วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh 64(698) พฤษภาคม – สิงหาคม 2562
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

เซตย่อยวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย
On Interval Valued Bipolar-Valued Fuzzy Subsets of Left Almost Semigroups

สลิลทิพย์ แดงกองโค และ ไพโรจน์ เยียระยง
Salinthip Daengkongkho[1] and Pairote Yiarayong[2]

[1,2]Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology,
Pibulsongkram Rajabhat University, Phitsanulok 65000

Email: [1]dsalinthip@psru.ac.th [2]pairote0027@hotmail.com

วันที่รับบทความ : 30 เมษายน 2562
วันแก้ไขบทความ : 05 กรกฎาคม 2562
วันตอบรับบทความ : 15 กรกฎาคม 2562

บทคัดย่อ

ในบทความนี้ได้นำเสนอแนวคิดของกึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงและไอดีลทางซ้าย (ขวา) วิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้ายและมีการตรวจสอบสมบัติต่าง ๆ ของสิ่งที่กล่าวมาข้างต้น นอกจากนี้ยังได้หาลักษณะเฉพาะบางประการของไอดีลทางซ้าย (ขวา) วิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย

คำสำคัญ: กึ่งกรุปเกือบทางซ้าย กึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วง ไอดีลทางซ้าย (ขวา) วิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วง กึ่งกรุปเกือบทางซ้ายย่อย

ABSTRACT

In this paper, the notions of interval valued bipolar-valued fuzzy left almost subsemigroups and interval valued bipolar-valued fuzzy left (right) ideals of left almost semigroups are investigated. Moreover, we give some characterization theorems of interval valued bipolar-valued fuzzy left (right) ideals of left almost semigroups.

Keywords: Left almost semigroup, Interval valued bipolar-valued fuzzy left almost subsemigroup, Interval valued bipolar-valued fuzzy left (right) ideal, Left almost subsemigroup

1. บทนำ

ในปี ค.ศ.1965 Zadeh [13] ได้แนะนำแนวคิดของเซตย่อยวิภัชนัย μ ของเซตไม่ว่าง S กล่าวคือฟังก์ชัน $\mu: S \to [0,1]$ เมื่อ $[0,1]$ เป็นช่วงปิดใน $\mathbb{R}$ ในทศวรรษที่ผ่านมาได้มีการศึกษาค้นคว้าและพัฒนาเซตย่อยวิภัชนัยกันอย่างแพร่หลาย โดยโครงสร้างเซตย่อยวิภัชนัยได้เริ่มต้นในการพัฒนาอย่างเป็นระบบในงานวิจัยของ Rosenfeld [9] ในปี ค.ศ.1971 ต่อมาในปี ค.ศ.1994 Zhang [15] ได้เสนอแนวคิดของเซตย่อยวิภัชนัยสองขั้ว ในปี ค.ศ.2019 Arulmozhi และคณะ [2] ได้แนะนำแนวความคิดของไอดีลวิภัชนัยสองขั้ว (η,δ) ค่าช่วง (interval valued (η,δ) bipolar fuzzy ideal), ไบ-ไอดีล (bi-ideal), ไอดีลภายใน (interior ideal) และไอดีลวิภัชนัยสองขั้ว ($(\in,\in\vee q)$-bipolar fuzzy ideal) ใน Γ-กึ่งกรุปอันดับ

ในปี ค.ศ.2012 Yaqoob [10] ได้แนะนำแนวคิดของกึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายวิภัชนัยค่าสองขั้วในกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย นอกจากนี้ได้ศึกษาสมบัติบางประการของไอดีล (ทางขวา, ไบ-, ภายใน) ทางซ้ายวิภัชนัยค่าสองขั้ว (bipolar-valued fuzzy left (right, bi-, interior) ideal) ของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย นอกจากนี้ Faisal และคณะ [5] ได้แนะนำแนวคิดของฟัซซิฟิเคชันค่าสองขั้วใน AG-กรุปพอยด์อันดับ ในปี ค.ศ.2012 Aslam และคณะ [4] ได้นำเสนอแนวความคิดของเซตย่อยวิภัชนัยสองขั้วในกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย นอกจากนี้ได้อธิบายลักษณะเฉพาะบางประการของไอดีล (ทางขวา) ทางซ้ายวิภัชนัยสองขั้วของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย ในปี ค.ศ.2013 Khan และคณะ [7] ได้ให้แนวคิดของกึ่งกรุปเกือบทางซ้ายอันดับวิภัชนัยค่าช่วงและได้หาลักษณะเฉพาะบางประการของกึ่งกรุปเกือบทางซ้ายอันดับปกติภายใน (intra-regular ordered LA-semigroup) ในพจน์ของไอดีล

