่ประหยัดและนิยมใช้กันแพร่หลาย การวิเคราะห์โครงสร้างที่ติดตั้งมวลหน่วงปรับค่าพิเศษจะมีการทำแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อให้เข้าใจง่าย ตามที่จะกล่าวต่อไปนี้

2.2 แบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ของระบบพลวัต



รูปที่ 2.1 โครงสร้างอาคารหนึ่งชั้น

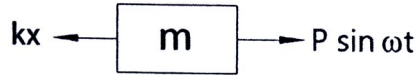
รูปที่ 2.1 รูปอาคารชั้นเดียวซึ่งมีมวล m และความแข็งแรงต้านทานการเคลื่อนที่ของเสาเท่ากับ k รับแรงกระทำแบบคาบที่หลังคาเท่ากับ $P \sin \omega t$ สามารถจำลองเป็นแบบจำลองคณิตศาสตร์ตามรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 แบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ของโครงสร้างอาคารหนึ่งชั้นในรูปที่ 2.1

รูปที่ 2.2 แสดงแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ของระบบพลวัตของอาคารรูปที่ 2.1 โดยที่ค่าต้านทานการเคลื่อนที่ของเสาถูกแทนด้วยสปริง k อาคารถูกแทนด้วยมวล m และแรงกระทำที่กระทำต่ออาคารคือ $P \sin \omega t$ โดยที่กำหนดให้แกนในแนวระดับคือแกน x เคลื่อนที่ไปทางขวาเป็นบวก

2.3 สมการเชิงอนุพันธ์ของโครงสร้างรับแรงพลวัตโดยอาศัยกฎข้อที่หนึ่งของนิวตัน



รูปที่ 2.3 แรงที่สปริงและแรงกระทำแบบคาบกระทำต่อมวล m

รูปที่ 2.3 แสดงถึงแรงที่กระทำต่อมวล m ของรูปที่ 2.2 เมื่อมวลเคลื่อนที่ไปทางขวาเป็นระยะ x เนื่องจากแรงกระทำ $P \sin \omega t$ และสปริงจะมีแรงดึงในทิศทางต้านทานการเคลื่อนที่เท่ากับ kx

จากรูปที่ 2.3 แบบจำลองรับแรงกระทำ $P \sin \omega t$ จะทำให้มีแรงสปริง kx แรงเฉื่อย $m\ddot{x}$ ต้านทานการเคลื่อนที่ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\text{จาก } \sum F_x = ma$$

จะได้

$$P \sin \omega t - kx = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx = P \sin \omega t$$

2.1

เมื่อ

- m คือน้ำหนักของโครงสร้าง
- x คือการเคลื่อนที่ของโครงสร้าง
- k คือค่าสปริงของโครงสร้าง
- P คือขนาดของแรงกระทำแบบคาบ
- t คือเวลา
- ω คือความเร็วเชิงมุมของแรงกระทำ

กำหนดให้

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ คือความเร็วเชิงมุมของโครงสร้าง}$$

$$X_{st} = \frac{P}{k} \text{ คือขนาดการเคลื่อนที่แบบสถิตย์}$$

เมื่อหารสมการที่ 2.1 ด้วย m จะได้

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{Pk}{km}\sin(\omega t) \quad \text{หรือ} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = X_{st}\omega_0^2 \sin(\omega t) \quad 2.2$$

คำตอบเจาะจงเฉพาะของสมการที่ 2.2 จะได้

$$x = \left(\frac{A_0 \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \sin(\omega t) = \frac{A_0}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)} \sin(\omega t) \quad 2.3$$

ตามทฤษฎีของโครงสร้างทั่วไปแรงภายในของโครงสร้างจะแปรผันตรงการเคลื่อนที่ x

$$F_i = k_i x$$

เมื่อ F_i คือแรงภายในของโครงสร้าง

k_i คือสติฟเฟนซ์ของโครงสร้าง

เมื่อ x การเคลื่อนที่พลศาสตร์มีขนาดเป็น $\frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)}$ เท่าของขนาดของการเคลื่อนที่

สถิตย X_{st} ทำให้แรงภายในของโครงสร้างต้องรับมากเป็นจำนวนเท่าของการเคลื่อนที่สถิตยนั้นด้วย โดยเฉพาะเมื่อความเร็วเชิงมุมของแรงกระทำ กับ ความเร็วเชิงมุมของธรรมชาติเท่ากันจะทำให้ส่วนหารเป็นศูนย์หรือเกิดการเคลื่อนที่มากเรียกว่าเกิดการสั่นพ้องซึ่งจะทำให้โครงสร้างอาคารพังได้ง่ายแม้ว่าแรงกระทำจะน้อยก็ตาม สามารถแก้ไขได้โดยใช้มวลหน่วง

2.4 มวลหน่วง

ระบบควบคุมการสั่นไหวของโครงสร้างที่ใช้งานในอาคารมีหลายประเภท ในการศึกษานี้จะกล่าวถึงระบบที่ใช้มวลหน่วง 3 ระบบที่สำคัญคือ

2.4.1 มวลหน่วงปรับค่าแบบพาสซีฟ เป็นวิธีที่ให้มวลหน่วงสลายพลังงานของโครงสร้าง โดยทั่วไปจะนำระบบมวลหน่วงไปติดตั้งที่ชั้นบนสุดของอาคารเมื่อโครงสร้างเกิดการสั่นไหว พลังงานบางส่วน of โครงสร้างหลักจะถูกถ่ายทอดสู่ระบบมวลหน่วงซึ่งจะทำให้มวลหน่วงสั่น ซึ่งเป็นการทำให้พลังงานการสั่นของโครงสร้างหลักลดลง

2.4.2 มวลหน่วยแบบแอกทีฟ เป็นวิธีการควบคุมการสั่นไหวของโครงสร้างหลัก โดยการให้แรงภายนอกกระทำแก่โครงสร้าง โดยทั่วไปจะนำระบบดังกล่าวไปติดตั้งที่ชั้นบนสุดของอาคาร เมื่อโครงสร้างเกิดการสั่นไหว ตัวออกแรงกระทำจะออกแรงกระทำแก่โครงสร้างโดยที่แรงนี้มีผลต่อการสั่นของโครงสร้างโดยตรง ทั้งนี้การให้แรงดังกล่าวสามารถทำให้โครงสร้างมีค่าพารามิเตอร์เปลี่ยนไปได้ทั้งด้านความถี่และความหน่วง การให้แรงที่เหมาะสมจะทำให้โครงสร้างมีการสั่นที่น้อยลงได้ โดยค่าแรงที่เหมาะสมนี้จะคำนวณจากสภาพการสั่นไหวของโครงสร้างในขณะนั้นๆ ด้วย

