วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh 64(698) พฤษภาคม – สิงหาคม 2562
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

สูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกเดินได้แบบ $(\mathbf{2}, \boldsymbol{b})$ เมื่อ $\boldsymbol{b} \in \{\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{6}, \mathbf{8}\}$

Formula for Squares Reachable by a Knight with $(\mathbf{2}, \boldsymbol{b})$–Knight's Move for $\boldsymbol{b} \in \{\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{6}, \mathbf{8}\}$

รตินันท์ บุญเคลือบ อิ่มบุญ เนียมน้อย และ ราตรี เทพรอด
Ratinan Boonklurb[1], Aimboon Niamnoy[2] and Ratree Theprod[3]

[1,2]Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science, Chulalongkorn University, Bangkok 10330
[3]Romklao Kanchanaburi School (in Royal Initiative Project), Kanchanaburi 71180

Email: [1]ratinan.b@chula.ac.th, [2]aimboon13@gmail.com, [3]ratree150@gmail.com

วันที่รับบทความ : 1 พฤษภาคม 2562
วันแก้ไขบทความ : 25 มิถุนายน 2562
วันตอบรับบทความ : 24 กรกฎาคม 2562

บทคัดย่อ

กระดานหมากรุก ขนาด $m \times n$ คือ กระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วยแถวของช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งจัดเรียงเป็น m แถวและแต่ละแถวมีอยู่ n หลัก ในกรณีที่ $m \to \infty$ และ $n \to \infty$ จะเรียกกระดานหมากรุกดังกล่าวว่า *กระดานหมากรุกขนาดอนันต์* การเดินม้าหมากรุกแบบ (a, b) เป็นการเดินบนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์จากช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสช่องหนึ่งไปอีกช่องหนึ่ง โดยเดินม้าหมากรุกไป a ช่องตามแนวตั้งหรือแนวนอนแล้วเดินเลี้ยวทำมุม 90 องศากับแนวเดิมไปอีก b ช่อง ในบทความนี้พิจารณาการเดินของม้าหมากรุกเดินแบบ $(2, b)$ เมื่อ $b \in \{2, 4, 6, 8\}$ และนำเสนอสูตรของจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, b)$ เมื่อ $b \in \{2, 4, 6, 8\}$ ไปถึงได้บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ และจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินไปถึงด้วยการเดินเพียง k ครั้ง

คำสำคัญ: การเดินม้าหมากรุกแบบ (a, b) สูตรของจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินไปถึงได้

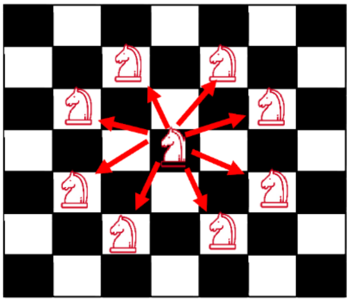
ABSTRACT

The $m \times n$ *chessboard* is an array with squares arranged in m rows and n columns. If $m \to \infty$ and $n \to \infty$, then it is called an *infinite chessboard*. An (a, b)-*knight's* move is a move from square to square by moving a knight passing a squares vertically or a squares horizontally and then passing b squares at 90 degrees angle. In this article, we consider the $(2, b)$-knight's move where $b \in \{2, 4, 6, 8\}$ and obtain formula for the number of squares reachable by a knight with the $(2, b)$-knight's move where $b \in \{2, 4, 6, 8\}$ on an infinite chessboard and the cumulative number of squares that the knight can reach in k moves.

Keywords: (a, b)-knight's move, number of squares reachable by a knight

1. บทนำ

ในเกมหมากรุก ตัวหมากตัวหนึ่ง คือ *ม้า* ม้าจะมีวิธีการเดินแตกต่างจากตัวหมากตัวอื่น ๆ อย่างมาก กล่าวคือ จะเดินตามแนวตั้งหรือแนวนอนไปหนึ่งช่องแล้วเดินเลี้ยวทำมุม 90 องศากับแนวเดิมไปอีกสองช่อง เรียกการเดินแบบนี้ว่า *การเดินแบบปกติของม้า*



รูปที่ 1.1 ช่องที่ม้าเดินแบบปกติไปถึงได้จากตำแหน่งของม้าที่กำหนดให้

กระดานหมากรุกขนาดมาตรฐาน คือ กระดานหมากรุกขนาด 8×8 ซึ่งประกอบด้วยช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจำนวนแปดแถวและแปดหลัก โดยแต่ละช่องทาด้วยสีดำหรือสีขาว ต่อมามีการขยายกระดานหมากรุกขนาดมาตรฐานให้เป็นกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ซึ่ง *กระดานหมากรุกขนาด* $m \times n$ ประกอบด้วยช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจำนวน m แถว และ n หลัก ทาสีแต่ละช่องด้วยสีดำและสีขาวสลับกันไป ในปี ค.ศ. 2013 Miller และ Farnsworth [2] ได้พิจารณากระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ที่ m และ n ลู่เข้าสู่อนันต์ หรือที่เรียกว่า *กระดานหมากรุกแบบอนันต์* ซึ่งมีช่องรูปสี่เหลี่ยม

จัตุรัสตามแนวนอนและช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสตามแนวตั้งเป็นจำนวนอนันต์ แล้วหาสูตรของจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบปกติไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง เท่ากับ $1, 8, 32, 68, 96$ และ $28k - 20$ ช่อง เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4$ และ $k \geq 5$ ตามลำดับ และสูตรของจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินไปถึงได้ในการเดิน k ครั้ง เท่ากับ $1, 9, 41, 109$ และ $14k^2 - 6k + 5$ ช่อง เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3$ และ $k \geq 4$ ตามลำดับ

ทั้งนี้การนับจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบปกติไปถึงได้จากจุดเริ่มต้นที่กำหนดให้นั้นจะพิจารณาการเดิน k ครั้งที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้ที่ม้าจะไปถึงช่องดังกล่าว ในบทความฉบับนี้จึงใช้คำว่า “จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบปกติไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง” และหากช่องใดม้าเคยเดินไปถึงแล้วภายในการเดินเพียง k ครั้ง จะไม่นับช่องดังกล่าวซ้ำอีกในการเดินครั้งต่อไปที่มากกว่า k

ในปี ค.ศ. 2003 Chia และOng [1] ได้ปรับเปลี่ยนการเดินแบบปกติของม้าไปเป็น *การเดินแบบ* (a, b) *ของม้า* นั่นคือ การเดินม้าไป a ช่องตามแนวตั้งหรือแนวนอนแล้วเดินเลี้ยวทำมุม 90 องศากับแนวเดิมไปอีก b ช่อง นอกจากนี้ยังสามารถพิจารณาได้โดยง่ายว่าการเดินแบบ (a, b) ของม้า จะเหมือนกับการเดินแบบ (b, a) ของม้า ดังนั้นในโครงงานฉบับนี้จึงพิจารณาการเดินแบบ (a, b) ของม้า เมื่อกำหนดให้ $a \leq b$ นอกจากนี้ยังได้ด้วยว่าการเดินแบบปกติของม้า คือ การเดินแบบ $(1, 2)$ ของม้า สังเกตว่าถ้าให้ (i, j) เป็นช่องบนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์เป็นจุดเริ่มต้น แล้วม้าจะสามารถเดินแบบ (a, b) ไปได้จำนวน 8 ช่อง กล่าวคือ $(i \pm a, j \pm b)$ และ $(i \pm b, j \pm a)$ (หรือ 4 ช่อง ในกรณีที่ $a = b$) นอกจากนี้ยังสังเกตได้อีกว่า ถ้า $a + b$ เป็นจำนวนคี่ ม้าจะสามารถเดินไปได้ทุกช่องบนกระดานขนาดอนันต์ แต่ถ้า $a + b$ เป็นจำนวนคู่ ม้าจะสามารถเดินช่องสีดำไปช่องสีดำหรือจากช่องสีขาวไปช่องสีขาวเท่านั้น

ในปี ค.ศ. 2018 Theprod [3] ได้ขยายแนวคิดของ Miller และ Farnsworth [2] ไปพิจารณาจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(1, b)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง ตลอดจนจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ $(1, b)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์เมื่อ $b \in \{3, 4, 5, 7\}$

บทความฉบับนี้ได้ขยายแนวคิดของ Miller และ Farnsworth [2] และ Theprod [3] มาเป็นการหาสูตรของจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, b)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง และ

สูตรของจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, b)$ ไปถึงได้ในการเดินเพียง k ครั้ง สำหรับจำนวนเต็ม $b \in \{2, 4, 6, 8\}$

2. สูตรของจำนวนช่องสำหรับการเดินม้าแบบ $(\mathbf{2}, \mathbf{2})$

พิจารณาการเดินของม้าแบบ $(2, 2)$ บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ จากจุดเริ่มต้น ที่กำหนดเราจะแบ่งกระดานหมากรุกออกเป็น 4 ส่วน ด้วยหลักแนวตั้งและแถวแนวนอนที่ผ่านจุดเริ่มต้น K ดังรูปที่ 2.1 สังเกตว่าการเดินไปในแต่ละส่วนของกระดานนั้นมีความสมมาตรกันทั้ง 4 ส่วน และมีสมมาตรกันตามหลักแนวตั้งและแถวแนวนอน ในทิศทางขึ้น ลง ซ้าย และขวา จากจุดเริ่มต้น K อีกด้วย ดังนั้นในการนับจำนวนช่องที่ม้าเดินไปถึงได้ด้วยการเดินเพียง k ครั้ง จึงเพียงพอที่จะแยกพิจารณาจำนวนช่องที่ม้าเดินไปถึงได้ด้วยการเดินเพียง k ครั้ง จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K เท่านั้น