(ทางขวา) ทางซ้ายวิภัชนัยค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้ายอันดับ นอกจากนี้ Yaqoob และคณะ [10-12] ได้แนะนำแนวคิดของกึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายวิภัชนัยค่าช่วง ไอดีลทางซ้าย ไอดีลทางขวา และไบ-ไอดีลในกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย แนวคิดของเซตวิภัชนัยสหัชญาณนิยมค่าช่วง (interval valued intuitionistic fuzzy set) ในกึ่งกรุปเกือบทางซ้ายถูกนำเสนอโดย Yaqoob ในปี ค.ศ.2013 นอกจากนี้ได้หาลักษณะเฉพาะบางประการของกึ่งกรุปเกือบทางซ้ายปรกติในพจน์ของไอดีลทางซ้ายวิภัชนัยสหัชญาณนิยมค่าช่วง ในปี ค.ศ.2014 Abdullah และคณะ [1] ได้นำเสนอแนวความคิดของไอดีลวิภัชนัย (α,β) ค่าช่วงในกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย

ในบทความนี้ได้ศึกษาพัฒนาขยายแนวความคิดของเซตย่อยวิภัชนัยค่าสองขั้วและเซตย่อยวิภัชนัยค่าช่วงในกึ่งกรุปเกือบทางซ้ายตามแนวทางของ Yaqoob [10-11] และตามแนวทางของ Yaqoob และคณะ [12] นอกจากนี้ได้ตรวจสอบสมบัติต่าง ๆ ของกึ่งกรุปเกือบทางซ้ายวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงและไอดีลทางซ้าย (ขวา) วิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย ยิ่งไปกว่านั้นยังได้หาลักษณะเฉพาะบางประการของไอดีลทางซ้าย (ขวา) วิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย

2. ความรู้พื้นฐาน

ในหัวข้อนี้เราได้ศึกษาบทนิยามและผลลัพธ์บางอย่างที่จำเป็นสำหรับวัตถุประสงค์และการศึกษาในหัวข้อต่อไปของเรา

บทนิยาม 2.1 [6] กำหนดให้ S เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง จะเรียก S ว่า **กึ่งกรุปเกือบทางซ้าย (left almost semigroup)** ถ้ามีฟังก์ชัน $\cdot : S\times S\to S$ โดยที่ $(a,b)\mapsto ab$ สำหรับทุก $a,b\in S$ และมีสมบัติ $(ab)c=(cb)a$ สำหรับทุก $a,b,c\in S$ เรียกสมบัตินี้ว่า **อินเวอร์ทีปทางซ้าย (left invertive)**

บทตั้ง 2.2 [6] กำหนดให้ S เป็นกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย แล้ว $(ab)(cd)=(ac)(bd)$ สำหรับทุก $a,b,c,d\in S$

กำหนดให้ S เป็นกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย จะเรียก S ว่ามีสมบัติ**เอกลักษณ์ทางซ้าย (left identity)** ถ้ามี $e\in S$ ซึ่งทำให้ $ea=a$ สำหรับทุก a ใน S และจะเรียก “ e ” ว่า**เอกลักษณ์ทางซ้าย (left identity)**

บทตั้ง 2.3 [8] กำหนดให้ S จะเป็นกึ่งกรุปเกือบทางซ้ายที่มีเอกลักษณ์ทางซ้าย แล้ว $a(bc)=b(ac)$ สำหรับทุก $a,b,c\in S$

บทตั้ง 2.4 [8] กำหนดให้ S เป็นกึ่งกรุปเกือบทางซ้ายที่มีเอกลักษณ์ทางซ้าย แล้ว $(ab)(cd)=(dc)(ba)$ สำหรับทุก $a,b,c,d\in S$

กำหนดให้ S เป็นกึ่งกรุปเกือบทางซ้ายและ $\varnothing\neq A\subseteq S$ จะเรียก A ว่า **กึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้าย (left almost subsemigroup)** ถ้า $ab\in A$ สำหรับทุก $a,b\in A$ และให้ $\varnothing\neq I\subseteq S$ จะเรียก I ว่า **ไอดีลทางซ้าย (left ideal)** ของ S ถ้า $SI\subseteq I$ จะเรียก I ว่า **ไอดีลทางขวา (right ideal)** ของ S ถ้า $IS\subseteq I$ และจะเรียก I ว่า **ไอดีล (ideal)** ของ S ถ้า I เป็นทั้งไอดีลทางซ้ายและทางขวา

ต่อไปเรากำหนดให้ $a\in[0,1]$ และ $-a\in[-1,0]$ เรานิยาม $a=\left[a^-,a^+\right]$ และ $-a\in\left[-a^-,-a^+\right]$ เมื่อ $0\le a^-\le a^+\le 1$ และ $-1\le -a^-\le -a^+\le 0$ ตามลำดับ นอกจากนี้เรายังกำหนดให้ $D[0,1]$ และ $D[-1,0]$ แทนเซตของช่วงย่อยปิด (closed subintervals) ทั้งหมดของ $[0,1]$ และ $[-1,0]$ ตามลำดับ นั่นคือ $D[0,1]=\{a:a\in[0,1]\}$ และ $D[-1,0]=\{-a:-a\in[-1,0]\}$ ต่อไปเราจะนิยามการดำเนินการ “$\subseteq$”, “$=$”, “$\subset$”, “$\cap$” และ “$\cup$” บน $D[0,1]\left(D[-1,0]\right)$ ดังนี้