2.4.3 มวลหน่วยปรับค่าแบบแอกทีฟ การควบคุมการสั่นไหวระบบมวลหน่วยปรับค่าแบบแอกทีฟเป็นวิธีการควบคุมการสั่นไหวของโครงสร้างหลัก โดยการให้แรงภายนอกกระทำแก่โครงสร้าง โดยทั่วไปจะนำระบบดังกล่าวไปติดตั้งที่ชั้นบนสุดของอาคาร เป็นการผสมกันระหว่างมวลหน่วยปรับค่าแบบพาสซีฟกับมวลหน่วยแบบแอกทีฟ

มวลหน่วยแบบแอกทีฟมีประสิทธิภาพสูงสุดในการต้านทานแรงกระทำแผ่นดินไหวเพราะจะวิเคราะห์แรงกระทำของมวลหน่วยต่ออาคารจะเครื่องตรวจวัดสัญญาณเคลื่อนแผ่นดินไหว รองลงมาคือมวลหน่วยปรับค่าแบบแอกทีฟสุดท้ายมวลหน่วยปรับค่าแบบพาสซีฟมีประสิทธิภาพน้อยที่สุดเนื่องจากบางความถี่ของแรงกระทำมวลหน่วยปรับค่าแบบพาสซีฟจะไม่ทำงาน มวลหน่วยแบบแอกทีฟและมวลหน่วยปรับค่าแบบแอกทีฟมีราคาสูงไม่เหมาะสมสำหรับการนำมาติดตั้งในบ้านพักอาศัยทั่วไป มวลหน่วยปรับค่าแบบพาสซีฟราคาถูกเป็นอีกทางเลือกหนึ่งสำหรับการติดตั้งในบ้านพักอาศัยทั่วไปแต่ต้องปรับปรุงเพื่อให้มีประสิทธิภาพต่อทุกความถี่ของแรงแผ่นดินไหว

2.5 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Den Hartog (1947) ได้เสนอแนวคิดของการใช้มวลหน่วยติดตั้งเข้ากับโครงสร้างอาคารในการลดการสั่นไหวของอาคาร โดยเสนอว่าการติดตั้งมวลหน่วยที่ปรับค่าแบบพาสซีฟที่เหมาะสม ช่วยเพิ่มความหน่วงให้กับโครงสร้างหลัก และทำให้โครงสร้างหลักมีการสั่นลดลง

Jagadish (1979) ศึกษาถึงประสิทธิภาพของมวลหน่วงปรับค่าในการลดการสั่นไหวของโครงสร้างหลัก โดยจำลองโครงสร้างของอาคารสูง 2 ชั้นที่มีพฤติกรรมเป็นแบบไบลิเนียให้เป็นโครงสร้างหลักที่ชั้นล่างและเป็นระบบมวลหน่วงปรับค่าที่ชั้นบน กำหนดให้อัตราส่วนของมวลหน่วงปรับค่ามีค่าเท่ากับ 30 และ 100 เปอร์เซ็นต์ของมวลโครงสร้างหลัก พบว่ามวลหน่วงปรับค่าที่มีประสิทธิภาพในการลดการสั่นไหวของโครงสร้างที่รับแรงแผ่นดินไหวนี้ได้เป็นอย่างดี เพราะสามารถลดความเหนียวที่ต้องการของโครงสร้างหลักได้ถึง 50 เปอร์เซ็นต์

Sladek, J.R. และ Klingner, R.E. (1983) ทำการศึกษาเพื่อหาประสิทธิภาพในการลดการสั่นไหวของโครงสร้างภายใต้สัญญาณแผ่นดินไหวโดยใช้มวลหน่วงปรับค่า โดยแบบจำลองตัวอย่างอาคารมีความสูง 8 ชั้น ความถี่ธรรมชาติเท่ากับ 1.90 วินาที มีพฤติกรรมในช่วงอีลาสติกและอินอีลาสติกที่มีจุดหมุนที่ปลายเสาแต่ละชั้น ส่วนพารามิเตอร์ของมวลหน่วงปรับค่าใช้ตามความสัมพันธ์ที่เสนอโดย Den Hartog ที่มีอัตราส่วนของมวลเท่ากับ 2.6 เปอร์เซ็นต์เทียบกับมวลในโหมดที่ 1 ของโครงสร้าง ภายใต้สัญญาณแผ่นดินไหว Elcentro 1940 ในแนว N-S เป็นระยะเวลา 30 วินาที และใช้โปรแกรม DRAIN 2D ในการวิเคราะห์ผล พบว่าประสิทธิภาพของมวลหน่วงปรับค่าในการลดการสั่นไหวไม่สามารถลดค่าการกระจัดสูงสุดของโครงสร้างได้ ทั้งนี้จากพฤติกรรมการสั่นไหวของมวลปรับค่าที่ขึ้นกับการเคลื่อนที่ของโครงสร้าง ทำให้ต้องอาศัยระยะเวลาหนึ่งก่อนที่จะเริ่มทำงานอย่างมีประสิทธิภาพ ดังนั้นเมื่อเกิดการสั่นไหวในช่วงเวลาสั้นๆ มวลหน่วงปรับค่าจะไม่สามารถลดการสั่นไหวของโครงสร้างหลักได้

Jara, J.M. (1996) ศึกษาหาประสิทธิภาพในการลดการสั่นไหวของโครงสร้างระบบ SDOF ที่มีพฤติกรรมอีลาสติก-พลาสติกภายใต้สัญญาณแผ่นดินไหวที่ประเทศเม็กซิโกเมื่อปี 1985 โดยใช้ระบบมวลหน่วงปรับค่า กำหนดให้โครงสร้างมีอัตราส่วนความเหนียวเท่ากับ 2 และ 4 ส่วนมวลหน่วงปรับค่ามีอัตราส่วนความเหนียวเท่ากับ 6 และมีพารามิเตอร์เป็นค่าต่างๆ โดยไม่ได้ใช้ตามความสัมพันธ์ที่เสนอโดย Den Hartog คลื่นสัญญาณแผ่นดินไหวคือ SCT-EW, TACUBAYA-EW และ VIVEROS-EW ซึ่งแตกต่างกันตามลักษณะของชั้นดินอ่อน ปานกลาง และแข็งตามลำดับ และวิเคราะห์หาการตอบสนองของโครงสร้างโดยใช้โปรแกรม DRAIN-2DX พบว่า มวลหน่วงปรับค่ามีประสิทธิภาพในการลดค่าการกระจัดสูงสุดของโครงสร้างได้มากถึง 25-40 เปอร์เซ็นต์ ในกรณีที่โครงสร้างมีอัตราส่วนความเหนียวเท่ากับ 4 และ