ทฤษฎีบทประกอบ 2.1 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ (2,2) ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้งบนส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์เท่ากับ 1 และ k ช่อง เมื่อ $k = 0$ และ $k \geq 1$ ตามลำดับ

บทพิสูจน์

กรณี 1 $k = 0$ ช่องที่กำกับด้วยเลข 0 (คือ ช่องที่กำกับด้วย K) ปรากฏ 1 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน 1 ช่อง

กรณี 2 $k \geq 1$ เป็นจำนวนเต็มคี่ จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K จะเห็นว่า

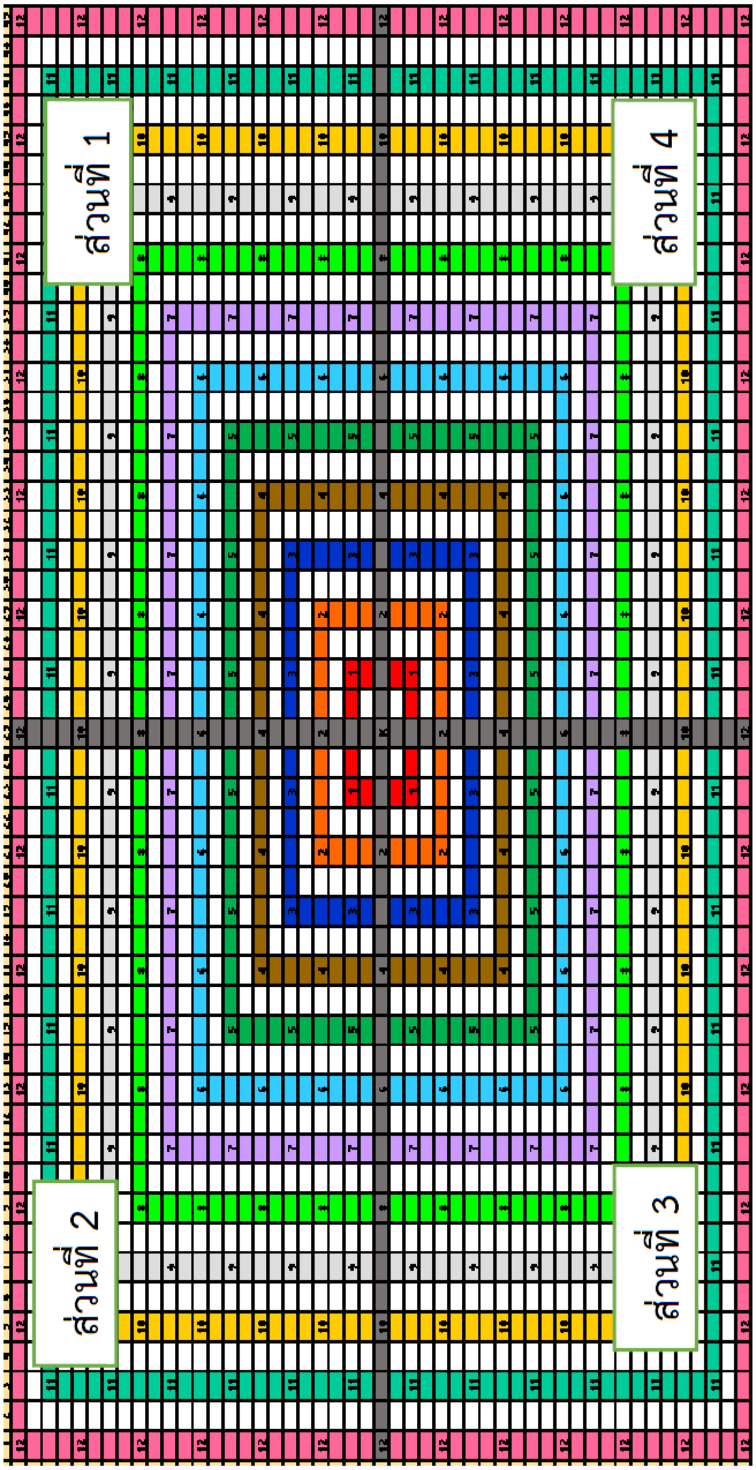
ช่องที่กำกับด้วยเลข 1 ปรากฏ 1 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน 1 ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 3 ปรากฏ 2 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $1 + 2 = 3$ ช่อง

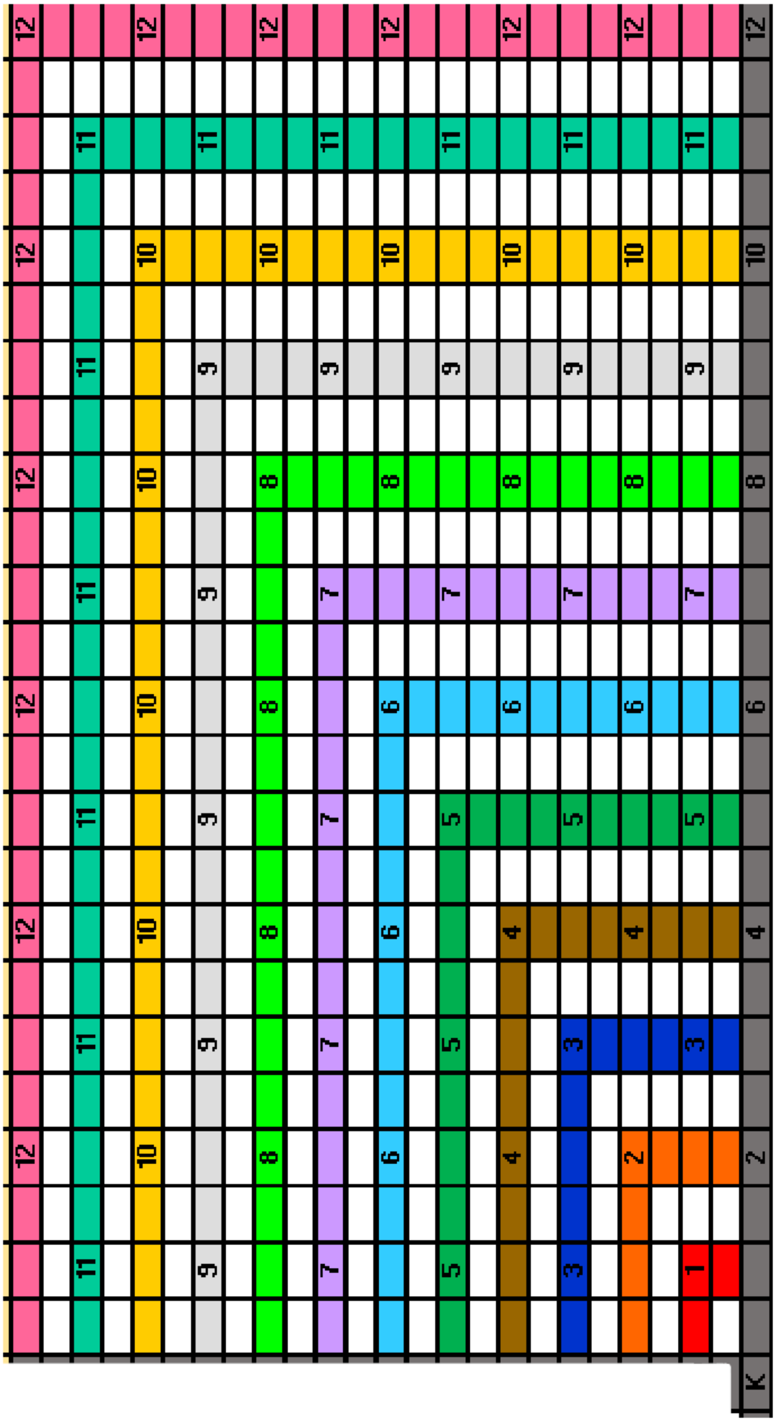
ช่องที่กำกับด้วยเลข 5 ปรากฏ 3 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $1 + 1 + 3 = 5$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 7 ปรากฏ 4 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $1 + 1 + 1 + 4 = 7$ ช่อง

ด้วยวิธีการนับแบบนี้ จะคาดการณ์ได้ว่าช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ $\frac{k+1}{2}$ หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(1 + 1 + 1 + \cdots + 1)}_{\frac{k-1}{2}\text{ ตัว}} + \frac{k+1}{2} = k$ ช่อง



รูปที่ 2.1 การแบ่งกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2,2)$ ออกเป็น 4 ส่วน



รูปที่ 2.2 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, 2)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง
เมื่อ $1 \leq k \leq 12$ ในส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K

กรณี 3 $k \geq 2$ เป็นจำนวนเต็มคู่ จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K จะเห็นว่า

ช่องที่กำกับด้วยเลข 2 ปรากฏ 1 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน 2 ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 4 ปรากฏ 2 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $1 + 3 = 4$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 6 ปรากฏ 3 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $1 + 1 + 4 = 6$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 8 ปรากฏ 4 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $1 + 1 + 1 + 5 = 8$ ช่อง

ด้วยวิธีการนับแบบนี้ จะคาดการณ์ได้ว่าช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ $\frac{k}{2}$ หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(1+1+1+\cdots+1)}_{\frac{k-2}{2}\text{ ตัว}} + \frac{k+2}{2} = k$ ช่อง

เพื่อพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ เราใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ให้ k เป็นจำนวนนับ

สมมติว่าถ้า k เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้วช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ $\frac{k+1}{2}$ หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(1+1+1+\cdots+1)}_{\frac{k-1}{2}\text{ ตัว}} + \frac{k+1}{2}$ ช่อง และถ้า k เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้วช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ $\frac{k}{2}$ หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(1+1+1+\cdots+1)}_{\frac{k-2}{2}\text{ ตัว}} + \frac{k+2}{2}$ ช่อง