1. $a\subseteq\tilde{b}$ ก็ต่อเมื่อ $a^-\le b^-$ และ $a^+\le b^+$ ($-a\subseteq -b$ ก็ต่อเมื่อ $-a^-\le -b^-$ และ $-a^+\le -b^+$)
2. $a=\tilde{b}$ ก็ต่อเมื่อ $a^-=b^-$ และ $a^+=b^+$ ($-a=-b$ ก็ ต่อเมื่อ $-a^-=-b^-$ และ $-a^+=-b^+$)
3. $a\subset\tilde{b}$ ก็ต่อเมื่อ $a^-<b^-$ และ $a^+<b^+$ ($-a\subset -b$ ก็ต่อเมื่อ $-a^-<-b^-$ และ $-a^+<-b^+$)
4. $a\cap\tilde{b}=\left[a^-\wedge b^-,a^+\wedge b^+\right]$ $\left(-a\cap -b=\left[-a^-\wedge -b^-,-a^+\wedge -b^+\right]\right)$
5. $a\cup\tilde{b}=\left[a^-\vee b^-,a^+\vee b^+\right]$ $\left(-a\cup -b=\left[-a^-\vee -b^-,-a^+\vee -b^+\right]\right)$
6. $-a=\left[-a^+,-a^-\right]$

สำหรับทุก $a,\tilde{b}\in D[0,1]\left(-a,-b\in D[-1,0]\right)$ นอกจากนี้ความรู้พื้นฐานอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับเซตย่อยวิภัชนัยค่าช่วงผู้ที่สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ [1, 3, 12]

ข้อสังเกต จากบทนิยามข้างต้นเห็นได้ชัดเจนว่าสำหรับทุก $a,\tilde{b}\in D[0,1]$ จะได้ว่า $a\subseteq\tilde{b}$ ก็ต่อเมื่อ $-\tilde{b}\subseteq -a$

เซตย่อยวิภัชนัยค่าช่วง (interval valued fuzzy subset) μ ของเซต S เป็นฟังก์ชันจาก S ไป $D[0,1]$ [14] และสำหรับทุกเซตย่อยวิภัชนัยค่าช่วง μ และ ν ของ S จะกล่าวว่า $\mu\subseteq\nu$

ถ้า $\mu(x) \subseteq \nu(x)$ สำหรับทุก $x \in S$ ต่อไปเราจะนิยามเซตย่อยวิภัชนัยค่าช่วง $\mu \cap \nu$ และ $\mu \cup \nu$ ของ S ดังนี้

$$(\mu \cap \nu)(x) = \mu(x) \cap \nu(x)$$

และ

$$(\mu \cup \nu)(x) = \mu(x) \cup \nu(x)$$

สำหรับทุก $x \in S$ โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว ถ้า μ_i เป็นเซตย่อยวิภัชนัยค่าช่วงของ S สำหรับทุก $i \in I$ แล้ว $\bigcap_{i \in I} \mu_i$ และ $\bigcup_{i \in I} \mu_i$ จะนิยามโดย

$$\left(\bigcap_{i \in I} \mu_i \right)(x) = \bigcap_{i \in I} \mu_i(x)$$

และ

$$\left(\bigcup_{i \in I} \mu_i \right)(x) = \bigcup_{i \in I} \mu_i(x)$$

3. ผลการวิจัย

ในหัวข้อต่อไปนี้เราจะแนะนำแนวความคิดของเซตย่อยวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย นอกจากนี้ได้ตรวจสอบสมบัติต่าง ๆ ของกึ่งกรุปเกือบทางซ้ายวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงและไอดีลทางซ้าย (ขวา) วิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย โดยเริ่มต้นจากการกำหนดบทนิยามของเซตย่อยวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วง ดังนี้

บทนิยาม 3.1 เซตย่อยวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วง (interval valued bipolar-valued fuzzy subset) μ ของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย S นิยามโดย

$$\mu = \left\{ (x, \mu^{+}(x), \mu^{-}(x)) : x \in S \right\}$$

โดยที่ $\mu^{+} : S \to D[0,1]$ และ $\mu^{-} : S \to D[-1,0]$

ข้อสังเกต จากบทนิยาม 3.1 เห็นได้ชัดเจนว่า ถ้า $f^{-}(x) = [0,0]$ สำหรับทุก $x \in S$ แล้ว

$$f = \left\{ (x, f^{+}(x), f^{-}(x)) : x \in S \right\}$$

จะเป็นเซตย่อยวิภัชนัยค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย S

ข้อตกลง 1. เพื่อความสะดวกในบทความนี้จะเขียนแทน $\mu=\left\{(x,\mu^{+}(x),\mu^{-}(x)):x\in S\right\}$ ด้วย $\mu=(\mu^{+},\mu^{-})$ ยิ่งไปกว่านั้น $\mu:S\to D[-1,1]$ เมื่อ $D[-1,1]$ แทนเซตของช่วงย่อยปิดทั้งหมดของ $[-1,1]$