อัตราส่วนของมวลหน่วยปรับค่าเท่ากับ 4-6 เปอร์เซ็นต์ แต่สำหรับพารามิเตอร์อื่นๆของมวลหน่วยปรับค่าจะไม่สามารถลดการสั่นไหวได้ เนื่องจากมวลหน่วยปรับค่ามีสภาพอินอีลาสติกก่อนที่จะทำงานได้เต็มที่ ดังนั้นทำให้ประสิทธิภาพของมวลหน่วยปรับค่าลดลง

Abe M. (1996) ทำการศึกษาถึงประสิทธิภาพในการลดการสั่นไหวของมวลหน่วยปรับค่าที่มีพฤติกรรมแบบไบลิเนียร์ต่อโครงสร้างที่มีพฤติกรรมแบบไบลิเนียร์เช่นกันแต่มีการกระตุ้นที่จุดครากต่างกัน โดยขึ้นอยู่กับสัดส่วนของอัตราส่วนขนาดของการเคลื่อนที่มวลหน่วยปรับค่าต่อขนาดการเคลื่อนที่ของโครงสร้าง พบว่ามวลหน่วยปรับค่าที่มีพฤติกรรมไบลิเนียร์มีประสิทธิภาพในการลดการสั่นไหวของโครงสร้างทุกระดับการเกิดแผ่นดินไหว

Brito, R.S. และ Ruiz, S.E. (1999) ทำการศึกษหาประสิทธิภาพในการลดการสั่นไหวของอาคารภายใต้สัญญาณแผ่นดินไหวขนาดปานกลางและรุนแรงโดยใช้มวลหน่วยปรับค่าอาคารตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาเป็นอาคารคอนกรีตเสริมเหล็กสูง 22 ชั้น กว้าง 4 ช่วงคานมีพฤติกรรมไร้เชิงเส้น โดยมวลหน่วยปรับค่ามีค่าอัตราส่วนมวลเท่ากับ 1,3 และ 5 เปอร์เซ็นต์ สัมประสิทธิ์ความหน่วงเท่ากับ 5, 20 และ 30 เปอร์เซ็นต์ อัตราส่วนความถี่เท่ากับ 0.6-1.4 สำหรับสัญญาณแผ่นดินไหวใช้คลื่นที่วัดได้ที่ประเทศเม็กซิโก SCT-85 และ SCT-89 ที่มีระดับความรุนแรงสูงและปานกลางตามลำดับ พบว่าประสิทธิภาพของมวลหน่วยปรับค่าจะมีค่าลดลงเมื่อโครงสร้างมีพฤติกรรมเลยช่วงอีลาสติก เห็นได้จากประสิทธิภาพของมวลหน่วยปรับค่าในกรณีที่มีสัญญาณแผ่นดินไหวระดับความรุนแรงปานกลางดีกว่าในกรณีที่สัญญาณแผ่นดินไหวที่มีระดับความรุนแรงสูง เนื่องจากพฤติกรรมของโครงสร้างภายใต้สัญญาณแผ่นดินไหวที่มีระดับปานกลางยังคงอยู่ในช่วงอีลาสติก

พงษ์ธร จาญพจน์ (2543) ได้ศึกษาประสิทธิภาพของมวลหน่วยปรับค่าแบบพาสซีฟในการลดการสั่นไหวและความเสียหายของโครงสร้างที่มีความอิสระดักเดียวและมีพฤติกรรมแบบอีลาสโต-พลาสติกภายใต้การเคลื่อนที่บริเวณฐานแบบฮาร์โมนิก จากการศึกษาพบว่าประสิทธิภาพของมวลหน่วยปรับค่ากับระบบมวลหน่วยปรับค่าแบบหลายหน่วยและระบบมวลหน่วยปรับค่าแบบกึ่งแอคทีฟ พบว่าระบบมวลหน่วยปรับค่าแบบกึ่งแอคทีฟมีประสิทธิภาพสูงสุด

พินิต บุญยัง (2544) ได้ศึกษาผลกระทบของการเปลี่ยนรูปแบบอินอีลาสติกต่อสมรรถนะของมวลหน่วยปรับค่าแบบแอคทีฟ และใช้โปรแกรมวิเคราะห์พบว่ามวล

หน่วยปรับค่าแบบแอคทีฟมีประสิทธิภาพมากในการลดการเปลี่ยนตำแหน่งที่ชั้นบนสุดเมื่อเปรียบเทียบกับมวลหน่วยปรับค่าแบบพาสซีฟ แม้ว่าประสิทธิภาพนี้จะไม่ลดลงมากภายใต้แผ่นดินไหวที่รุนแรงแต่กลับพบว่าความเสียหายในอาคารที่ติดตั้งมวลหน่วยปรับค่าแบบแอคทีฟมีค่ามากกว่าอาคารที่ไม่ติดตั้งระบบ ระบบควบคุมและอาคารที่ติดตั้งมวลหน่วยปรับค่าแบบพาสซีฟ สมรรถนะในการควบคุมการสั่นไหวที่ไม่พึงประสงค์เกิดมาจากการเปลี่ยนพฤติกรรมอย่างมากของอาคารและอัลกอริทึมในการควบคุมซึ่งไม่พิจารณาความเสียหายในการออกแบบมั่นคง

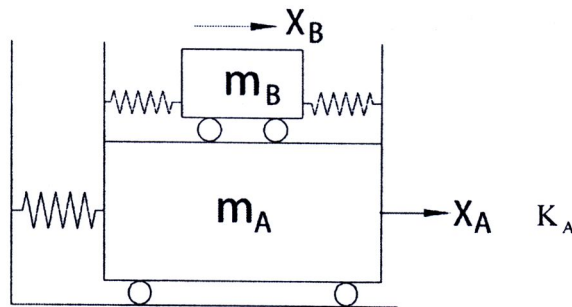
2.6 สมการเชิงอนุพันธ์ของมวลหน่วยปรับค่าแบบพาสซีฟและมวลหน่วยปรับค่าพิเศษ

