วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh 64(698) พฤษภาคม – สิงหาคม 2562

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

สู่เป้าหมายการออมด้วยลำดับเรขาคณิต

Achieve the Saving Goal by Geometric Sequences

ยุวรีย์ พันธ์กล้า และ กฤษณะ เนียมมณี

Yuwaree Punkla[1,*] and Kritsana Neammanee[2]

[1,2]Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science, Chulalongkorn University, Bangkok, 10330

Email: [1]Yuwaree.P@chula.ac.th [2]Kritsana.N@chula.ac.th

วันที่รับบทความ : 10 เมษายน 2562

วันแก้ไขบทความ : 23 เมษายน 2562

วันตอบรับบทความ : 4 มิถุนายน 2562

บทคัดย่อ

ในบทความนี้ เรานำความรู้เรื่องลำดับเรขาคณิตมาประยุกต์ใช้ในการคำนวณดอกเบี้ย เพื่อวางแผนการออมสำหรับอนาคต

คำสำคัญ: ลำดับเรขาคณิต ดอกเบี้ย ดอกเบี้ยทบต้น

ABSTRACT

In this paper, geometric series is applied for calculating interest in order to obtain the savings plan for the future.

Keywords: geometric series, interest, compound interest

---

* Corresponding author

1. บทนำ

ในปัจจุบันสังคมไทยกำลังเข้าสู่สังคมผู้สูงอายุ นั่นคือมีประชากรที่อายุมากกว่า 60 ปี เกินกว่าร้อยละ 10 ของประชากรทั้งหมด (ข้อมูลจากสำนักงานสถิติแห่งชาติ) ซึ่งหลังจากเกษียณนั้นผู้สูงอายุส่วนใหญ่จะหาช่องทางในการหารายได้ได้น้อยกว่าก่อนเกษียณ ธนาคารแห่งประเทศไทยได้ทำสถิติเกี่ยวกับแหล่งรายได้หลักในการดำรงชีวิตของผู้สูงอายุ ดังนี้

แหล่งรายได้หลักในการดำรงชีวิตของผู้สูงอายุ	
รายการ	**สัดส่วน (%)**
รายได้จากบุตร	36.7
รายได้จากการทำงานของผู้สูงอายุเอง	33.9
เบี้ยยังชีพจากราชการ	14.8
เงินบำเหน็จบำนาญ	4.9
รายได้จากคู่สมรส	4.3
ดอกเบี้ยเงินออมและการขายสินทรัพย์ที่มีอยู่	3.9
อื่น ๆ	1.5
รวม	**100**

ที่มา : ผลการสำรวจประชากรสูงอายุในประเทศไทย ปี 2557, สำนักงานสถิติแห่งชาติ

จากตารางข้างต้นจะเห็นได้ว่ารายได้ส่วนใหญ่ของผู้สูงอายุมาจากรายได้ที่ได้รับจากบุตรและการทำงานของผู้สูงอายุเอง แต่เนื่องด้วยสภาพสังคมที่เป็นครอบครัวเดี่ยวและการมีอายุขัยเฉลี่ยที่สูงขึ้นของผู้สูงอายุ การพึ่งพารายได้หลักจากสองส่วนนี้จึงไม่เป็นคำตอบที่เหมาะสมมากนัก การวางแผนการออมเพื่อไว้ใช้จ่ายในอนาคตจึงเป็นเรื่องสำคัญ ในบทความนี้ผู้เขียนจะนำความรู้เรื่องลำดับเรขาคณิตมาคำนวณดอกเบี้ย เพื่อจะได้วางแผนการออมให้เพียงพอสำหรับการใช้จ่ายในอนาคต

2. ลำดับเรขาคณิต

นาย ก นำเงินไปฝากธนาคารทุกเดือนโดยเริ่มต้นเดือนแรก 100 บาท และเพิ่มขึ้นเท่าตัวทุกเดือน เราจะได้ตารางเงินฝากในแต่ละเดือน (ไม่รวมดอกเบี้ย) ดังต่อไปนี้

เดือนที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
เงินฝาก	100	200	400	800	1,600	3,200	…	…	…	…