2. จะนิยาม**เซตย่อยวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วง** $\Theta=(\Theta^{+},\Theta^{-})$ ในกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย S คือ $\Theta^{+}(x)=[1,1]$ และ $\Theta^{-}(x)=[-1,-1]$ สำหรับทุก $x\in S$

บทนิยาม 3.2 กำหนดให้ S เป็นกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย $\mu=(\mu^{+},\mu^{-})$ และ $\nu=(\nu^{+},\nu^{-})$ เป็นเซตย่อยวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของ S **ผลคูณ (product)** ของ μ กับ ν เขียนแทนด้วย $\mu\odot\nu$ นิยามโดย

$$(\mu^{+}\circ\nu^{+})(x)=\begin{cases}\bigcup\limits_{x=yz}\left(\mu^{+}(y)\cap\nu^{+}(z)\right) & ;\ \text{เมื่อ}\quad y,z\in S \quad \text{โดยที่} \quad x=yz\\ [0,0] & ;\ \text{กรณีอื่น ๆ}\end{cases}$$

และ

$$(\mu^{-}\circ\nu^{-})(x)=\begin{cases}\bigcap\limits_{x=yz}\left(\mu^{-}(y)\cup\nu^{-}(z)\right) & ;\ \text{เมื่อ}\quad y,z\in S \quad \text{โดยที่} \quad x=yz\\ [0,0] & ;\ \text{กรณีอื่น ๆ}\end{cases}$$

ทฤษฎีบท 3.3 ถ้า $\mu=(\mu^{+},\mu^{-}),\nu=(\nu^{+},\nu^{-})$ และ $\omega=(\omega^{+},\omega^{-})$ เป็นเซตย่อยวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย S แล้ว $\left(\mu\odot\nu\right)\odot\omega=\left(\omega\odot\nu\right)\odot\mu$

บทพิสูจน์ เริ่มต้นจะแสดงว่า $\left(\mu^{+}\circ\nu^{+}\right)\circ\omega^{+}\subseteq\left(\omega^{+}\circ\nu^{+}\right)\circ\mu^{+}$

ให้ $x\in S$ โดยบทนิยามผลคูณจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\left(\left(\mu^{+}\circ\nu^{+}\right)\circ\omega^{+}\right)(x) &\subseteq\bigcup_{x=yz}\left(\left(\bigcup_{y=ab}\left(\mu^{+}(a)\cap\nu^{+}(b)\right)\right)\cap\omega^{+}(z)\right)\\ &=\bigcup_{x=(ab)z}\left(\left(\mu^{+}(a)\cap\nu^{+}(b)\right)\cap\omega^{+}(z)\right)\\ &=\bigcup_{x=(zb)a}\left(\left(\omega^{+}(z)\cap\nu^{+}(b)\right)\cap\mu^{+}(a)\right)\\ &\subseteq\bigcup_{x=(zb)a}\left(\left(\bigcup_{zb=cd}\left(\omega^{+}(c)\cap\nu^{+}(d)\right)\right)\cap\mu^{+}(a)\right)\\ &=\bigcup_{x=wa}\left((\omega^{+}\circ\nu^{+})(w)\cap\mu^{+}(a)\right)\ =\left(\left(\omega^{+}\circ\nu^{+}\right)\circ\mu^{+}\right)(x)\end{aligned}$$

จึงสรุปได้ว่า $\left(\mu^{+}\circ\nu^{+}\right)\circ\omega^{+}\subseteq\left(\omega^{+}\circ\nu^{+}\right)\circ\mu^{+}$ ในทำนองเดียวกันเราสามารถแสดงได้ว่า $\left(\omega^{+}\circ\nu^{+}\right)\circ\mu^{+}\subseteq\left(\mu^{+}\circ\nu^{+}\right)\circ\omega^{+}$ นั่นคือ $\left(\mu^{+}\circ\nu^{+}\right)\circ\omega^{+}=\left(\omega^{+}\circ\nu^{+}\right)\circ\mu^{+}$ ต่อไปจะแสดงว่า $\left(\mu^{-}\circ\nu^{-}\right)\circ\omega^{-}=\left(\omega^{-}\circ\nu^{-}\right)\circ\mu^{-}$

กำหนดให้ $x\in S$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\left(\left(\mu^{-}\circ\nu^{-}\right)\circ\omega^{-}\right)(x) &\supseteq \bigcap_{x=yz}\left(\left(\bigcap_{y=ab}\left(\mu^{-}(a)\cup\nu^{-}(b)\right)\right)\cup\omega^{-}(z)\right)\\
&= \bigcap_{x=(ab)z}\left(\left(\mu^{-}(a)\cup\nu^{-}(b)\right)\cup\omega^{-}(z)\right)\\
&= \bigcap_{x=(zb)a}\left(\left(\omega^{-}(z)\cup\nu^{-}(b)\right)\cup\mu^{-}(a)\right)\\
&\supseteq \bigcap_{x=(zb)a}\left(\left(\bigcap_{zb=cd}\left(\omega^{-}(c)\cup\nu^{-}(d)\right)\right)\cup\mu^{-}(a)\right)\\
&= \bigcap_{x=wa}\left((\omega^{-}\circ\nu^{-})(w)\cup\mu^{-}(a)\right)\\
&= \left(\left(\omega^{-}\circ\nu^{-}\right)\circ\mu^{-}\right)(x)
\end{aligned}$$