2.6.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของมวลหน่วยปรับค่าแบบพาสซีฟ

การวิเคราะห์หาขนาดผลตอบสนองของโครงสร้าง ที่มีมวลหน่วยปรับค่าภายใต้แรงกระทำเป็นคาบ ซึ่งหาได้จากหนังสือวิเคราะห์ความสั่นสะเทือนทั่วไป พิจารณารูปที่ 2.4 โครงสร้างหลักมวล m_A มีสติฟเนส K_A และมีมวลหน่วย m_B มีสติฟเนส K_B ไม่คำนึงถึงผลของความหน่วงในโครงสร้างหลัก A และมวลหน่วย B รับแรงการกระทำแบบคาบ $F \sin(\omega t)$ สมการที่ได้เป็นดังนี้

$$m_A \ddot{X}_A + K_A X_A + K_B X_A - K_B X_B = F \sin(\omega t) \quad 2.4$$

$$m_B \ddot{X}_B + K_B X_B - K_B X_A = 0 \quad 2.5$$



รูปที่ 2.4 แบบจำลองดีกรีอิสระเดียวแบบมีมวลหน่วยแบบพาสซีฟ

คำตอบของสมการ 2.4 และ 2.5 คือ

$$X_{pA} = \frac{F}{K_A} \left(\frac{\omega_r^2 - \Omega^2}{D_0} \right) \sin(\omega t) \quad 2.6$$

$$X_{PB} = \frac{F}{K_A} \left(\frac{\omega_r^2}{D_0} \right) \sin(\omega t) \quad 2.7$$

โดยที่

F คือขนาดของแรงกระทำ

t คือเวลา

$$m_r = \frac{m_B}{m_A}$$

ω ความเร็วเชิงมุมของแรงกระทำ

X_A ค่าการเคลื่อนที่ของมวล A

X_B ค่าการเคลื่อนที่ของมวล B

ω_A ความเร็วเชิงมุมของมวล A

ω_B ความเร็วเชิงมุมของมวล B

$$\omega_r = \frac{\omega_B}{\omega_A} \text{ อัตราส่วนความเร็วเชิงมุมของมวล } B \text{ ต่อมวล } A$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_A} \text{ อัตราส่วนความเร็วเชิงมุมของแรงกระทำต่อมวล } A$$

$$D_0 = \Omega^4 - [1 + \omega_r^2(1 + m_r)]\Omega^2 + \omega_r^2 \quad 2.8$$

จากสมการที่ 2.6 ค่าการเคลื่อนที่ของมวล A จะมีค่ามากที่สุดเมื่อค่าของ $D_0=0$ จากสมการที่ 2.8 ค่าของ Ω ที่ทำให้ $D_0=0$ คือ

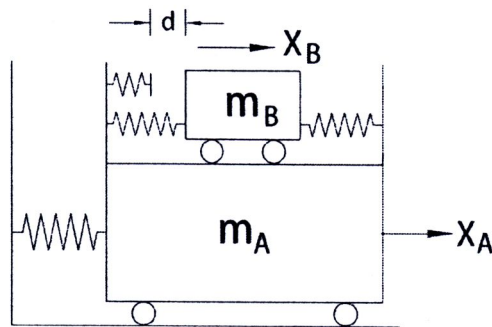
$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\omega_r^2(1 + m_r)}{2}} + \sqrt{\frac{[1 + \omega_r^2(1 + m_r)]^2}{4} - \omega_r^2} \quad 2.9$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\omega_r^2(1 + m_r)}{2}} - \sqrt{\frac{[1 + \omega_r^2(1 + m_r)]^2}{4} - \omega_r^2} \quad 2.10$$

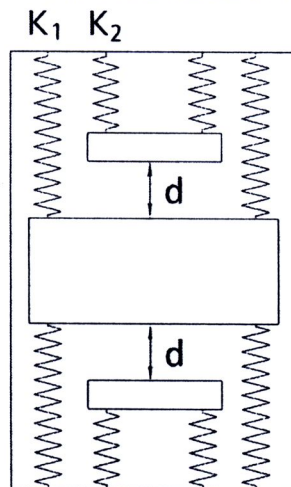
ซึ่งหมายความว่า อัตราส่วนความเร็วเชิงมุมของแรงกระทำต่อมวล A มีค่าเท่ากับ $\Omega_1\omega_A$ หรือ $\Omega_2\omega_A$ จะทำให้เกิดการสั่นพ้องเหมือนกัน $\omega = \Omega_1\omega_A$ หรือ $\omega = \Omega_2\omega_A$ ดังนั้นการติดตั้งมวลห่วงสำหรับโครงสร้างรับแรงกระทำพลศาสตร์จะทำให้เกิดการสั่นพ้องได้ในความถี่ที่ใกล้เคียงกับความถี่ธรรมชาติของโครงสร้าง A ความถี่แรกจะน้อยกว่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้าง A และอีกความถี่หนึ่งจะมากกว่าความถี่ธรรมชาติ

ของโครงสร้าง A หลักการแก้ปัญหาดังกล่าวสามารถทำได้โดยทำให้เกิดเปลี่ยนความถี่ของมวลหนึ่ง เมื่อความถี่ของแรงกระทำเข้าใกล้ความถี่แรก $\omega = \Omega_1 \omega_A$ และความถี่ที่สอง $\omega = \Omega_2 \omega_A$ โครงสร้างก็จะไม่เกิดการสั่นพ้องที่ความถี่ใดๆ มวลหนึ่งของโครงสร้างจึงมีประสิทธิภาพต่อทุกความถี่ของแรงกระทำ จึงทำให้เกิดขนาดของผลตอบสนองน้อยกว่า มวลหนึ่งธรรมดาทั่วไป การเปลี่ยนแปลงความถี่ของมวลหนึ่ง ทำได้โดยการจัดสปริงไว้สองชุด ชุดแรกจะมีค่านิจสปริง K_B และชุดที่สองจะรวมกับชุดแรกทำให้มีค่านิจสปริง K'_B