จากตารางข้างต้น เราจะเห็นได้ว่าจำนวนเงินรวมในแต่ละเดือนสามารถนำมาเขียนเรียงกันได้ดังนี้

100, 200, 400, 800, 1,600, …

การเขียนดังกล่าวข้างต้นเป็นที่เข้าใจตรงกันว่า พจน์แรกคือเงินฝากของเดือนที่ 1 พจน์ที่ 2 คือเงินฝากของเดือนที่ 2 เป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ

100	200	400	800	…
↓	↓	↓	↓	
เดือนที่ 1	เดือนที่ 2	เดือนที่ 3	เดือนที่ 4	…

เราจะเรียกชุดของจำนวนจริงที่เรียงกันดังกล่าวข้างต้นว่า **ลำดับ** และเรียกจำนวนจริงในตำแหน่งที่ n ว่า **พจน์** (term) **ที่ n** ของลำดับ

ในบางครั้งเราอาจเขียนแสดงสูตรพจน์ที่ n ของลำดับอย่างชัดเจน เช่นในลำดับ

100, 200, 400, 800, …

พจน์ที่ n จะอยู่ในรูป $100(2^{n-1})$ และเพื่อความสะดวกเราอาจกำหนดลำดับข้างต้น ให้เป็นลำดับ (a_n) โดยที่

$$a_n = 100(2^{n-1})$$

เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$

จากลำดับข้างต้นเราจะเห็นได้ว่า

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$$

เป็นค่าคงตัว เราจะเรียกลำดับที่มีสมบัติข้างต้นว่าลำดับเรขาคณิต ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2.1 เราจะเรียกลำดับ (a_n) ว่า **ลำดับเรขาคณิต** ถ้า $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ มีค่าเท่ากันทุกจำนวนนับ n เราจะเรียกอัตราส่วนที่เท่ากันเสมอนี้ว่า **อัตราส่วนร่วม** และนิยมใช้สัญลักษณ์ r ดังนั้น

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

ซึ่งพจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตจะเป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2 ให้ (a_n) เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราร่วม r จะได้ว่า

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

ตัวอย่าง 2.1 เงื่อนไขในการฝากเงินออมระยะยาวของธนาคารแห่งหนึ่ง คือ ธนาคารจะจ่ายดอกเบี้ยให้กับลูกค้าปีละ 5% โดยจ่ายดอกเบี้ยทุก ๆ ปี แต่จะต้องฝากอย่างน้อย 10 ปี จึงจะถอนเงินต้นพร้อมดอกเบี้ยออกมาได้ ถ้าลูกค้าธนาคารคนหนึ่งฝากเงินจำนวน 10,000 บาท ในอีก 10 ปีข้างหน้า ลูกค้าคนนี้จะได้เงินต้นรวมดอกเบี้ยทั้งหมดเป็นจำนวนเท่าใด

วิธีทำ เมื่อเวลาผ่านไป 1 ปี เงินต้น 1 บาท จะได้ดอกเบี้ย 0.05 บาท รวมเป็นเงิน 1 + 0.05 = 1.05 บาท ดังนั้น

เมื่อสิ้นปีที่ 1 ลูกค้าจะได้รับเงินรวมเท่ากับ $10000(1.05)$ บาท

เมื่อสิ้นปีที่ 2 ลูกค้าจะได้รับเงินรวมเท่ากับ $10000(1.05)^2$ บาท

เมื่อสิ้นปีที่ 3 ลูกค้าจะได้รับเงินรวมเท่ากับ $10000(1.05)^3$ บาท

$\vdots$

เมื่อสิ้นปีที่ 10 ลูกค้าจะได้รับเงินรวมเท่ากับ $10000(1.05)^{10}$ บาท

จะเห็นได้ว่า ลำดับของเงินรวมในแต่ละปีเป็นลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วม $r = 1.05$
ดังนั้น เรากำหนดให้ $a_1 = 10000(1.05)$ เมื่อเวลาผ่านไป 10 ปี โดยทฤษฎีบท 2.2 เราจะได้ว่าลูกค้าคนนี้จะมีเงินฝากรวมดอกเบี้ยเท่ากับ $a_{10} = 10000(1.05)^{10} = 16{,}288.95$ บาท