กรณี k เป็นจำนวนเต็มคี่ ในหลักที่ 1 ถึง หลักที่ $\frac{k-1}{2}$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้อีกตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(1+1+1+\cdots+1)}_{\frac{k-1}{2}\text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $\frac{k+1}{2}$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้อีกตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวล่างสุด เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\frac{k+3}{2}$ ช่อง

ดังนั้นผลรวมของช่องที่จะปรากฏเลข $k+1$ มีทั้งหมด $\underbrace{(1+1+1+\cdots+1)}_{\frac{k-1}{2}\text{ ตัว}} + \frac{k+3}{2} = k+1$ ช่อง

กรณี k เป็นจำนวนเต็มคู่ ในหลักที่ 1 ถึง หลักที่ $\frac{k-2}{2}$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้อีกเพียงตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นม้าในหลักที่ 1 เดินไปทางซ้ายได้ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(1+1+1+\cdots+1)}_{\frac{k}{2}\text{ ตัว}}$ ช่อง ในหลักที่ $\frac{k}{2}$ ม้าจะเดินไปทางขวา โดยไม่ซ้ำกันได้อีกเพียงตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\frac{k+2}{2}$ ช่อง ดังนั้นผลรวมของช่องที่จะปรากฏเลข $k+1$ จึงมีทั้งหมด

$$\underbrace{(1+1+1+\cdots+1)}_{\frac{k}{2}\text{ ตัว}} + \frac{k+2}{2} = k+1 \text{ ช่อง}$$

เพราะฉะนั้นโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จึงได้ว่าข้อความคาดการณ์เป็นจริง $\square$

ทฤษฎีบท 2.1

(i) จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, 2)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เท่ากับ 1 และ $4k$ ช่อง เมื่อ $k = 0$ และ $k \geq 1$ ตามลำดับ

(ii) จำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, 2)$ ไปถึงได้ในการเดินเพียง k ครั้งหรือน้อยกว่า k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ คือ $2k^2 + 2k + 1$ ช่อง เมื่อ $k \geq 0$

บทพิสูจน์

(i) ได้โดยตรงจากทฤษฎีบทประกอบ 2.1 และการเดินไปในแต่ละส่วนของกระดานนั้นมีความสมมาตรกันทั้ง 4 ส่วน

(ii) ถ้า $k = 0$ จะได้โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.1 ว่าจำนวนช่องสะสมดังกล่าว คือ 1 ช่อง

ถ้า $k \geq 1$ จะได้โดยทฤษฎีบท 2.1 (i) ว่าจะได้ จำนวนช่องสะสมดังกล่าวสามารถคำนวณโดยตรงได้จาก $1 + \sum_{i=1}^{k} 4i$ □

3. สูตรของจำนวนช่องสำหรับการเดินม้าแบบ $(2, 4)$ และ $(2, 6)$

พิจารณาการเดินของม้าแบบ $(2\,,4)$ และ $(2, 6)$ บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ จากจุดเริ่มต้นที่กำหนด เราจะแบ่งกระดานหมากรุกออกเป็น 4 ส่วน ด้วยหลักแนวตั้งและแถวแนวนอนที่ผ่านจุดเริ่มต้น K ดังรูปที่ 3.1 และ รูปที่ 3.2 จากการพิจารณาด้วยการนับโดยตรงจะได้จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, 4)$ และ $(2, 6)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ด้วยการนับโดยตรง เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3$ และ 4 ดังทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 3.1 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, 4)$ และ $(2, 6)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เท่ากับ $1, 8, 32, 68$ และ 96 ช่อง เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3$ และ 4 ตามลำดับ

ในกรณีที่ $k \geq 5$ จะเห็นว่าการเดินไปในแต่ละส่วนของกระดานนั้นมีความสมมาตรกันทั้ง 4 ส่วน และมีสมมาตรกันตามหลักแนวตั้งและแถวแนวนอนในทิศทางขึ้น ลง ซ้าย และขวา จากจุดเริ่มต้น K อีกด้วย ดังนั้นในการนับจำนวนช่องที่ม้าเดินไปถึงได้ด้วยการเดินเพียง k ครั้ง จึงเพียงพอที่จะแยกพิจารณาจำนวนช่องที่ม้าเดินไปถึงได้ด้วยการเดินเพียง k ครั้ง จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K เท่านั้น

ทฤษฎีบทประกอบ 3.2 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2,4)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง บนส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์เท่ากับ $7k-5$ ช่อง เมื่อ $k \geq 5$

บทพิสูจน์

กรณี 1 $k \geq 5$ เป็นจำนวนเต็มคี่

ให้ $k = 2t+1$ เมื่อ $t \geq 2$ จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K จะเห็นว่า

ช่องที่กำกับด้วยเลข 5 ปรากฏ 10 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(2+2+2+2)+(3+3)+5+4+4+3 = 30$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 7 ปรากฏ 14 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(2+2+2+2+2+2)+(3+3+3+3)+6+5+5+4 = 44$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 9 ปรากฏ 18 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(2+2+2+2+2+2+2+2)+(3+3+3+3+3+3)+7+6+6+5 = 58$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 11 ปรากฏ 22 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(2+2+2+2+2+2+2+2+2+2)+(3+3+3+3+3+3+3+3)+8+7+7+6 = 72$ ช่อง

ด้วยวิธีการนับแบบนี้ จะคาดการณ์ได้ว่าช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ เมื่อ $k = 2t+1$ ที่ $t \geq 2$ ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(2+2+2+\cdots+2)}_{2t\text{ ตัว}} + \underbrace{(3+3+3+\cdots+3)}_{2t-2\text{ ตัว}} + (t+3) + (t+2)+(t+2)+(t+1) = 14t+2 = 7k-5$ ช่อง

กรณี 2 $k \geq 6$ เป็นจำนวนเต็มคู่

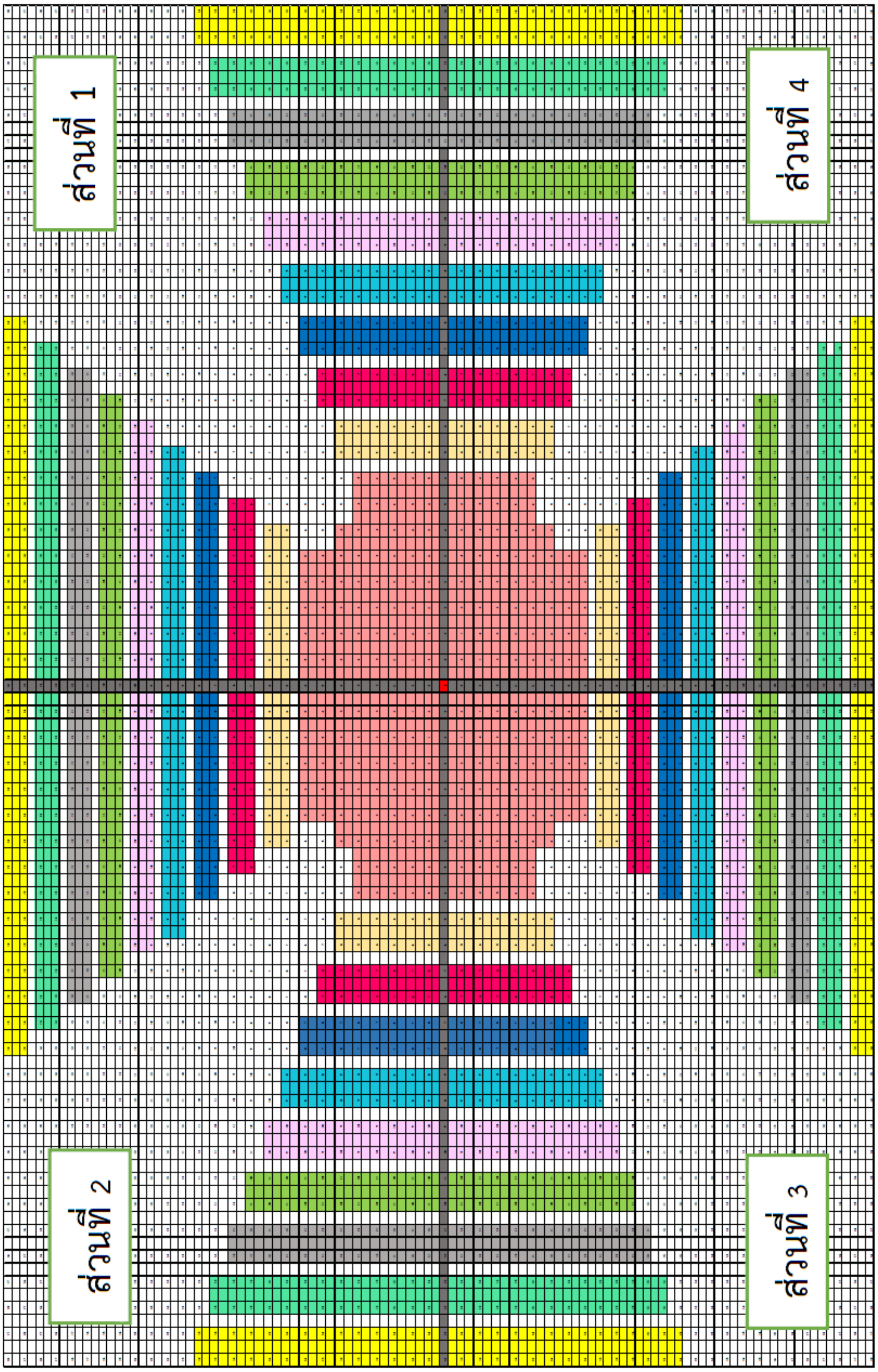
ให้ $k = 2t$ เมื่อ $t \geq 3$ จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K จะเห็นว่า

ช่องที่กำกับด้วยเลข 6 ปรากฏ 12 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(2+2+2+2+2)+(3+3+3)+5+5+4+4 = 37$ ช่อง