2.6.2 สมการเชิงอนุพันธ์ของมวลหนึ่งปรับค่าพิเศษ



รูปที่ 2.5.1 มวลหนึ่ง B กับสปริง K_1 และ K_2



รูปที่ 2.5.2 มวลหนึ่ง B กับสปริง K_1 และ K_2 มองจากด้านบน

สามารถเขียนเป็นฟังก์ชันสปริงของมวลหนึ่งปรับค่าพิเศษเป็นดังนี้
กำหนดให้

$$K_B = K_1$$

สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ
ห้องสมุดงานวิจัย
วันที่... 17 พ.ย. 2555
เลขทะเบียน... 248671
เลขเรียกหนังสือ...

$$K'_B = K_1 + K_2$$

จากรูปที่ 2.5.1 มวลหน่วง B จะติดกับสปริง K_1 เมื่อเกิดการเคลื่อนที่สัมผัสกับมวล A ได้ระยะ d คือไปถูกสปริง K_2 จะทำให้มีค่านิจสปริงรวมเท่ากับ K'_B

d คือระยะจากริมของมวล B ถึงสปริง K_2

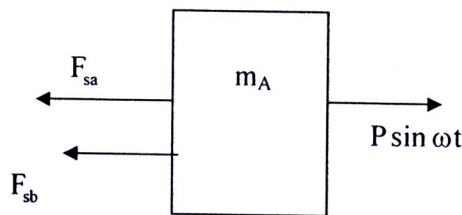
สามารถเขียนค่านิจสปริงของมวลหน่วงเป็นสมการได้ดังนี้

$$K_B = K'_B \quad \text{เมื่อ } |X_A - X_B| > d$$

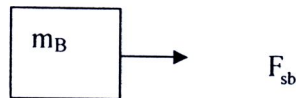
$$K_B = K_B \quad \text{เมื่อ } |X_A - X_B| < d$$

กรณีที่มวลหน่วงไม่สัมผัสกับสปริงที่ 2 คำตอบของสมการจะเป็นดังสมการที่ 2.6

และ 2.7



รูปที่ 2.6.1 แรงที่สปริงและแรงกระทำแบบคาบกระทำต่อมวล A



รูปที่ 2.6.2 แรงที่สปริงกระทำต่อมวล B

สมการกรณีที่มวล B เคลื่อนตัวสัมผัสกับสปริงที่สองจะเป็นดังนี้จากรูปที่ 2.6.1 และ 2.6.2

$\sum F_x = ma$ แสดงเฉพาะแรงเนื่องจากสปริงกับน้ำหนักกระทำแบบคาบสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$F \sin(\omega t) - F_{sa} - F_{sb} = m_A \ddot{X}_A$$

$$F_{sa} = K_A X_A$$

$$F_{sb} = K'_B (X_A - X_B) - (K'_B - K_B) d$$

โดยที่

F_{sa} = แรงกระทำเนื่องจากสปริง A

F_{sb} = แรงกระทำเนื่องจากสปริง B

$$m_A \ddot{X}_A + K_A X_A + K'_B (X_A - X_B) - (K'_B - K_B)d = F \sin(\omega t) \quad 2.11$$

$$F_{sb} = m_B \ddot{X}_B$$

$$m_B \ddot{X}_B + K'_B (X_B - X_A) + (K'_B - K_B)d = 0 \quad 2.12$$

เมื่อแก้สมการจะได้

$$m_A \ddot{X}_A + K_A X_A + K'_B X_A - K'_B X_B = F \sin(\omega t) + (K'_B - K_B)d \quad 2.13$$

$$m_B \ddot{X}_B + K'_B X_B - K'_B X_A = -(K'_B - K_B)d \quad 2.14$$

การแก้สมการทำได้โดยการสมมติให้

$$X_{pA} = c_1 \sin(\omega t) + c_3$$

$$X_{pB} = c_2 \sin(\omega t) + c_4$$

โดย c_1, c_2, c_3, c_4 คือค่าคงที่ใดๆ

$$\begin{bmatrix} m_A & 0 \\ 0 & m_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X}_A \\ \ddot{X}_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_A + K'_B & -K'_B \\ -K'_B & K'_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A \\ X_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \sin \omega t + (K'_B - K_B)d \\ -(K'_B - K_B)d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_A & 0 \\ 0 & m_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c_1 \omega^2 \sin \omega t \\ -c_2 \omega^2 \sin \omega t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_A + K'_B & -K'_B \\ -K'_B & K'_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \sin \omega t \\ c_2 \sin \omega t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \sin \omega t + (K'_B - K_B)d \\ -(K'_B - K_B)d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_A + K_B - \omega^2 m_A & -K'_B \\ -K'_B & K'_B - \omega^2 m_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \sin \omega t \\ c_2 \sin \omega t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \sin \omega t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_A + K'_B & -K'_B \\ -K'_B & K'_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K'_B - K_B)d \\ -(K'_B - K_B)d \end{bmatrix}$$

สามารถแก้สมการหาผลเฉลยเฉพาะได้ดังนี้

$$X_{pA} = \frac{F}{K_A} \left(\frac{\omega_r'^2 - \Omega^2}{D'_0} \right) \sin(\omega t) \quad 2.15$$

$$X_{PB} = \frac{F}{K_A} \left(\frac{\omega_r'^2}{D_0'} \right) \sin(\omega t) - \frac{(K_B' - K_B)}{K_B'} d \quad 2.16$$

โดยที่

X_{PA} ค่าการเคลื่อนที่ของมวล A จากแรงกระทำ

X_{PB} ค่าการเคลื่อนที่ของมวล B จากแรงกระทำ

$$\omega_r'^2 = \frac{K_B'}{m_B}$$

$$D_0' = \Omega^4 - [1 + \omega_r'^2(1 + m_r)]\Omega^2 + \omega_r'^2$$

พิจารณาจากค่า X_{PA} และ X_{PB} จะให้ค่ามากเมื่อ $D_0' = 0$ จะได้ว่า

$$\Omega_1' = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\omega_r'^2(1 + m_r)}{2}} + \sqrt{\frac{[1 + \omega_r'^2(1 + m_r)]^2}{4} - \omega_r'^2}$$

$$\Omega_2' = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\omega_r'^2(1 + m_r)}{2}} - \sqrt{\frac{[1 + \omega_r'^2(1 + m_r)]^2}{4} - \omega_r'^2}$$