เราเรียกการคิดดอกเบี้ยแบบนี้ว่าการคิดดอกเบี้ยแบบทบต้น ซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อที่ 3

บทนิยาม สำหรับลำดับ (a_n) ใดๆ เราจะเรียก S_n ว่าผลบวกย่อยของ n พจน์แรกของลำดับ (a_n)

ทฤษฎีบท 2.3 ให้ (a_n) เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วม r $(r \neq 1)$ จะได้ว่า

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

เมื่อ S_n คือ ผลบอกย่อย n พจน์แรกของ (a_n)

ตัวอย่าง 2.2 สมคิดวางแผนการออมเงินโดยจะเริ่มต้นออมเงินเดือนละ 1,000 บาท และจะออมเงินเพิ่มขึ้นทุก ๆ เดือน โดยจะเพิ่มเดือนละ 10% ของเดือนก่อนหน้า อยากทราบว่าเมื่อครบ 2 ปี สมคิดจะมีเงินออมทั้งหมดเป็นจำนวนเท่าใด

วิธีทำ จากโจทย์จะเห็นได้ว่า สมคิดออมเงินทั้งหมด 24 งวด โดยที่

งวดที่ 1 ออมเงิน $a_1 = 1000$

งวดที่ 2 ออมเงิน $a_2 = 1000(1.10)$

⋮

งวดที่ 24 ออมเงิน $a_{24} = 1000(1.10)^{23}$

ดังนั้น ผลรวมของเงินออมทั้งหมดของสมคิด คือ $S_{24} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{24}$ เป็นผลบวกย่อยของลำดับเรขาคณิตที่มี $a_1 = 1000$ และ $r = 1.10$ โดยทฤษฎีบท 2.3 จะได้ว่า

$$S_{24} = \frac{1000(1-1.10^{24})}{1-1.10} = 88{,}497.33 \text{ บาท}$$

ตัวอย่าง 2.3 บริษัทแห่งหนึ่งมีนโยบายการเพิ่มเงินเดือนให้กับพนักงานที่มีผลการทำงานในระดับดีมาก โดยทางบริษัทจะขึ้นเงินเดือนให้ 10% ในแต่ละปี ถ้าธเนศทำงานที่บริษัทแห่งนี้ด้วยเงินเดือนเริ่มต้น 20,000 บาท และมีผลการทำงานดีมากในทุก ๆ ปี อยากทราบว่าเมื่อสิ้นปีที่ 10 ธเนศจะได้รับเงินเดือนจากบริษัทนี้ทั้งหมดเป็นจำนวนเท่าใด

วิธีทำ จากโจทย์ เราสามารถคำนวณเงินเดือนของธเนศในแต่ละปีได้ดังนี้

ปีที่ 1 ธเนศจะได้รับเงินเดือน $a_1 = 20000$

ปีที่ 2 ธเนศจะได้รับเงินเดือน $a_2 = (20000)(1.10)$

ปีที่ 3 ธเนศจะได้รับเงินเดือน $a_3 = (20000)(1.10)^2$

เป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ ปีที่ 10 ธเนศจะได้รับเงินเดือน $a_{10} = (20000)(1.10)^9$

ดังนั้น จำนวนเงินทั้งหมดที่ธเนศได้รับจากบริษัทแห่งนี้หลังจากสิ้นปีที่ 10 คือ

$$12(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10})$$

เป็นผลบวกย่อยของลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรกคือ $(12)(20000)$ และมีอัตราส่วนร่วม $r = 1.10$ โดยทฤษฎีบทที่ 2.3 จำนวนเงินทั้งหมดที่ธเนศได้รับจากบริษัทแห่งนี้หลังจากสิ้นปีที่ 10 คือ $\frac{(12)(20000)[1-(1.10)^{10}]}{1-(1.10)} = 3{,}824{,}981.90$ บาท