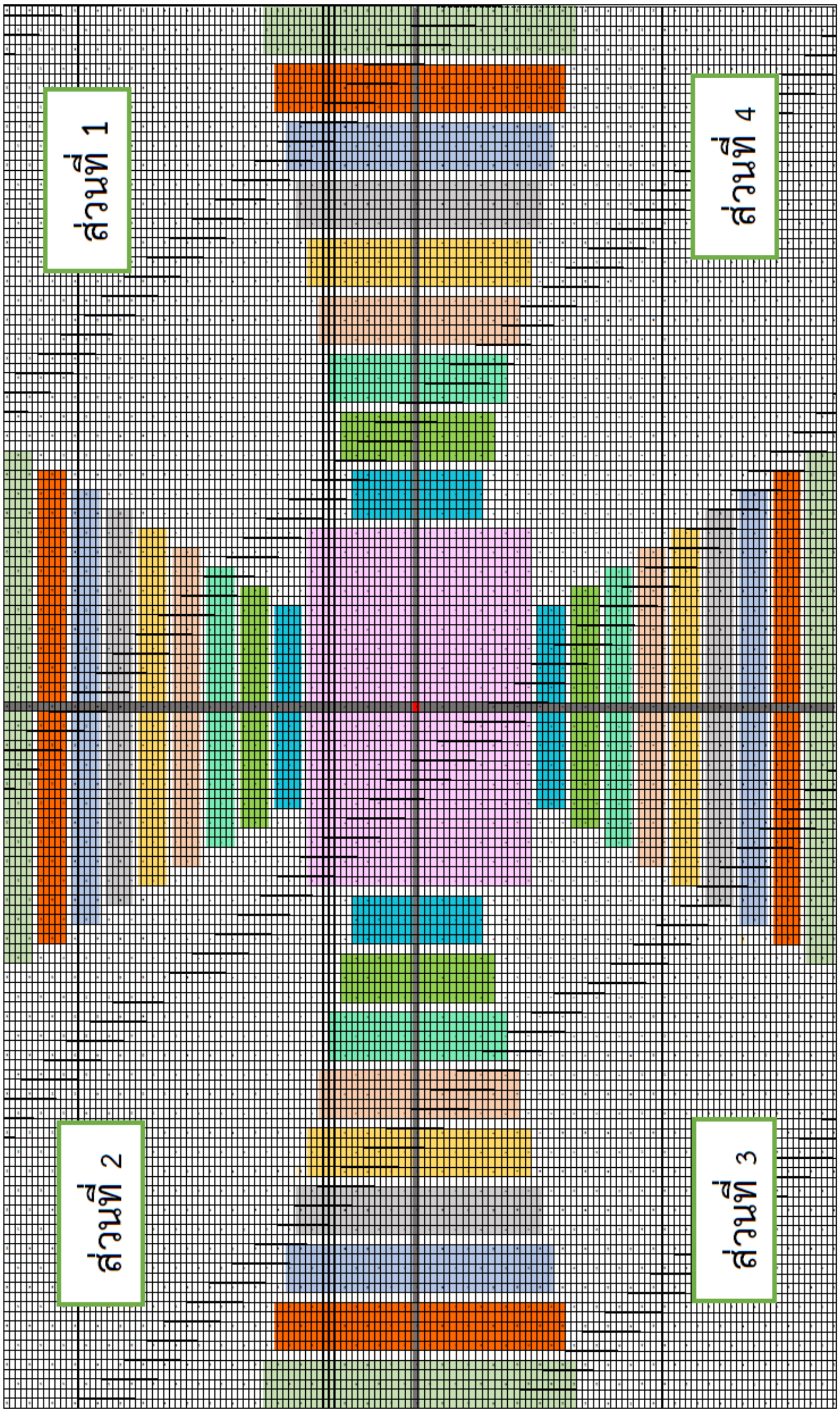
ช่องที่กำกับด้วยเลข 8 ปรากฏ 16 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(2+2+2+2+2+2+2)+(3+3+3+3+3)+6+6+5+5 = 51$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 10 ปรากฏ 20 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(2+2+2+2+2+2+2+2+2)+(3+3+3+3+3+3+3)+7+7+6+6 = 65$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 12 ปรากฏ 24 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2)+(3+3+3+3+3+3+3+3+3)+8+8+7+7 = 79$ ช่อง



รูปที่ 3.1 การแบ่งกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, 4)$ ออกเป็น 4 ส่วน



รูปที่ 3.2 การแบ่งกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2,6)$ ออกเป็น 4 ส่วน

ด้วยวิธีการนับแบบนี้ จะคาดการณ์ได้ว่าช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ เมื่อ $k = 2t$ ที่ $t \geq 3$ ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(2+2+2+\cdots+2)}_{2t-1\text{ ตัว}} + \underbrace{(3+3+3+\cdots+3)}_{2t-3\text{ ตัว}} + (t+2) + (t+2) + (t+1) + (t+1) = 14t - 5 = 7k - 5$ ช่อง

เพื่อพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ เราใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ให้ k เป็นจำนวนนับที่ $k \geq 5$ สมมติว่าถ้า $k = 2t + 1$ และ $t \geq 2$ แล้วช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ $4t + 2$ หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(2+2+2+\cdots+2)}_{2t\text{ ตัว}} + \underbrace{(3+3+3+\cdots+3)}_{2t-2\text{ ตัว}} + (t+3) + (t+2) + (t+2) + (t+1)$ ช่อง และถ้า $k = 2t$ และ $t \geq 3$ แล้วช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ $4t$ หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(2+2+2+\cdots+2)}_{2t-1\text{ ตัว}} + \underbrace{(3+3+3+\cdots+3)}_{2t-3\text{ ตัว}} + (t+2) + (t+2) + (t+1) + (t+1)$ ช่อง

กรณี $k = 2t + 1$ และ $t \geq 2$ เพื่อให้สะดวกในการนับ จะนับเฉพาะการเดินม้าจากหลักหนึ่งไปยังอีกหลักที่ติดกันเท่านั้น ยกเว้นในหลักสุดท้าย

ในหลักที่ 1 ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้อีกเพียงตัวละ 1 ช่อง จึงเดินไปได้ทั้งหมด 2 ช่อง

ในหลักที่ 2 ถึงหลักที่ $2t$ ในแต่ละหลัก จะเดินม้าไปทางซ้ายสลับขวาไปเรื่อย ๆ โดยไม่ซ้ำกันได้อีกเพียงตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นหลักสุดท้าย เดินไปทั้งทางซ้ายและขวา จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(2+2+2+\cdots+2)}_{2t\text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $2t + 1$ ถึงหลักที่ $4t - 2$ ม้าจะเดินต่อไปขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(3+3+3+\cdots+3)}_{2t-2\text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $4t - 1$ จะมีม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 3 ช่องบนที่เดินไปทางขวาถึงหลักถัดไปโดยไม่ซ้ำกันได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้เพียง 3 ช่อง

ในหลักที่ $4t$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวรองสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 3$ ช่อง

ในหลักที่ $4t + 1$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวรองสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 3$ ช่อง

ในหลักที่ $4t + 2$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวรองสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 2$ ช่อง และม้าในหลักนี้ ยังเดินไปหลักเดินไปหลักถัด ๆ ไป

โดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t+2$ ช่อง และได้ช่องที่เดินไปถึงได้รวม $2t+4$ ช่อง

ดังนั้น ผลรวมของช่องที่จะปรากฏเลข $k+1$ มีทั้งหมด $2+\underbrace{(2+2+2+\cdots+2)}_{2t\text{ ตัว}}+\underbrace{(3+3+3+\cdots+3)}_{2t-2\text{ ตัว}}+3+(t+3)+(t+3)+(2t+4)=14t+9=7(k+1)-5=7k+2$ ช่อง

กรณี $k=2t$ และ $t\geq 3$ เพื่อให้สะดวกในการนับ จะนับเฉพาะการเดินม้าจากหลักหนึ่งไปยังอีกหลักที่ติดกันเท่านั้น

ในหลักที่ 1 ถึงหลักที่ $2t-1$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้อีกตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นม้าในหลักที่ 2 ที่เดินไปได้ทั้งทางซ้ายและขวา จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(2+2+2+\cdots+2)}_{2t\text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $2t$ ถึงหลักที่ $4t-4$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(3+3+3+\cdots+3)}_{2t-3\text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $4t-3$ จะมีม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 3 ช่องบนที่เดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้เพียง 3 ช่อง

ในหลักที่ $4t-2$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวรองสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t+3$ ช่อง

ในหลักที่ $4t-1$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวรองสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t+2$ ช่อง

ในหลักที่ $4t$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวรองสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t+2$ ช่อง และม้าในหลักนี้ ยังเดินไปหลักเดินไปหลักถัด ๆ ไปโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t+1$ ช่อง และได้ช่องที่เดินไปถึงได้รวม $2t+3$ ช่อง

ดังนั้นผลรวมของช่องที่จะปรากฏเลข $k+1$ จึงมีทั้งหมด $\underbrace{(2+2+2+\cdots+2)}_{2t\text{ ตัว}}+\underbrace{(3+3+3+\cdots+3)}_{2t-3\text{ ตัว}}+3+(t+3)+(t+2)+(2t+3)=14t+2=7(k+1)-5=7k+2$ ช่อง

เพราะฉะนั้นโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จึงได้ว่าข้อความคาดการณ์เป็นจริง $\square$