จากสมการที่ 2.6, 2.7, 2.15 และ 2.16 และสมการของค่า X_{PA} กับ X_{PB} แสดงให้เห็นว่า
ยังเกิดการสั่นพ้องได้เมื่อ $D_0 = 0$ หรือ $D_0' = 0$

2.1 หลักการแก้ปัญหาการสั่นพ้อง

การสั่นพ้องของโครงสร้างที่มีมวลหน่วงพิเศษคือการที่ค่าความถี่ของแรงกระทำที่ทำให้ $D_0 = 0$ หรือ $D_0' = 0$ ค่าของความถี่ของแรงกระทำที่อาจทำให้เกิดการสั่นพ้องเรียงกันตามนี้

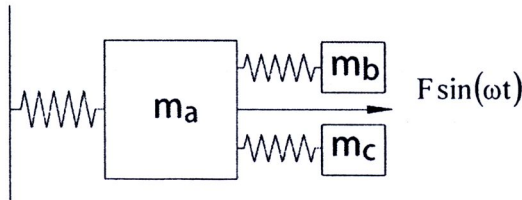
$$\Omega_1\omega_A < \Omega_1'\omega_A < \Omega_2\omega_A < \Omega_2'\omega_A$$

การแก้ปัญหาการสั่นพ้องทำได้ โดยการที่ทำให้ค่าความถี่ของมวลหน่วง เปลี่ยนกลับไปกลับมาดังนี้

2.1.1 เมื่อแรงกระทำมีความถี่ $\Omega_1\omega_A$ จะทำให้มวลหน่วงเกิดการสั่นพ้องที่ $\Omega_1\omega_A$ เปลี่ยนความถี่สั่นพ้องเป็น $\Omega_1'\omega_A$ เนื่องจากการเกิดการเคลื่อนตัวที่มากของ

มวลหนึ่ง และจะหยุดการสั่นพ้องเมื่อมวลหนึ่งคือการเคลื่อนที่สัมผัสกับมวล A เกินระยะ d

- 2.1.2 เมื่อแรงกระทำมีความถี่ $\Omega_1 \omega_A$ จะทำให้มวลหนึ่งซึ่งมีความถี่สั่นพ้องที่ $\Omega_1 \omega_A$ ไม่เปลี่ยนความถี่เป็น $\Omega_1 \omega_A$ เนื่องจากการเกิดการเคลื่อนที่ที่น้อยของมวลหนึ่งคือการเคลื่อนที่สัมผัสกับมวล A ไม่เกินระยะ d
- 2.1.3 เมื่อแรงกระทำมีความถี่ $\Omega_2 \omega_A$ จะทำให้มวลหนึ่งซึ่งมีความถี่สั่นพ้องที่ $\Omega_2 \omega_A$ จะเปลี่ยนความถี่ความสั่นพ้องเป็นความถี่อื่น เมื่อมวลหนึ่งคือการเคลื่อนที่สัมผัสกับมวล A เกินระยะ d และจะหยุดการสั่นพ้อง
- 2.1.4 เมื่อแรงกระทำมีความถี่ $\Omega_2' \omega_A$ จะทำให้มวลหนึ่งซึ่งมีความถี่สั่นพ้องที่ $\Omega_1 \omega_A$ และไม่เปลี่ยนความถี่เป็น $\Omega_1 \omega_A$ เนื่องจากการเกิดการเคลื่อนที่ที่น้อยของมวลหนึ่งคือไม่เกินระยะ d



รูปที่ 2.7 แบบจำลองดิกรีอิสระเดียวแบบมีมวลหนึ่ง 2 ตัว

รูปที่ 2.7 รูปโครงสร้างหลักมวล m_A มีสติฟเฟส K_A ติดตั้งมวลหนึ่ง m_B มีสติฟเฟส K_B และมวลหนึ่ง m_C มีสติฟเฟส K_C ไม่คำนึงถึงผลของความหน่วงในโครงสร้างหลัก A และมวลหนึ่ง B, C รับแรงกระทำแบบคาบ $F \sin(\omega t)$ สมการของรูปที่ 2.7 จะเป็นดังนี้

$$m_A \ddot{X}_A + (K_A + K_B + K_C)X_A - K_B X_B - K_C X_C = F \sin(\omega t) \quad 2.17$$

$$m_B \ddot{X}_B - K_B X_A + K_B X_B = 0 \quad 2.18$$

$$m_C \ddot{X}_C - K_C X_A + K_C X_C = 0 \quad 2.19$$

การแก้สมการทำได้โดยการสมมติให้

$$X_{pA} = c_1 \sin(\omega t)$$

$$X_{PB} = c_2 \sin(\omega t)$$

$$X_{PC} = c_3 \sin(\omega t)$$

โดย c_1, c_2, c_3 คือค่าคงที่ใดๆ

$$\begin{bmatrix} K_A + K_B + K_C - m_A \omega^2 & -K_B & -K_C \\ -K_B & K_B & 0 \\ -K_C & 0 & K_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \sin \omega t \\ c_2 \sin \omega t \\ c_3 \sin \omega t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \sin \omega t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

คำตอบของสมการ จะได้

$$X_{PA} = \frac{F}{K_A} \frac{(\omega_{rb}^2 - \Omega^2)(\omega_{rc}^2 - \Omega^2)}{D} \quad 2.20$$

$$X_{PB} = \frac{F}{K_A} \frac{(\omega_{rc}^2 - \Omega^2)}{D} \quad 2.21$$

$$X_{PC} = \frac{F}{K_A} \frac{(\omega_{rb}^2 - \Omega^2)}{D} \quad 2.22$$

โดยที่

$$D = \omega_{rc}^2 \omega_{rb}^2 - \Omega^6 + (1 + (1 + m_{rb})\omega_{rb}^2 + (1 + m_{rc})\omega_{rc}^2)\Omega^4 + ((1 + m_{rc})\omega_{rc}^2)\omega_{rb}^2 + (1 + m_{rb})\omega_{rb}^2\omega_{rc}^2 + \omega_{rb}^2 \omega_{rc}^2)\Omega^2 \quad 2.23$$

หมายเหตุ

กรณีค่า D เท่ากับศูนย์สามารถหาค่าได้โดยวิธีคำนวณเชิงตัวเลขนั่นคือความถี่ที่ทำให้เกิดการสั่นพ้องของมวลห่วงแบบหลายตัว