นั่นคือ $\left(\mu^{-}\circ\nu^{-}\right)\circ\omega^{-}\supseteq\left(\omega^{-}\circ\nu^{-}\right)\circ\mu^{-}$ ในทำนองเดียวกันเราสามารถแสดงได้ว่า $\left(\mu^{-}\circ\nu^{-}\right)\circ\omega^{-}\subseteq\left(\omega^{-}\circ\nu^{-}\right)\circ\mu^{-}$ จึงได้ว่า $\left(\mu^{-}\circ\nu^{-}\right)\circ\omega^{-}=\left(\omega^{-}\circ\nu^{-}\right)\circ\mu^{-}$ จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า $\left(\mu\odot\nu\right)\odot\omega=\left(\omega\odot\nu\right)\odot\mu$ □

ข้อสังเกต กำหนดให้ $F(S)$ คือเซตของทุกเซตย่อยวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย S โดยทฤษฎีบท 3.3 จะได้ว่า $\left(F(S),\odot\right)$ เป็นกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย

ทฤษฎีบท 3.4 ถ้า $\mu=(\mu^{+},\mu^{-}),\nu=(\nu^{+},\nu^{-}),\omega=(\omega^{+},\omega^{-})$ และ $\xi=(\xi^{+},\xi^{-})$ เป็นเซตย่อยวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงในกึ่งกรุปเกือบทางซ้ายที่มีเอกลักษณ์ทางซ้าย S แล้ว

1. $\mu\odot\left(\nu\odot\omega\right)=\nu\odot\left(\mu\odot\omega\right)$
2. $\left(\mu\odot\nu\right)\odot\left(\omega\odot\xi\right)=\left(\xi\odot\omega\right)\odot\left(\nu\odot\mu\right)$

บทพิสูจน์ สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกันกับบทพิสูจน์ของทฤษฎีบท 3.3 □

บทนิยาม 3.5 กำหนดให้ $\mu=(\mu^{+},\mu^{-})$ เป็นเซตย่อยวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย S จะเรียก $\mu=(\mu^{+},\mu^{-})$ ว่า **กึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วง (interval valued bipolar-valued fuzzy left almost subsemigroup)** ของ S ถ้า

$$\mu^{+}(xy)\supseteq\mu^{+}(x)\cap\mu^{+}(y)$$

และ

$$\mu^{-}(xy)\subseteq\mu^{-}(x)\cup\mu^{-}(y)$$

สำหรับทุก $x,y\in S$

บทนิยาม 3.6 กำหนดให้ $\mu=(\mu^{+},\mu^{-})$ เป็นเซตย่อยวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย S จะเรียก $\mu=(\mu^{+},\mu^{-})$ ว่า **ไอดีลทางซ้าย [ขวา] วิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วง (interval valued bipolar-valued fuzzy left [right] ideal)** ของ S ถ้า

$$\mu^{+}(xy)\supseteq\mu^{+}(y)\left[\mu^{+}(xy)\supseteq\mu^{+}(x)\right]$$

และ

$$\mu^{-}(xy)\subseteq\mu^{-}(y)\left[\mu^{-}(xy)\subseteq\mu^{-}(x)\right]$$

สำหรับทุก $x,y\in S$

และถ้า $\mu=(\mu^{+},\mu^{-})$ เป็นทั้งไอดีลทางซ้ายวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงและไอดีลทางขวาวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของ S แล้วจะเรียก $\mu=(\mu^{+},\mu^{-})$ ว่า **ไอดีลวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วง (interval valued bipolar-valued fuzzy ideal)** ของ S

ข้อสังเกต จากบทนิยาม 3.6 เห็นได้ชัดเจนว่า $\mu=(\mu^{+},\mu^{-})$ เป็นไอดีลวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย S ถ้า $\mu^{+}(xy)\supseteq\mu^{+}(x)\cup\mu^{+}(y)$ และ $\mu^{-}(xy)\subseteq\mu^{-}(x)\cap\mu^{-}(y)$ สำหรับทุก $x,y\in S$ และทุกไอดีลทางซ้าย [ขวา] วิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของ S จะเป็นกึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของ S เสมอ

ทฤษฎีบท 3.7 ถ้า $\mu=(\mu^{+},\mu^{-})$ เป็นเซตย่อยวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้ายมีเอกลักษณ์ทางซ้าย S แล้วข้อความต่อไปนี้เป็นจริงเสมอ

1. $\mu=(\mu^{+},\mu^{-})$ เป็นกึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของ S ก็ต่อเมื่อ $\mu^{+}\circ\mu^{+}\subseteq\mu^{+}$ และ $\mu^{-}\subseteq\mu^{-}\circ\mu^{-}$