	10	11	10	11	10	11	10	11	10	11	10	11	12	11	12	13	12	13	14	13	14	15	14	15
	9	10	9	10	9	10	9	10	9	10	11	10	11	12	11	12	13	12	13	14	13	14	15	14
	10	9	10	9	10	9	10	9	10	9	10	11	10	11	12	11	12	13	12	13	14	13	14	15
	9	8	9	8	9	8	9	8	9	10	9	10	11	10	11	12	11	12	13	12	13	14	13	14
	8	9	8	9	8	9	8	9	8	9	10	9	10	11	10	11	12	11	12	13	12	13	14	13
	7	8	7	8	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10	11	10	11	12	11	12	13	12	13	14
	8	7	8	7	8	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10	11	10	11	12	11	12	13	12	13
	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10	11	10	11	12	11	12	13	12
	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10	11	10	11	12	11	12	13
	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10	11	10	11	12	13	12
	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10	11	12	11	12	13
	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10	11	10	11	12	13	12
	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9	10	9	10	11	12	11	12	13
	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8	9	8	9	10	11	10	11	12	13	12
	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	8	7	8	9	10	9	10	11	12	11	12	13
	3	2	3	4	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9	8	9	10	11	10	11	12	13	12
	2	3	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7	8	7	8	9	10	9	10	11	12	11	12	13
	1	4	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9	8	9	10	11	10	11	12	13	12
	2	1	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7	8	7	8	9	10	9	10	11	12	11	12	13
k	3	2	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9	8	9	10	11	10	11	12	13	12

รูปที่ 3.3 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, 4)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง เมื่อ $1 \leq k \leq 12$ ในส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K

ทฤษฎีบทประกอบ 3.3 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2,6)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง บนส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์เท่ากับ $7k-5$ ช่อง เมื่อ $k \geq 5$

บทพิสูจน์

กรณี 1 $k \geq 5$ เป็นจำนวนเต็มคี่

ให้ $k = 2t+1$ เมื่อ $t \geq 2$ จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K จะเห็นว่า

ช่องที่กำกับด้วยเลข 5 ปรากฏ 8 หลัก มีอยู่ $(3+3)+(4+4+4)+5+4+3=30$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 7 ปรากฏ 11 หลัก มีอยู่ $(3+3+3)+(4+4+4+4+4)+6+5+4=44$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 9 ปรากฏ 14 หลัก มีอยู่ $(3+3+3+3)+(4+4+4+4+4+4+4)+7+6+5=58$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 11 ปรากฏ 17 หลัก มีอยู่ $(3+3+3+3+3)+(4+4+4+4+4+4+4+4+4)+8+7+6=72$ ช่อง

ด้วยวิธีการนับแบบนี้ จะคาดการณ์ได้ว่าช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ เมื่อ $k=2t+1$ ที่ $t \geq 2$ ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(3+3+3+\cdots+3)}_{t\text{ ตัว}}+\underbrace{(4+4+4+\cdots+4)}_{2t-1\text{ ตัว}}+(t+3)+(t+2)+(t+1)= 14t+2=7k-5$ ช่อง

กรณี 2 $k \geq 6$ เป็นจำนวนเต็มคู่

ให้ $k=2t$ เมื่อ $t \geq 3$ จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K จะเห็นว่า

ช่องที่กำกับด้วยเลข 6 ปรากฏ 9 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(3+3)+(4+4+4+4)+6+5+4=37$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 8 ปรากฏ 12 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(3+3+3)+(4+4+4+4+4+4)+7+6+5=51$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 10 ปรากฏ 15 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(3+3+3+3)+(4+4+4+4+4+4+4+4)+8+7+6=65$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 12 ปรากฏ 18 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(3+3+3+3+3)+(4+4+4+4+4+4+4+4+4+4)+9+8+7=79$ ช่อง

ด้วยวิธีการนับแบบนี้ จะคาดการณ์ได้ว่าช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ เมื่อ $k = 2t$ ที่ $t \geq 3$ ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(3+3+3+\cdots+3)}_{t-1\text{ ตัว}} + \underbrace{(4+4+4+\cdots+4)}_{2t-2\text{ ตัว}} + (t+3) + (t+2) + (t+1) = 14t - 5 = 7k - 5$ ช่อง

เพื่อพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ เราใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ให้ k เป็นจำนวนนับที่ $k \geq 5$

สมมติว่าถ้า $k = 2t + 1$ และ $t \geq 2$ แล้วช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ $3t + 2$ หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(3+3+3+\cdots+3)}_{t\text{ ตัว}} + \underbrace{(4+4+4+\cdots+4)}_{2t-1\text{ ตัว}} + (t+3) + (t+2) + (t+1)$ ช่อง และถ้า $k = 2t$ และ $t \geq 3$ แล้วช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ $3t$ หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(3+3+3+\cdots+3)}_{t-1\text{ ตัว}} + \underbrace{(4+4+4+\cdots+4)}_{2t-2\text{ ตัว}} + (t+3) + (t+2) + (t+1)$ ช่อง

กรณี $k = 2t + 1$ และ $t \geq 2$ เพื่อให้สะดวกในการนับ จะนับเฉพาะการเดินม้าจากหลักหนึ่งไปยังอีกหลักที่ติดกันเท่านั้น ยกเว้นในหลักสุดท้าย

ในหลักที่ 1 ถึงหลักที่ t ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้อีกตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(3+3+3+\cdots+3)}_{t\text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $t + 1$ ถึงหลักที่ $3t - 1$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(4+4+4+\cdots+4)}_{2t-1\text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $3t$ จะมีม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 4 ช่องบนที่เดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้เพียง 4 ช่อง

ในหลักที่ $3t + 1$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้น 2 ตัวรองสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 4$ ช่อง

ในหลักที่ $3t + 2$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้น 2 ตัวก่อนตัวล่างสุดที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 3$ ช่อง และม้าในหลักนี้ ยังเดินไปหลักเดินไปหลักถัด ๆ ไปโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 2$ ช่อง และได้ช่องที่เดินไปถึงได้รวม $2t + 5$ ช่อง

ดังนั้นผลรวมของช่องที่จะปรากฏเลข $k + 1$ จึงมีทั้งหมด $\underbrace{(3+3+3+\cdots+3)}_{t\text{ ตัว}} + \underbrace{(4+4+4+\cdots+4)}_{2t-1\text{ ตัว}} + 4 + (t+4) + (2t+5) = 14t + 9 = 7(k+1) - 5 = 7k + 2$ ช่อง

กรณี $k = 2t$ และ $t \geq 3$ เพื่อให้สะดวกในการนับ จะนับเฉพาะการเดินม้าจากหลักหนึ่งไปยังอีกหลักที่ติดกันเท่านั้น ยกเว้นในหลักสุดท้าย

ในหลักที่ 1 ถึงหลักที่ $t-1$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้อีกตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นหลักที่ 1 เดินไปทางซ้ายโดยไม่ซ้ำกันได้อีกตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(3+3+3+\cdots+3)}_{t\text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ t ถึงหลักที่ $3t-3$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(4+4+4+\cdots+4)}_{2t-2\text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $3t-2$ จะมีม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 4 ช่องบนที่เดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้เพียง 4 ช่อง

ในหลักที่ $3t-1$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 จากล่างสุดที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t+3$ ช่อง

ในหลักที่ $3t$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 จากล่างสุดที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t+2$ ช่อง และม้าในหลักนี้ ยังเดินไปหลักเดินไปหลักถัด ๆ ไปโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t+1$ ช่อง และได้ช่องที่เดินไปถึงได้รวม $2t+3$ ช่อง

ดังนั้นผลรวมของช่องที่จะปรากฏเลข $k+1$ จึงมีทั้งหมด $\underbrace{(3+3+3+\cdots+3)}_{t\text{ ตัว}} +$

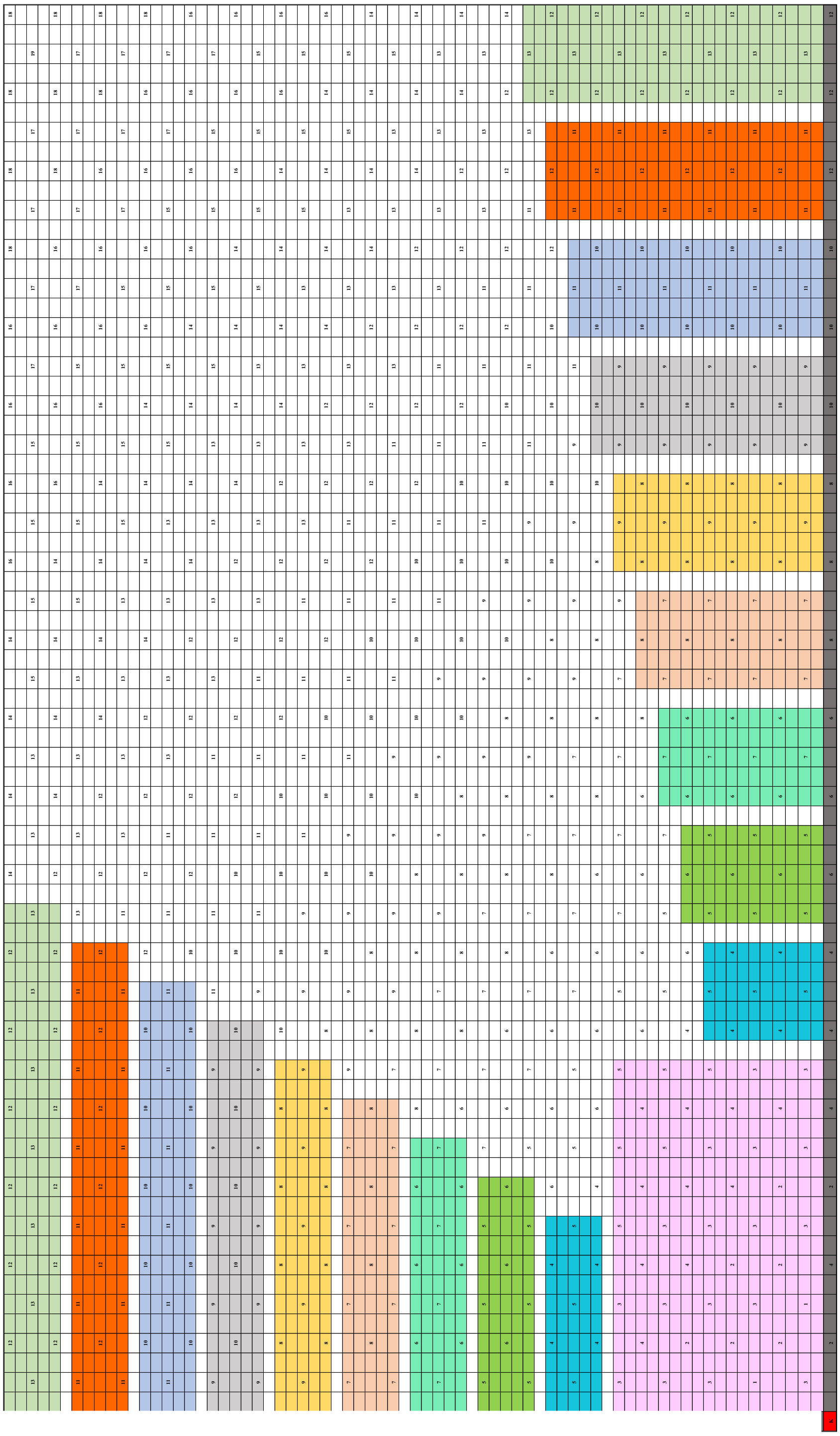
$\underbrace{(4+4+4+\cdots+4)}_{2t-2\text{ ตัว}} + 4 + (t+3) + (2t+3) = 14t+2 = 7(k+1)-5 = 7k+2$ ช่อง