X_{PC} ค่าการเคลื่อนที่ของมวล C

ω_C ความเร็วเชิงมุมของมวล C

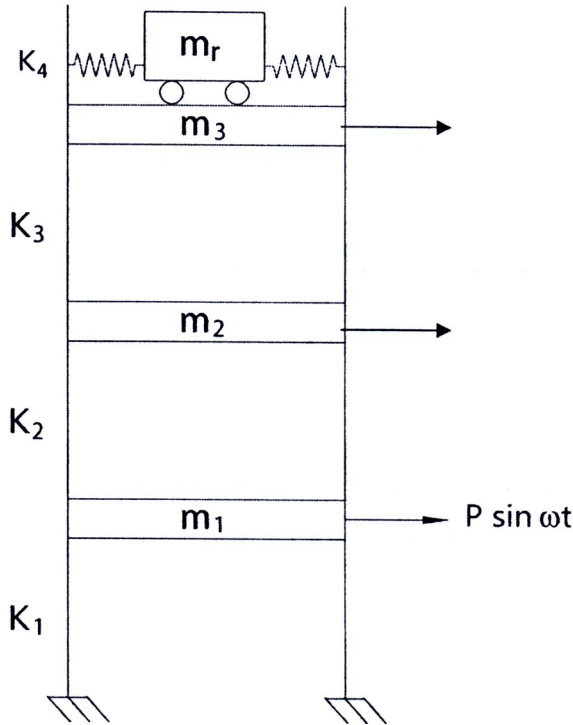
$\omega_{rb} = \frac{\omega_B}{\omega_A}$ อัตราส่วนความเร็วเชิงมุมของมวล B ต่อมวล A

$\omega_{rc} = \frac{\omega_C}{\omega_A}$ อัตราส่วนความเร็วเชิงมุมของมวล C ต่อมวล A

$m_{rb} = \frac{m_B}{m_A}$

$$m_{rc} = \frac{m_c}{m_A}$$

2.6.3 สมการเชิงอนุพันธ์ของมวลหน่วงปรับค่าแบบพาสซีฟติดตั้งบน ตาดฟ้าอาคารสามชั้น



รูปที่ 2.8 อาคารสามชั้นติดตั้งมวลหน่วงปรับค่าแบบพาสซีฟที่ตาดฟ้า

จากรูปที่ 2.8 อาคารสามชั้นน้ำหนัก m_1, m_2, m_3 สติฟเนสของเสา k_1, k_2, k_3 แต่ละชั้นตามลำดับมวลหน่วงปรับค่าแบบพาสซีฟ m_r มีสติฟเนส k_4 รับแรงกระทำ $P \sin \omega t$ ทุกชั้น

สามารถเขียนเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \sin \omega t \\ P \sin \omega t \\ P \sin \omega t \\ 0 \end{bmatrix}$$

เป็นสมการที่ 2.24

การแก้สมการทำได้โดยการสมมติให้

$$X_1 = c_1 \sin(\omega t)$$

$$X_2 = c_2 \sin(\omega t)$$

$$X_3 = c_3 \sin(\omega t)$$

$$X_4 = c_4 \sin(\omega t)$$

โดย c_1, c_2, c_3, c_4 คือค่าคงที่ใดๆ

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2 \omega^2 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 - m_3 \omega^2 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 - m_4 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \sin \omega t \\ c_2 \sin \omega t \\ c_3 \sin \omega t \\ c_4 \sin \omega t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \sin \omega t \\ P \sin \omega t \\ P \sin \omega t \\ 0 \end{bmatrix} \quad 2.25$$

จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2 \omega^2 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 - m_3 \omega^2 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 - m_4 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ P \\ P \\ 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อแก้สมการโดยวิธีเมตริกซ์จะได้ค่าต่างๆ ตามนี้

$$C_1 = \begin{vmatrix} P & -k_2 & 0 & 0 \\ P & k_2 + k_3 - m_2\omega^2 & -k_3 & 0 \\ P & -k_3 & k_3 + k_4 - m_3\omega^2 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 - m_r\omega^2 \end{vmatrix}$$

$$C_2 = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2\omega^2 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 - m_3\omega^2 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 - m_r\omega^2 \end{vmatrix}$$

$$C_3 = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & P & 0 & 0 \\ -k_2 & P & -k_3 & 0 \\ 0 & P & k_3 + k_4 - m_3\omega^2 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 - m_r\omega^2 \end{vmatrix}$$

$$C_4 = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2\omega^2 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 - m_3\omega^2 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 - m_r\omega^2 \end{vmatrix}$$

$$C_5 = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 & P & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2\omega^2 & P & 0 \\ 0 & -k_3 & P & -k_4 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 - m_r\omega^2 \end{vmatrix}$$

$$C_6 = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2\omega^2 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 - m_3\omega^2 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 - m_r\omega^2 \end{vmatrix}$$

$$C_7 = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 & 0 & P \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2\omega^2 & -k_3 & P \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 - m_3\omega^2 & P \\ 0 & 0 & -k_4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$C_8 = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2\omega^2 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 - m_3\omega^2 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 - m_r\omega^2 \end{vmatrix}$$

โดยที่ค่า

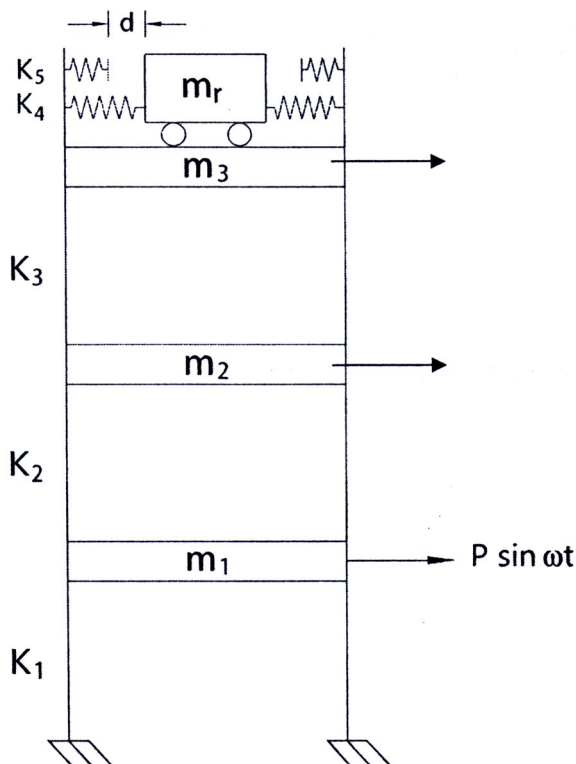
C_1 คือขนาดสูงสุดของการเคลื่อนที่มวลที่ 1 ของอาคาร 3 ชั้นที่ติดตั้งมวลหน่วงปรับค่าแบบพาสซีฟ