3. ดอกเบี้ย

ในชีวิตประจำวัน เราอาจประสบกับภาวะทางการเงินหลายอย่าง เช่น

- เราอาจมีเงินออมเก็บไว้โดยไม่ได้ประโยชน์เพิ่มเติม
- เราอาจขาดแคลนเงินที่จำเป็นต้องใช้จ่ายหรือชำระสินค้า
- เราอาจต้องการเงินทุนเพื่อนำมาลงทุนในธุรกิจเพื่อก่อให้เกิดรายได้เพิ่มขึ้น

สิ่งที่ตามมาจากภาวะเหล่านี้ก็คือ การให้ยืมเงินแก่ผู้จำเป็นต้องใช้เงิน และการขอยืมเงินจากผู้มีเงินออม โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว ในการให้ยืมเงินนั้นผู้ให้ยืมจะได้รับผลประโยชน์ตอบแทนจากเงินที่ให้ยืมไป ซึ่งผลประโยชน์ดังกล่าวนี้เราเรียกว่า **ดอกเบี้ย** (interest) ที่ผู้ให้ยืมเงินและผู้ยืมเงินตกลงกันไว้ ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาการคิดดอกเบี้ยที่เรียกว่า **ดอกเบี้ยทบต้น** (compound interest) การคิดดอกเบี้ยแบบนี้ระยะเวลาจะถูกแบ่งเป็นงวด ๆ และเมื่อครบงวดจะมีการคิดดอกเบี้ยของงวดนั้น และนำดอกเบี้ยที่ได้มารวมเป็นเงินต้นของงวดถัดไป ทำให้เงินต้นมีจำนวนมากขึ้นเรื่อย ๆ

สมมติให้มีการคิดดอกเบี้ยทบต้นปีละ m ครั้ง เราจะเรียกช่วงเวลาที่ครบกำหนดในการคิดดอกเบี้ยแต่ละครั้งว่า **งวด** (period) และใช้สัญลักษณ์ i แทนดอกเบี้ยของเงิน 1 บาทในเวลา 1 งวด ดังนั้น

$$i = \frac{r}{m} \text{ เมื่อ } r \text{ คือ อัตราดอกเบี้ยของเงินต้น 1 บาท ในเวลา 1 ปี}$$

ตัวอย่างเช่น อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 12 ต่อปี คิดดอกเบี้ยปีละ 4 ครั้ง

เราจะได้ว่า ระยะเวลา 1 งวด คือ 3 เดือน และดอกเบี้ยของเงิน 1 บาทในเวลา 1 งวด คือ

$i = \frac{r}{m} = \left(\frac{12}{100}\right)\frac{1}{4} = 0.03$ บาท

สมมติให้ S_n คือเงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n ของนาย ก ที่เริ่มต้นฝากเงิน 100,000 บาท โดยธนาคารให้ดอกเบี้ยร้อยละ 12 ต่อปี และคิดดอกเบี้ยปีละ 4 ครั้ง อยากทราบว่า เมื่อครบ 1 ปี นาย ก จะได้เงินรวมเท่าไร

เนื่องจากธนาคารคิดดอกเบี้ยทุก ๆ 3 เดือน ดังนั้นใน 1 ปี จะคิดดอกเบี้ยทบต้นทั้งหมด 4 ครั้ง

คำนวณ S_1

เงินต้นมีจำนวนเท่ากับ $P = 100{,}000$ บาท

เงินต้น 1 บาท ในเวลา 1 งวด (3 เดือน) ได้ดอกเบี้ย $i = 0.03$ บาท

เงินต้น P บาท ในเวลา 1 งวดได้ดอกเบี้ย $P \times i = 100000(0.03)$ บาท

ดังนั้นเงินรวม $S_1 = P + Pi = P(1+i) = 100000(1+0.03)$ บาท

คำนวณ S_2

เงินต้นในการคิดดอกเบี้ยเมื่อสิ้นงวดที่ 2 คือ เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ 1 ซึ่งมีค่า เท่ากับ