เพราะฉะนั้นโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จึงได้ว่าข้อความคาดการณ์เป็นจริง □

ทฤษฎีบท 3.1

(i) จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2,4)$ และ $(2,6)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เท่ากับ $1, 8, 32, 68, 96$ และ $28k-20$ ช่อง เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4$ และ $k \geq 5$ ตามลำดับ

(ii) จำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2,4)$ และ $(2,6)$ ไปถึงได้ในการเดินเพียง k ครั้งหรือน้อยกว่า k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เท่ากับ $1, 9, 41, 109, 205$ และ $14k^2 - 6k + 5$ ช่อง เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4$ และ $k \geq 5$ ตามลำดับ



รูปที่ 3.4 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, 6)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง เมื่อ $1 \leq k \leq 12$ ในส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K

บทพิสูจน์

(i) ได้โดยตรงจากทฤษฎีบทประกอบ 3.1, 3.2 และ 3.3 และการเดินไปในแต่ละส่วนของกระดานนั้นมีความสมมาตรกันทั้ง 4 ส่วน

(ii) ถ้า $k = 0, 1, 2, 3$ และ 4 จะได้โดยตรงจากทฤษฎีบทประกอบ 3.1 ว่าจำนวนช่องสะสมดังกล่าวคือ $1, 9, 41, 109$ และ 205 ช่อง ตามลำดับ ถ้า $k \geq 5$ จะได้โดยทฤษฎีบท 3.1 (i) ว่าจะได้จำนวนช่องสะสมที่ดังกล่าวสามารถคำนวณโดยตรงได้จาก $205 + \sum_{i=5}^{k}(28i - 20)$ □

4. สูตรของจำนวนช่องสำหรับการเดินม้าแบบ $(\mathbf{2}, \mathbf{8})$

พิจารณาการเดินของม้าแบบ $(2, 8)$ บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ จากจุดเริ่มต้นที่กำหนด เราจะแบ่งกระดานหมากรุกออกเป็น 4 ส่วน ด้วยหลักแนวตั้งและแถวแนวนอนที่ผ่านจุดกำเนิดดังรูปที่ 4.1 จากการพิจารณาด้วยการนับโดยตรงจะได้จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, 8)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ด้วยการนับโดยตรงเมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ และ 8 ดังทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 4.1 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, 8)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เท่ากับ $1, 8, 32, 88, 204, 324, 448, 548$ และ 620 ช่อง เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ และ 8 ตามลำดับ

ในกรณีที่ $k \geq 9$ จะเห็นว่าการเดินไปในแต่ละส่วนของกระดานนั้นมีความสมมาตรกันทั้ง 4 ส่วน และมีสมมาตรกันตามหลักแนวตั้งและแถวแนวนอน ในทิศทางขึ้น ลง ซ้าย และขวา จากจุดเริ่มต้น K อีกด้วย ดังนั้นในการนับจำนวนช่องที่ม้าเดินไปถึงได้ด้วยการเดินเพียง k ครั้ง จึงเพียงพอที่จะแยกพิจารณาจำนวนช่องที่ม้าเดินไปถึงได้ด้วยการเดินเพียง k ครั้ง จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K เท่านั้น

ทฤษฎีบทประกอบ 4.2 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, 8)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง บนส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เท่ากับ $23k - 33$ ช่อง เมื่อ $k \geq 9$

บทพิสูจน์

กรณี 1 $k \geq 9$ เป็นจำนวนเต็มคี่

ให้ $k = 2t + 1$ เมื่อ $t \geq 4$ จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K จะเห็นว่า

ช่องที่กำกับด้วยเลข 9 ปรากฏ 32 หลัก มีอยู่ $(4+4+4+4+4+4+4+4)+(5+4+4)+(6+4+4)+(7+4+4)+(7+4+4)+13+(4+4)+11+4+8+10+4+8+7+7+5=174$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 11 ปรากฏ 40 หลัก มีอยู่ $(4+4+4+4+4+4+4+4+4+4)+(5+4+4)+(6+4+4)+(7+4+4)+(7+4+4)+(7+4+4)+(7+4+4)+14+(4+4)+12+4+9+11+4+9+8+8+6=220$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 13 ปรากฏ 48 หลัก มีอยู่ $(4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4)+(5+4+4)+(6+4+4)+(7+4+4)+(7+4+4)+(7+4+4)+(7+4+4)+(7+4+4)+(7+4+4)+15+(4+4)+13+4+10+12+4+10+9+9+7=266$ ช่อง

ด้วยวิธีการนับแบบนี้ จะคาดการณ์ได้ว่าช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ เมื่อ $k=2t+1$ ที่ $t \geq 4$ ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(4+4+4+\cdots+4)}_{2t\text{ ตัว}}+(5+4+4)+(6+4+4)+\underbrace{((7+4+4)+(7+4+4)+(7+4+4)+\cdots+(7+4+4)}_{2t-6\text{ ตัว}}+(t+9)+(4+4)+(t+7)+4+(t+4)+(t+6)+4+(t+4)+(t+3)+(t+3)+(t+1)=46t-10=23k-33$ ช่อง

กรณี 2 $k \geq 10$ เป็นจำนวนเต็มคู่

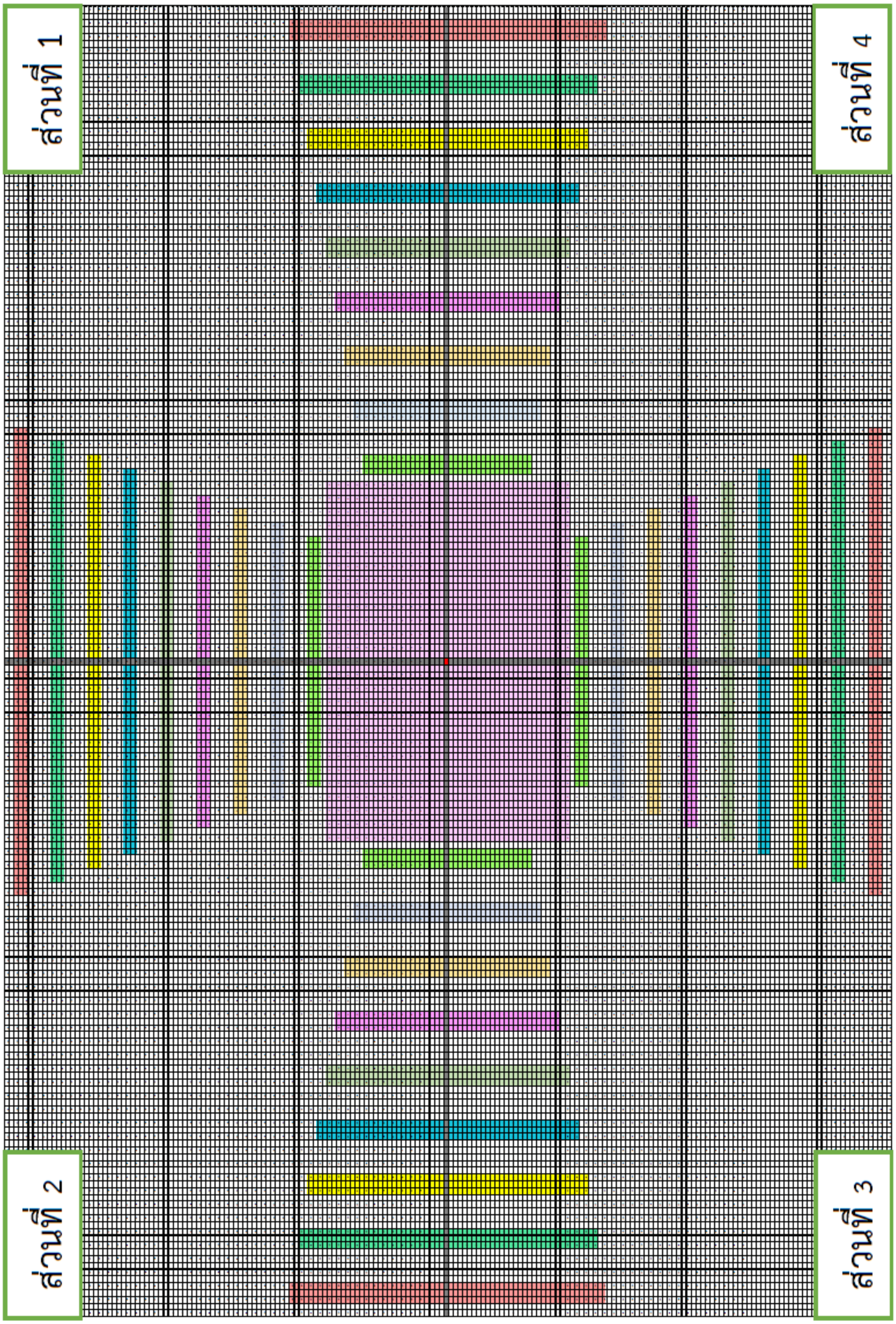
ให้ $k=2t$ เมื่อ $t \geq 5$ จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K จะเห็นว่า