C_2 คือขนาดสูงสุดของการเคลื่อนที่มวลที่ 2 ของอาคาร 3 ชั้นที่ติดตั้งมวลหน่วงปรับค่าแบบพาสซีฟ

C_3 คือขนาดสูงสุดของการเคลื่อนที่มวลที่ 3 ของอาคาร 3 ชั้นที่ติดตั้งมวลหน่วงปรับค่าแบบพาสซีฟ

C_4 คือขนาดสูงสุดของการเคลื่อนที่มวลหน่วงปรับค่าพิเศษ ของอาคาร 3 ชั้นที่ติดตั้งมวลหน่วงปรับค่าแบบพาสซีฟ

2.6.4 สมการเชิงอนุพันธ์ของมวลหน่วงปรับค่าพิเศษติดตั้งบนอาคารสามชั้น



รูปที่ 2.9 อาคารสามชั้นติดตั้งมวลหน่วงปรับค่าแบบพาสซีฟที่ดาดฟ้า

จากรูปที่ 2.9 อาคารสามชั้นมวล m_1, m_2, m_3 และมีสติฟเนสของเสา k_1, k_2, k_3 แต่ละชั้นตามลำดับ มวลหน่วงปรับค่าพิเศษ m_r มีสติฟเนส k_4 และ k_5 รับแรงกระทำ $P \sin \omega t$ ทุกชั้น สามารถเขียนเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 + k_5 & -k_4 - k_5 \\ 0 & 0 & -k_4 - k_5 & k_4 + k_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \sin \omega t \\ P \sin \omega t \\ P \sin \omega t + k_5 d \\ -k_5 d \end{bmatrix} \quad 2.26$$

การแก้สมการทำได้โดยการสมมติให้

$$X_1 = c_1 \sin(\omega t)$$

$$X_2 = c_2 \sin(\omega t)$$

$$X_3 = c_3 \sin(\omega t)$$

$$X_4 = c_4 \sin(\omega t)$$

โดย c_1, c_2, c_3, c_4 คือค่าคงที่ใดๆ กรณีไม่สัมผัสสปริง k_5

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2 \omega^2 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 + k_5 - m_3 \omega^2 & -k_4 - k_5 \\ 0 & 0 & -k_4 - k_5 & k_4 + k_5 - m_r \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \sin \omega t \\ c_2 \sin \omega t \\ c_3 \sin \omega t \\ c_4 \sin \omega t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \sin \omega t \\ P \sin \omega t \\ P \sin \omega t \\ 0 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2\omega^2 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 + k_5 - m_3\omega^2 & -k_4 - k_5 \\ 0 & 0 & -k_4 - k_5 & k_4 - m_r\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ P \\ P \\ 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อแก้สมการโดยวิธีเมตริกซ์จะได้ค่าต่างๆ ดังนี้

$$C_1 = \begin{vmatrix} P & -k_2 & 0 & 0 \\ P & k_2 + k_3 - m_2\omega^2 & -k_3 & 0 \\ P & -k_3 & k_3 + k_4 + k_5 - m_3\omega^2 & -k_4 - k_5 \\ 0 & 0 & -k_4 - k_5 & k_4 + k_5 - m_r\omega^2 \end{vmatrix}$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2\omega^2 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 + k_5 - m_3\omega^2 & -k_4 - k_5 \\ 0 & 0 & -k_4 - k_5 & k_4 + k_5 - m_r\omega^2 \end{vmatrix}$$

$$C_2 = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & P & 0 & 0 \\ -k_2 & P & -k_3 & 0 \\ 0 & P & k_3 + k_4 + k_5 - m_3\omega^2 & -k_4 - k_5 \\ 0 & 0 & -k_4 - k_5 & k_4 + k_5 - m_r\omega^2 \end{vmatrix}$$

$$C_2 = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2\omega^2 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 + k_5 - m_3\omega^2 & -k_4 - k_5 \\ 0 & 0 & -k_4 - k_5 & k_4 + k_5 - m_r\omega^2 \end{vmatrix}$$

$$C_3 = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 & P & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2\omega^2 & P & 0 \\ 0 & -k_3 & P & -k_4 - k_5 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 + k_5 - m_r\omega^2 \end{vmatrix}$$

$$C_3 = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2\omega^2 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 + k_5 - m_3\omega^2 & -k_4 - k_5 \\ 0 & 0 & -k_4 - k_5 & k_4 + k_5 - m_r\omega^2 \end{vmatrix}$$

$$C_4 = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 & 0 & P \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2\omega^2 & -k_3 & P \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 + k_5 - m_3\omega^2 & P \\ 0 & 0 & -k_4 - k_5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$C_4 = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2\omega^2 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 + k_5 - m_3\omega^2 & -k_4 - k_5 \\ 0 & 0 & -k_4 - k_5 & k_4 + k_5 - m_r\omega^2 \end{vmatrix}$$

โดยที่ค่า

C_1 คือขนาดสูงสุดของการเคลื่อนที่มวลที่ 1 ของอาคาร 3 ชั้นที่ติดตั้งมวลหน่วงปรับค่าแบบพิเศษ

C_2 คือขนาดสูงสุดของการเคลื่อนที่มวลที่ 2 ของอาคาร 3 ชั้นที่ติดตั้งมวลหน่วงปรับค่าแบบพิเศษ

C_3 คือขนาดสูงสุดของการเคลื่อนที่มวลที่ 3 ของอาคาร 3 ชั้นที่ติดตั้งมวลหน่วงปรับค่าแบบพิเศษ

C_4 คือขนาดสูงสุดของการเคลื่อนที่มวลหน่วงปรับค่าพิเศษ ของอาคาร 3 ชั้นที่ติดตั้งมวลหน่วงปรับค่าแบบพิเศษ