$$S_1 = P(1+i)$$

เงินต้น $P(1+i)$ บาท ในเวลา 1 งวด ได้ดอกเบี้ย $P(1+i)i$ บาท

ดังนั้นเงินรวม $S_2 = P(1+i) + P(1+i)i = P(1+i)^2 = 100000(1+0.03)^2$ บาท

คำนวณ S_3

เงินต้นในการคิดดอกเบี้ยเมื่อสิ้นงวดที่ 3 คือ เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ 2 ซึ่งมีค่า เท่ากับ

$$S_2 = P(1+i)^2$$

เงินต้น $P(1+i)^2$ บาท ในเวลา 1 งวด ได้ดอกเบี้ย $P(1+i)^2 i$ บาท

ดังนั้นเงินรวม $S_3 = P(1+i)^2 + P(1+i)^2 i = P(1+i)^2(1+i)$

$$= P(1+i)^3 = 100000(1+0.03)^3 \text{ บาท}$$

โดยการคำนวณทำนองเดียวกันกับข้างต้น เราจะได้ว่า เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ 4 คือ

$$S_4 = P(1+i)^4 = 100000(1+0.03)^4 = 112{,}550.88 \text{ บาท}$$

จากสถานการณ์ข้างต้น เราสามารถเขียนสูตรหาเงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n ได้ดังนี้

$$S_n = P(1+i)^n$$

เราสังเกตได้ว่า ในการฝากเงิน 100,000 บาท ได้อัตราดอกเบี้ย 12% โดยคิดดอกเบี้ยทุก ๆ 3 เดือน นั้น เมื่อสิ้นปีจะได้รับเงินรวม

$$S_4 = P(1+i)^4 = 100000(1+0.03)^4 = 112{,}550.88 \text{ บาท}$$

ซึ่งถ้ามีการคิดดอกเบี้ยครั้งเดียวใน 1 ปี นาย ก จะได้รับเงินรวมเท่ากับ

$$100000(1+0.12) = 112{,}000 \text{ บาท}$$

เราจะเห็นได้ว่า ณ อัตราดอกเบี้ยเดียวกัน งวดของการคิดดอกเบี้ยต่างกัน จะมีผลต่อจำนวนดอกเบี้ย ดังเช่นตัวอย่างข้างต้น ถ้ามีการคิดดอกเบี้ยทุก ๆ 3 เดือน นาย ก จะได้รับดอกเบี้ยเพิ่มขึ้น

$$112{,}550.88 - 112{,}000 = 550.88 \text{ บาท}$$

ตัวอย่าง 3.1 นาย ก ฝากประจำเป็นระยะเวลา 3 ปี ที่ธนาคารแห่งหนึ่งจำนวน 200,000 บาท ธนาคารคิดดอกเบี้ยให้ร้อยละ 7 ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยทบต้นให้ทุก ๆ เดือน

1. นาย ก จะได้เงินรวมเท่าใด
2. นาย ก ได้ดอกเบี้ยทั้งหมดเป็นเงินเท่าใด

วิธีทำ

1. จากสูตรเงินรวม $S_n = P(1+i)^n$

เมื่อ P คือ เงินต้นซึ่งมีค่าเท่ากับ 200,000 บาท

i คือ ดอกเบี้ยของเงิน 1 บาทในเวลา 1 งวด ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{0.07}{12}$ บาท

และ n คือ จำนวนงวดที่คิดดอกเบี้ยทบต้นซึ่งมีจำนวนทั้งหมด $3 \times 12 = 36$ งวด ดังนั้น

$$S_{36} = 200000\left(1 + \frac{0.07}{12}\right)^{36} = 246{,}585.11 \text{ บาท}$$

ดังนั้น นาย ก จะได้เงินรวมทั้งหมด 246,585.11 บาท

2. จากข้อ 1 นาย ก จะได้รับดอกเบี้ยทั้งหมดเท่ากับ 246,585.11 – 200,000 = 46,585.11 บาท

ตัวอย่าง 3.2 จากตัวอย่างที่ 3.1 ถ้ามีการคิดดอกเบี้ยปีละครั้ง นาย ก จะได้รับดอกเบี้ยทั้งหมดเท่าไร และเมื่อเปรียบเทียบการคิดดอกเบี้ยทบต้นทุกเดือน นาย ก จะได้รับดอกเบี้ยเพิ่มขึ้นหรือลดลงเท่าไร