ช่องที่กำกับด้วยเลข 10 ปรากฏ 36 หลัก มีอยู่ $(4+4+4+4+4+4+4+4+4)+(5+4+4)+(6+4+4)+(7+4+4)+(7+4+4)+(7+4+4)+13+(4+4)+12+4+9+10+4+9+7+7+6=197$ ช่อง

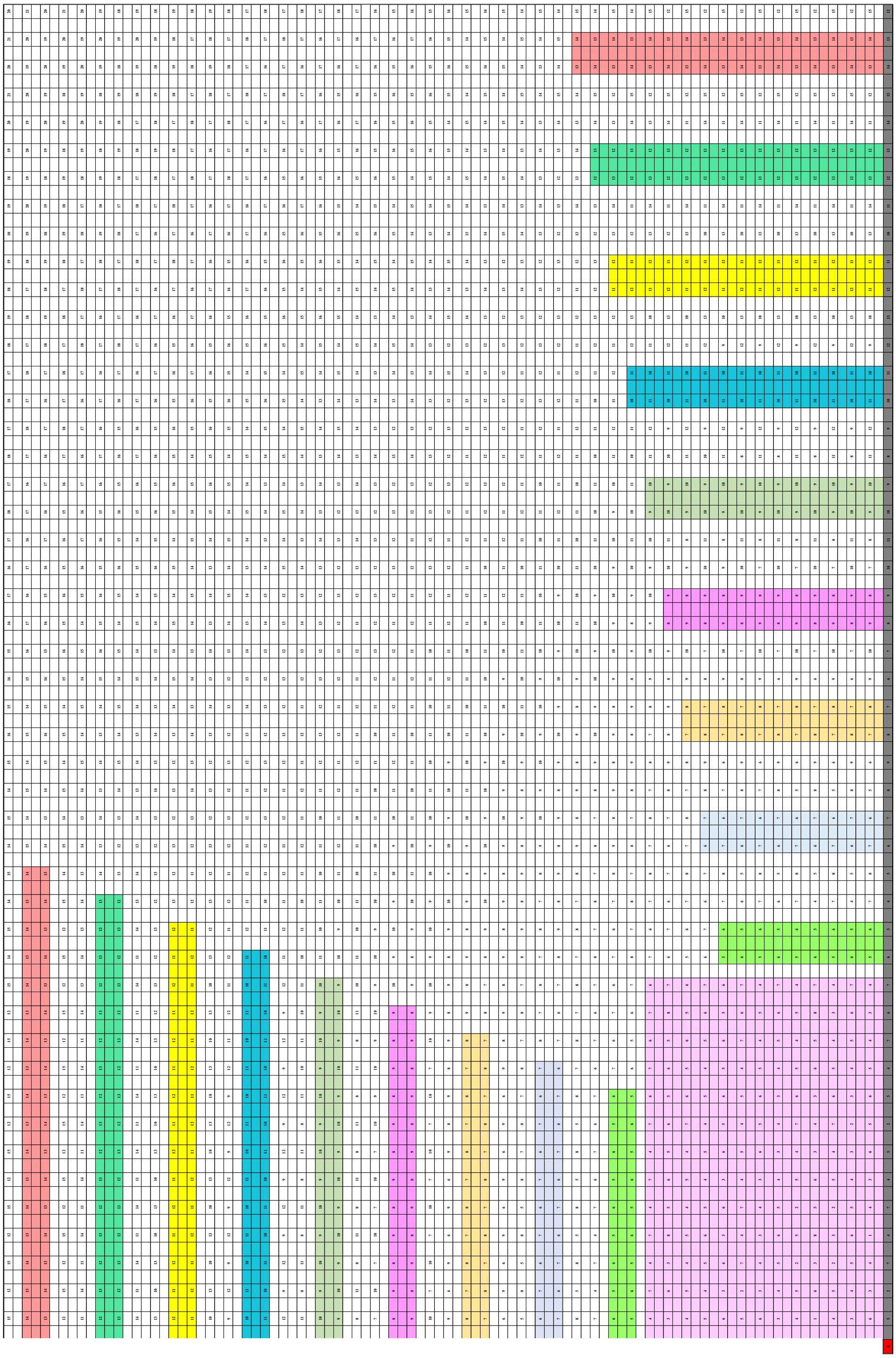
ช่องที่กำกับด้วยเลข 12 ปรากฏ 44 หลัก มีอยู่ $(4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4)+(5+4+4)+(6+4+4)+(7+4+4)+(7+4+4)+(7+4+4)+(7+4+4)+(7+4+4)+14+(4+4)+13+4+10+11+4+10+8+8+7=243$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 14 ปรากฏ 52 หลัก มีอยู่ $(4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4)+(5+4+4)+(6+4+4)+(7+4+4)+(7+4+4)+(7+4+4)+(7+4+4)+(7+4+4)+(7+4+4)+(7+4+4)+15+(4+4)+14+4+11+12+4+11+9+9+8=289$ ช่อง

ด้วยวิธีการนับแบบนี้ จะคาดการณ์ได้ว่าช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ เมื่อ $k=2t$ ที่ $t \geq 5$ ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(4+4+4+\cdots+4)}_{2t-1\text{ ตัว}}+(5+4+4)+(6+4+4)+$



รูปที่ 4.1 การแบ่งกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, 8)$ ออกเป็น 4 ส่วน



รูปที่ 4.2 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, 8)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง เมื่อ $1 \leq k \leq 12$ ในส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K

$\underbrace{((7+4+4)+(7+4+4)+(7+4+4)+\cdots+(7+4+4)}_{2t-7\text{ ตัว}}+(t+8)+(4+4)+$
$(t+7)+4+(t+4)+(t+5)+4+(t+4)+(t+2)+(t+2)+(t+1)=46t-33=23k-33$ ช่อง

เพื่อพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ เราใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ให้ k เป็นจำนวนนับที่ $k\geq 9$

สมมติว่าถ้า $k=2t+1$ และ $t\geq 4$ แล้วช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ $8t$ หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(4+4+4+\cdots+4)}_{2t\text{ ตัว}}+(5+4+4)+(6+4+4)+$
$\underbrace{((7+4+4)+(7+4+4)+(7+4+4)+\cdots+(7+4+4))}_{2t-6\text{ ตัว}}+(t+9)+(4+4)+$
$(t+7)+4+(t+4)+(t+6)+4+(t+4)+(t+3)+(t+3)+(t+1)$ ช่อง และ

ถ้า $k=2t$ และ $t\geq 5$ แล้วช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ $8t-4$ หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน
$\underbrace{(4+4+4+\cdots+4)}_{2t-1\text{ ตัว}}+(5+4+4)+(6+4+4)+$
$\underbrace{((7+4+4)+(7+4+4)+(7+4+4)+\cdots+(7+4+4))}_{2t-7\text{ ตัว}}+(t+8)+(4+4)+$
$(t+7)+4+(t+4)+(t+5)+4+(t+4)+(t+2)+(t+2)+(t+1)$ ช่อง

กรณี $k=2t+1$ และ $t\geq 4$ เพื่อให้สะดวกในการนับ จะนับเฉพาะการเดินม้าจากหลักหนึ่งไปยังอีกหลักที่ติดกันเท่านั้น ยกเว้นในหลักสุดท้าย

ในหลักที่ 1 ถึงหลักที่ $2t$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้อีกตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นหลักที่ 2 จะเดินไปได้ทั้งซ้ายและขวา จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(4+4+4+\cdots+4)}_{2t+1\text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $2t+1$ ถึงหลักที่ $2t+6$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $(5+4+4)+(6+4+4)$ ช่อง

ในหลักที่ $2t+7$ ถึงหลักที่ $8t-12$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{((7+4+4)+(7+4+4)+(7+4+4)+\cdots+(7+4+4))}_{2t-6\text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $8t-11$ จะมีม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 7 ช่องบนที่เดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้เพียง 7 ช่อง

ในหลักที่ $8t-10$ ถึงหลักที่ $8t-9$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $4+4$ ช่อง

ในหลักที่ $8t-8$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 และ 4 จากล่างสุดจะได้ไปได้ตัวละ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t+9$ ช่อง

ในหลักที่ $8t - 7$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 4 ช่อง

ในหลักที่ $8t - 6$ จะมีม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 4 ช่องบนที่เดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้เพียง 4 ช่อง

ในหลักที่ $8t - 5$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 และ 4 จากล่างสุดจะได้ไปได้ตัวละ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 8$ ช่อง

ในหลักที่ $8t - 4$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 4 ช่อง

ในหลักที่ $8t - 3$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 และ 4 จากล่างสุดจะได้ไปได้ตัวละ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 6$ ช่อง