2. $\mu=(\mu^{+},\mu^{-})$ เป็นไอดีลทางซ้ายวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของ S ก็ต่อเมื่อ $\Theta^{+}\circ\mu^{+}\subseteq\mu^{+}$ และ $\mu^{-}\subseteq\Theta^{-}\circ\mu^{-}$

3. $\mu=(\mu^{+},\mu^{-})$ เป็นไอดีลทางขวาวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของ S ก็ต่อเมื่อ $\mu^{+}\circ\Theta^{+}\subseteq\mu^{+}$ และ $\mu^{-}\subseteq\Theta^{-}\circ\mu^{-}$

4. $\mu=(\mu^{+},\mu^{-})$ เป็นไอดีลวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของ S ก็ต่อเมื่อ $\Theta^{+}\circ\mu^{+}\subseteq\mu^{+}$, $\mu^{-}\subseteq\Theta^{-}\circ\mu^{-}$, $\mu^{+}\circ\Theta^{+}\subseteq\mu^{+}$ และ $\mu^{-}\subseteq\Theta^{-}\circ\mu^{-}$

บทพิสูจน์

1. สมมติให้ $\mu=(\mu^{+},\mu^{-})$ เป็นกึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของ S
ให้ $x\in S$ พิจารณา

$$\left(\mu^{-}\circ\mu^{-}\right)(x)\supseteq\bigcap_{x=yz}\left(\mu^{-}(y)\cup\mu^{-}(z)\right)\supseteq\bigcap_{x=yz}\mu^{-}(yz)=\mu^{-}(x)$$

ดังนั้น $\mu^{-}\subseteq\mu^{-}\circ\mu^{-}$

ในการแสดงว่า $\mu^{+}\circ\mu^{+}\subseteq\mu^{+}$ ก็สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกัน

สมมติให้ $\mu^{+}\circ\mu^{+}\subseteq\mu^{+}$ และ $\mu^{-}\subseteq\mu^{-}\circ\mu^{-}$ ให้ $x,y\in S$ พิจารณา

$$\mu^{-}(xy)\subseteq\left(\mu^{-}\circ\mu^{-}\right)(xy)=\bigcap_{xy=ab}\left(\mu^{-}(a)\cup\mu^{-}(b)\right)\subseteq\mu^{-}(x)\cup\mu^{-}(y)$$

ดังนั้น $\mu^{-}(xy)\subseteq\mu^{-}(x)\cup\mu^{-}(y)$

ในการแสดงว่า $\mu^{+}(xy)\supseteq\mu^{+}(x)\cap\mu^{+}(y)$ ก็สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกัน โดยบทนิยาม 3.5 จะได้ว่า $\mu=(\mu^{+},\mu^{-})$ เป็นกึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของ S

2. สมมติให้ $\mu=(\mu^{+},\mu^{-})$ เป็นไอดีลทางซ้ายวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของ S

ให้ $x\in S$ ถ้า $\mu^{-}(x)=[0,0]$ แล้ว $\mu^{-}(x)\supseteq\left(\Theta^{-}\circ\mu^{-}\right)(x)$ พิจารณา

$$\begin{aligned}\left(\Theta^{-}\circ\mu^{-}\right)(x)&\supseteq\bigcap_{x=yz}\left(\Theta^{-}(y)\cup\mu^{-}(z)\right)=\bigcap_{x=yz}\left([-1,-1]\cup\mu^{-}(z)\right)\\&=\bigcap_{x=yz}\mu^{-}(z)\supseteq\bigcap_{x=yz}\mu^{-}(yz)=\mu^{-}(x)\end{aligned}$$

จึงได้ว่า $\mu^{-}\subseteq\Theta^{-}\circ\mu^{-}$

ในการแสดงว่า $\Theta^{+}\circ\mu^{+}\subseteq\mu^{+}$ ก็สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกัน

สมมติให้ $\Theta^{+}\circ\mu^{+}\subseteq\mu^{+}$ และ $\mu^{-}\subseteq\Theta^{-}\circ\mu^{-}$

ให้ $x, y \in S$ พิจารณา

$$\mu^-(xy) \subseteq \left(\Theta^- \circ \mu^-\right)(xy) = \bigcap_{xy=ab}\left(\Theta^-(a) \cup \mu^-(b)\right) \subseteq \Theta^-(x) \cup \mu^-(y)$$

$$= [-1,-1] \cup \mu^-(y) = \mu^-(y)$$

ดังนั้น $\mu^-(xy) \subseteq \mu^-(y)$

ในการแสดงว่า $\mu^+(xy) \supseteq \mu^+(y)$ ก็สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกัน โดยบทนิยาม 3.6 จะได้ว่า $\mu = (\mu^+, \mu^-)$ เป็นไอดีลทางซ้ายวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของ S

3. สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกันกับข้อ 2

4. เป็นผลมาจากข้อ 2 และข้อ 3 □

ทฤษฎีบท 3.8 ถ้า S เป็นกึ่งกรุปเกือบทางซ้ายที่มีเอกลักษณ์ทางซ้าย แล้ว $\Theta \odot \Theta = \Theta$

บทพิสูจน์ เห็นได้ชัดเจนว่า $x = ex$ สำหรับทุก $x \in S$ เมื่อ e เป็นเอกลักษณ์ทางซ้ายของ S ดังนั้น

$$\left(\Theta^+ \circ \Theta^+\right)(x) = \bigcup_{x=ex}\left(\Theta^+(e) \cap \Theta^+(x)\right) \supseteq \Theta^+(e) \cap \Theta^+(x) = [1,1]$$

นั่นคือ $\left(\Theta^+ \circ \Theta^+\right)(x) = \Theta^+(x)$ สำหรับทุก $x \in S$ พิจารณา

$$\left(\Theta^- \circ \Theta^-\right)(x) = \bigcap_{x=ex}\left(\Theta^-(e) \cup \Theta^-(x)\right) \subseteq \Theta^-(e) \cup \Theta^-(x) = [-1,-1]$$

สำหรับทุก $x \in S$

แสดงว่า $\left(\Theta^- \circ \Theta^-\right)(x) = \Theta^-(x)$ สำหรับทุก $x \in S$ จึงสามารถสรุปได้ว่า $\Theta \odot \Theta = \Theta$ □

ทฤษฎีบท 3.9 กำหนดให้ $\alpha, \beta \in D[0,1]$ ซึ่ง $\beta \subseteq \alpha$ และให้ ${}^{\alpha}_{\beta}\mu_A = \left({}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^+, {}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^-\right)$ เป็นเซตย่อยวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของกึ่งกรุปเกือบทางซ้าย S นิยามโดย

$${}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^+(x) = \begin{cases} \alpha & ; x \in A \\ \beta & ; x \notin A \end{cases}$$

และ

$${}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^-(x) = \begin{cases} -\alpha & ; x \in A \\ -\beta & ; x \notin A \end{cases}$$

จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงเสมอ

1. A เป็นกึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายของ S ก็ต่อเมื่อ ${}^{\alpha}_{\beta}\mu_A = \left({}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^+, {}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^-\right)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของ S

2. A เป็นไอดีลทางซ้ายของ S ก็ต่อเมื่อ ${}^{\alpha}_{\beta}\mu_A = \left({}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^+, {}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^-\right)$ เป็นไอดีลทางซ้ายวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของ S

3. A เป็นไอดีลทางขวาของ S ก็ต่อเมื่อ ${}^{\alpha}_{\beta}\mu_A = \left({}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^+, {}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^-\right)$ เป็นไอดีลทางขวาวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของ S

4. A เป็นไอดีลของ S ก็ต่อเมื่อ ${}^{\alpha}_{\beta}\mu_A = \left({}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^+, {}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^-\right)$ เป็นไอดีลวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของ S

พิสูจน์

1. สมมติให้ A เป็นกึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายของ S

ให้ $x, y \in S$

ถ้า $x \notin A$ หรือ $y \notin A$ แล้ว ${}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^-(x) = -\beta$ หรือ ${}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^-(y) = -\beta$

ดังนั้น ${}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^-(xy) \subseteq -\beta = {}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^-(x) \cup {}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^-(y)$

ถ้า $x \in A$ และ $y \in A$ แล้ว $xy \in A$ จึงทำให้ได้ว่า ${}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^-\left(xy\right) = -\alpha$ ดังนั้น

$$ {}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^-(xy) = -\alpha = -\alpha \cup -\alpha = {}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^-(x) \cup {}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^-(y) $$

จึงสรุปได้ว่า ${}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^-(xy) \subseteq {}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^-(x) \cup {}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^-(y)$

ในการแสดงว่า ${}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^+(xy) \supseteq {}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^+(x) \cap {}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^+(y)$ ก็สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกัน จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า ${}^{\alpha}_{\beta}\mu_A = \left({}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^+, {}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^-\right)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของ S

สมมติให้ ${}^{\alpha}_{\beta}\mu_A = \left({}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^+, {}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^-\right)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของ S

ให้ $x, y \in A$ พิจารณา ${}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^-(xy) \subseteq {}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^-(x) \cup {}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^-(y) = -\alpha \cup -\alpha = -\alpha$

นั่นคือ ${}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^-(xy) = -\alpha$ ดังนั้น $xy \in A$ จึงสรุปได้ว่า A เป็นกึ่งกรุปย่อยเกือบทางซ้ายของ S

2. สมมติให้ A เป็นไอดีลทางซ้ายของ S

ให้ $x, y \in S$

ถ้า $x \notin A$ แล้ว ${}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^-(x) = -\beta$ ดังนั้น ${}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^-(xy) \subseteq -\beta = {}^{\alpha}_{\beta}\mu_A^-(y)$