วิธีทำ ในกรณีที่มีการคิดดอกเบี้ยปีละ 1 ครั้ง จะได้ว่ามีการคิดดอกเบี้ย 3 ครั้ง $(n = 3)$ และดอกเบี้ยของเงินต้น 1 บาท ในแต่ละงวดคือ $i = 0.07$ ดังนั้น เงินรวมมีจำนวน เท่ากับ

$$S_3 = 200000(1 + 0.07)^3 = 245{,}008.60 \text{ บาท}$$

ดังนั้น นาย ก ได้รับดอกเบี้ย $245008.60 - 200000 = 45{,}008.60$ บาท เมื่อเปรียบเทียบกับการคิดดอกเบี้ยทุกเดือน นาย ก จะได้รับดอกเบี้ยน้อยลง $46{,}585.11 - 45{,}008.60 = 1{,}576.51$ บาท

ตัวอย่าง 3.3 นาย ก ต้องการเก็บเงินเพื่อดาวน์บ้านในอีก 2 ปีข้างหน้าจำนวน 220,000 บาท จึงวางแผนเก็บเงินโดยการฝากเงินกับธนาคารจำนวน 200,000 บาท เงินจำนวนนี้ไม่สามารถถอนก่อน 2 ปีได้ และธนาคารจะคิดดอกเบี้ยทบต้นให้ทุก ๆ 3 เดือนในอัตรา 5%ต่อปี เมื่อครบกำหนด 2 ปี นาย ก จะได้เงินรวมเพียงพอที่จะดาวน์บ้านหรือไม่

วิธีทำ จากสิ่งที่โจทย์ถาม เราจะคำนวณหาจำนวนเงินรวมที่ได้รับในอีก 2 ปีข้างหน้า

จากสูตรเงินรวม $S_n = P(1 + i)^n$

เมื่อ P คือ เงินต้นซึ่งมีค่าเท่ากับ 200,000 บาท

i คือ ดอกเบี้ยของเงิน 1 บาทในเวลา 1 งวด ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{0.05}{4}$ บาท

และ n คือ จำนวนงวดที่คิดดอกเบี้ยทบต้นซึ่งมีจำนวนทั้งหมด 8 งวด

ดังนั้น

$$S_8 = 200000\left(1 + \frac{0.05}{4}\right)^8 = 220{,}897.22 \text{ บาท}$$

ดังนั้น นาย ก จะได้เงินรวมทั้งหมด 220,897.22 บาท ซึ่งเพียงพอที่จะใช้ในการดาวน์บ้านในอีก 2 ปีข้างหน้า

ตัวอย่าง 3.4 ธนัทฝากประจำกับธนาคารแห่งหนึ่งจำนวน 100,000 บาท โดยที่ทางธนาคารจะให้ผลตอบแทนใน 3 ปีแรกในอัตรา 6% ต่อปีและจะคิดดอกเบี้ยทบต้นให้ทุก 2 เดือน ถ้าธนัทฝากต่ออีก 2 ปี จะให้ผลตอบแทนใน 2 ปีหลังในอัตราร้อยละ 9% ต่อปีแต่จะคิดดอกเบี้ยทบต้นให้ทุก 4 เดือน เมื่อเวลาผ่านไป 5 ปี ธนัทจะมีเงินรวมทั้งหมดเท่าใด ถ้าไม่มีการถอนดอกเบี้ยระหว่างการฝากเงินเลย

วิธีทำ เนื่องจากอัตราดอกเบี้ยและจำนวนครั้งในการคิดดอกเบี้ย ในแต่ละช่วงไม่เท่ากัน เราจึงแบ่งการคำนวณเป็นช่วง ดังนี้

ช่วงแรก คำนวณเงินรวมเมื่อสิ้นปีที่ 3

จากโจทย์ จะได้ว่า $P = 100000, i = \frac{0.06}{6} = 0.01$ และ $n = 18$

ดังนั้น เงินรวมเมื่อสิ้นปีที่ 3 คือ

$$S_{18} = 100000(1 + 0.01)^{18} = 119{,}614.75 \text{ บาท}$$

ช่วงที่ 2 คำนวณเงินรวมในช่วง 2 ปีหลัง

เงินต้นของการคิดดอกเบี้ยรอบนี้ คือ $119{,}614.75$ บาท โดยที่ $i = \frac{0.09}{3} = 0.03$ และ $n = 6$