ในหลักที่ $8t - 2$ ม้าจะเดินต่อไปทางซ้ายโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 และ 4 จากล่างสุดจะได้ไปได้ตัวละ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 5$ ช่อง และจะมีม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 4 ช่องบนที่เดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 4 ช่อง ทำให้ผลรวมของช่องที่เดินต่อไปได้ทั้งหมดเป็น $t + 9$ ช่อง

ในหลักที่ $8t - 1$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 และ 4 จากล่างสุดจะได้ไปได้ตัวละ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 5$ ช่อง

ในหลักที่ $8t$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 และ 4 จะได้ไปได้ตัวละ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 3$ ช่อง และม้าจะเดินต่อไปทางซ้ายโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 และ 4 จากล่างสุดจะได้ไปได้ตัวละ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 3$ ช่อง นอกจากนี้ม้าในหลักนี้ ยังเดินไปหลักเดินไปหลักถัด ๆ ไปโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 2$ ช่อง และได้ช่องที่เดินไปถึงได้รวม $3t + 8$ ช่อง

ดังนั้นผลรวมของช่องที่จะปรากฏเลข $k + 1$ จึงมีทั้งหมด $\underbrace{(4 + 4 + 4 + \cdots + 4)}_{2t+1 \text{ ตัว}} + (5 + 4 + 4) +$
$(6 + 4 + 4) + \underbrace{((7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + \cdots + (7 + 4 + 4))}_{2t-6 \text{ ตัว}} + 7 +$
$(4 + 4) + (t + 9) + 4 + 4 + (t + 8) + 4 + (t + 6) + (t + 9) + (t + 5) + (3t + 8) =$
$46t + 13 = 23(k + 1) - 33 = 23k - 10$ ช่อง

กรณี $k = 2t$ และ $t \geq 5$ เพื่อให้สะดวกในการนับ จะนับเฉพาะการเดินม้าจากหลักหนึ่งไปยังอีกหลักที่ติดกันเท่านั้น ยกเว้นในหลักสุดท้าย

ในหลักที่ 1 ถึงหลักที่ $2t-1$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้อีกตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นหลักที่ 2 จะเดินไปได้ทั้งซ้ายและขวา จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(4+4+4+\cdots+4)}_{2t \text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $2t$ ถึงหลักที่ $2t+5$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $(5+4+4)+(6+4+4)$ ช่อง

ในหลักที่ $2t+6$ ถึงหลักที่ $8t-16$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{((7+4+4)+(7+4+4)+(7+4+4)+\cdots+(7+4+4))}_{2t-7 \text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $8t-15$ จะมีม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 7 ช่องบนที่เดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้เพียง 7 ช่อง

ในหลักที่ $8t-14$ ถึงหลักที่ $8t-13$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $4+4$ ช่อง

ในหลักที่ $8t-12$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 และ 4 จากล่างสุดจะได้ไปได้ตัวละ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t+9$ ช่อง

ในหลักที่ $8t-11$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 4 ช่อง

ในหลักที่ $8t-10$ จะมีม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 4 ช่องบนที่เดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้เพียง 4 ช่อง

ในหลักที่ $8t-9$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 และ 4 จากล่างสุดจะได้ไปได้ตัวละ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t+7$ ช่อง

ในหลักที่ $8t-8$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 4 ช่อง

ในหลักที่ $8t-7$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 และ 4 จากล่างสุดจะได้ไปได้ตัวละ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t+6$ ช่อง

ในหลักที่ $8t-6$ ม้าจะเดินต่อไปทางซ้ายโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 และ 4 จากล่างสุดจะได้ไปได้ตัวละ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t+4$ ช่อง และจะมีม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 4

ช่องบนที่เดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 4 ช่อง ทำให้ผลรวมของช่องที่เดินต่อไปได้ทั้งหมดเป็น $t + 8$ ช่อง

ในหลักที่ $8t - 5$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 และ 4 จากล่างสุดจะได้ไปได้ตัวละ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 4$ ช่อง

ในหลักที่ $8t - 4$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 และ 4 จะได้ไปได้ตัวละ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 3$ ช่อง และม้าจะเดินต่อไปทางซ้ายโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่ 3 และ 4 จากล่างสุดจะได้ไปได้ตัวละ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 3$ ช่อง นอกจากนี้ม้าในหลักนี้ ยังเดินไปหลักถัด ๆ ไปโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 1$ ช่อง และได้ช่องที่เดินไปถึงได้รวม $3t + 7$ ช่อง

ดังนั้นผลรวมของช่องที่จะปรากฏเลข $k + 1$ จึงมีทั้งหมด $\underbrace{(4 + 4 + 4 + \cdots + 4)}_{2t\text{ ตัว}} + (5 + 4 + 4) +$
$(6 + 4 + 4) + \underbrace{((7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + (7 + 4 + 4) + \cdots + (7 + 4 + 4))}_{2t-7\text{ ตัว}} + 7 +$
$(4 + 4) + (t + 9) + 4 + 4 + (t + 7) + 4 + (t + 6) + (t + 8) + (t + 4) + (3t + 7) =$
$46t - 10 = 23(k + 1) - 33 = 23k - 10$ ช่อง

เพราะฉะนั้นโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จึงได้ว่าข้อความคาดการณ์เป็นจริง $\square$

ทฤษฎีบท 4.1

(i) จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, 8)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เท่ากับ $1, 8, 32, 88, 204, 324, 448, 548, 620$ และ $92k - 132$ ช่อง เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ และ $k \geq 9$ ตามลำดับ

(ii) จำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ (2,8) ไปถึงได้ในการเดินเพียง k ครั้งหรือน้อยกว่า k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เท่ากับ $1, 9, 41, 129, 333, 657, 1105,$ $1653, 2273$ และ $46k^2 - 86k + 17$ ช่อง เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ และ $k \geq 9$ ตามลำดับ

บทพิสูจน์

(i) ได้โดยตรงจากทฤษฎีบทประกอบ 4.1 และ 4.2 และการเดินไปในแต่ละส่วนของกระดานนั้นมีความสมมาตรกันทั้ง 4 ส่วน

(ii) ถ้า $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ และ 8 จะได้โดยตรงจากทฤษฎีบทประกอบ 4.1 ว่าจำนวนช่องสะสมดังกล่าว คือ $1, 9, 41, 129, 333, 657, 1105, 1653$ และ 2273 ช่อง ตามลำดับ

ถ้า $k \geq 9$ จะได้โดยทฤษฎีบท 4.1 (i) ว่าจะได้จำนวนช่องสะสมที่ดังกล่าวสามารถคำนวณโดยตรงได้จาก $2273 + \sum_{i=9}^{k}(92i - 132)$ ☐

5. ข้อสรุปและข้อเสนอแนะ

บทความฉบับนี้พิจารณาการเดินของม้าหมากรุกแบบ $(2, b)$ สำหรับจำนวนเต็ม $b \in \{2, 4, 6, 8\}$ บนกระดานหมากรุกขนานอนันต์ โดยได้ผลการศึกษาดังต่อไปนี้

b	สูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกสามารถเดินแบบ $(2, b)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง
2	$k = 0$ เดินได้ 1 ช่อง และ $k \geq 1$ เดินได้ $4k$ ช่อง
4 และ 6	$k = 0, 1, 2, 3, 4$ เดินได้ $1, 8, 32, 68, 96$ ช่อง ตามลำดับ และ $k \geq 5$ เดินได้ $28k$ – 20 ช่อง
8	$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ เดินได้ $1, 8, 32, 88, 192, 324, 448, 548, 620$ ช่อง ตามลำดับ และ $k \geq 9$ เดินได้ $92k$ – 132 ช่อง

จากผลการศึกษาที่ได้ ผู้ที่สนใจอาจพบข้อสังเกตบางประการหรืออาจตั้งคำถามเพิ่มเติม เพื่อขยายผลไปสู่โครงงานคณิตศาสตร์ชิ้นใหม่ได้เช่น

1. มีจำนวนเต็มคู่ b คู่ใดอีกหรือไม่ที่สูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกสามารถเดินแบบ $(2, b)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้งเป็นสูตรเดียวกันเหมือน $(2, 4)$ และ $(2, 6)$

2. สูตรทั่วไปของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกสามารถเดินแบบ $(2, b)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้งสำหรับจำนวนเต็มคู่ b ทั้งหมดมีหรือไม่ ถ้ามีสูตรดังกล่าวมีรูปแบบเป็นอย่างไร

3. สูตรของจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, b)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง สำหรับจำนวนเต็มคี่ b มีหรือไม่ ถ้ามีสูตรดังกล่าวมีรูปแบบเป็นอย่างไร แต่ในกรณีนี้ม้าจะเดินไปได้ทั้งช่องขาวและดำ ซึ่งทำให้การนับจำนวนช่องมีความยุ่งยากมากขึ้น

4. สูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกสามารถเดินแบบ (a, b) ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้งโดยที่ a เป็นจำนวนเต็มที่ $a \geq 3$ มีหรือไม่ ถ้ามีสูตรดังกล่าวมีรูปแบบเป็นอย่างไร แต่ในกรณีดังกล่าว

การเดินหนึ่งครั้งของม้าจะออกไปไกลจากจุดเริ่มต้นที่กำหนดมาก ทำให้ต้องสร้างกระดานหมากรุกขนาดใหญ่ และสูตรทั่วไปของจำนวนช่องที่ได้จะเริ่มหาได้เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่มีค่ามาก ๆ

เอกสารอ้างอิง

[1] Chai, G. L. and Ong, S.-H. (2005). Generalized Knight's tours on rectangular chessboard. *Discrete Applied Math*, 150, p. 80 - 89.

[2] Miller, A. M. and Farnsworth, D. L. (2013). Counting the number of squares reachable in k knight's move. *Open J. of Discrete Math*, 3, p. 151 - 154.

[3] Theprod, R. (2018). *Formula for Number of squares Reachable by a Knight*. [Master's Thesis, Ramkhamhaeng university].