ถ้า $x \in A$ แล้ว $xy \in A$ ทำให้ได้ว่า ${}_{\beta}^{\alpha}\mu_A^-(xy) = -\alpha$ ดังนั้น ${}_{\beta}^{\alpha}\mu_A^-(xy) = -\alpha \subseteq {}_{\beta}^{\alpha}\mu_A^-(y)$ จึงทำให้สามารถสรุปได้ว่า ${}_{\beta}^{\alpha}\mu_A^-(xy) \subseteq {}_{\beta}^{\alpha}\mu_A^-(y)$

ในการแสดงว่า ${}_{\beta}^{\alpha}\mu_A^+(xy) \supseteq {}_{\beta}^{\alpha}\mu_A^-(y)$ ก็สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกัน จากที่กล่าวมาสารถสรุปได้ว่า ${}_{\beta}^{\alpha}\mu_A = \left({}_{\beta}^{\alpha}\mu_A^+, {}_{\beta}^{\alpha}\mu_A^-\right)$ เป็นไอดีลทางซ้ายวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของ S

สมมติให้ ${}_{\beta}^{\alpha}\mu_A = \left({}_{\beta}^{\alpha}\mu_A^+, {}_{\beta}^{\alpha}\mu_A^-\right)$ เป็นไอดีลทางซ้ายวิภัชนัยค่าสองขั้วค่าช่วงของ S

ให้ $x \in A, s \in S$ เนื่องจาก ${}_{\beta}^{\alpha}\mu_A^-(sx) \subseteq {}_{\beta}^{\alpha}\mu_A^-(x) = -\alpha$ นั่นคือ ${}_{\beta}^{\alpha}\mu_A^-(sx) = -\alpha$ ดังนั้น $sx \in A$

จึงสรุปได้ว่า A เป็นไอดีลทางซ้ายของ S

3. สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกันกับข้อ 2

4. เป็นผลมาจากข้อ 2 และข้อ 3 □

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบท 3.9 เห็นได้ชัดเจนว่า ${}_{\tilde{0}}^{\tilde{1}}\mu_S = \Theta$

เอกสารอ้างอิง

[1] Abdullah, S., Aslam, S. and Amin, N. (2014). LA-Semigroup Characterized by the Properties of Interval Valued (α,β)-Fuzzy Ideal. *Journal of Applied Mathematics and Informatics*, 32 (3 - 4), p. 405 - 426.

[2] Arulmozhi, K., Chinnadurai, V. and Swaminathan, A. (2019). Interval valued Bipolar Fuzzy Ideals in Ordered Γ-Semigroups. *Journal of the International Mathematical Virtual Institute*, 9, p. 1 - 17.

[3] Aslam, M., Abdullah, S. and Aslam, S. (2014). Characterization of Regular LA-Semigroups by Interval-Valued (α,β)-Fuzzy Ideals. *Afrika. Matematika.*, 25, p. 501 - 518.

[4] Aslam, M., Abdullah, S. and Masoo, M. (2012). Bipolar Fuzzy Ideals in LA-Semigroups. *World Applied Sciences Journa*l, 17 (12), p. 1769 - 1782.

[5] Faisal, Y. Yaqoob, N. and Saeid, A. B. (2012). Some Results in Bipolar-Valued Fuzzy Ordered AG-Groupoids. *Discussiones Mathematica General Algebra and Applications*, 32, p. 55 - 76

[6] Kazim, M. A. and Naseerudin, M. (1972). On Almost-Semigroup. *The Aligarh Bulletin of Mathemarics*, 2, p. 1 - 7.

[7] Khan, A., Faisal, Khan, W. and Yaqoob, N. (2013). Ordered LA-Semigroups in Terms of Interval Valued Fuzzy Ideals. *Journal of Advanced Research in Pure Mathematics*, 5(1), p. 100 – 117.

[8] Mushtaq, Q. and Yusuf, S.M. (1979). On Locally Associative LA-Semigroups. *Journal of Natural Sciences and Mathematics.*, 19, p. 57 - 62.

[9] Rosenfeld, A. (1971). Fuzzy Groups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 35, p. 512 - 517.

[10] Yaqoob, N. (2012). Bipolar-Valued Fuzzy Ideals in LA-Semigroups, *Journal of Advanced Studies in Topology*, 3(1), p. 60 - 71.

[11] Yaqoob, N. (2013). Interval Valued Intuitionistic Fuzzy Ideals of Regular LA-Semigroups. *Thai Journal of Mathematics*, 11 (3), p. 683 – 695.

[12] Yaqoob, N., Chinram, R. and Ghareeb, A. (2013). Left Almost Semigroups Characterized by Their Interval Valued Fuzzy Ideals. *The Aligarh Bulletin of Mathemarics,* 24, p. 231 - 245.

[13] Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8, p. 338 - 353.

[14] Zadeh, L.A. (1975). The Concept of a Linguistic Variable and Its Application to Approximate Reasoning. *Information Sciences,* 8, p. 199 - 249.

[15] Zhang, W. R. (1994). Bipolar Fuzzy Sets. *Proceedings of FUZZ-IEEE*, p. 835 - 840.