ดังนั้น เงินรวมเมื่อสิ้นปีที่ 2 คือ $S_6 = 119614.75(1 + 0.03)^6 = 142{,}826.27$ บาท

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 5 ธนัทจะมีเงินรวมทั้งสิ้น$142{,}826.27$ บาท

ตัวอย่าง 3.5 จากตัวอย่างที่ 3.4 ถ้าอีกธนาคารหนึ่งเสนอว่า จะให้ผลตอบแทนใน 3 ปีแรกในอัตรา 6% ต่อปีและจะคิดดอกเบี้ยทบต้นให้ทุก 3 เดือน และจะให้ผลตอบแทนใน 2 ปีหลังในอัตราร้อยละ 9% ต่อปีแต่จะคิดดอกเบี้ยทบต้นให้ทุก 2 เดือน ข้อเสนอของธนาคารนี้ ให้ผลตอบแทนดีกว่าหรือไม่

วิธีทำ ทำนองเดียวกันกับตัวอย่างที่ 3.4 เราจะแบ่งการคิดเงินรวมเป็น 2 ช่วง

ช่วงแรก คำนวณเงินรวมเมื่อสิ้นปีที่ 3

$$P = 100000, i = \frac{0.06}{4} = 0.015 \text{ และ } n = 12$$

ดังนั้น เงินรวมเมื่อสิ้นปีที่ 3 คือ $S_{12} = 100000(1 + 0.015)^{12} = 119{,}561.82$ บาท

ช่วงที่ 2 คำนวณเงินรวมในช่วง 2 ปีหลัง

$$P = 119561.82, i = \frac{0.09}{6} = 0.015 \text{ และ } n = 12$$

ดังนั้น เงินรวมเมื่อสิ้นรอบที่ 2 คือ $S_{12} = 119561.82(1 + 0.015)^{12} = 142{,}950.28$ บาท

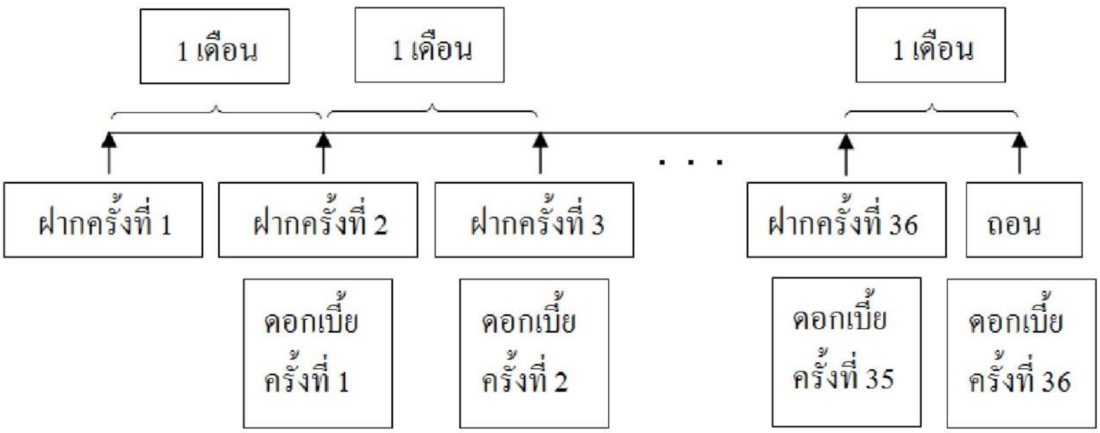
ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 5 ธนัทจะได้รับเงินรวม 142,950.28 บาท เมื่อเปรียบเทียบกับตัวอย่างที่ 3.4 นั้น ธนาคารหลังจะให้ผลตอบแทนดีกว่า 142,950.28 – 142,826.27 = 124.01 บาท

จากตัวอย่างที่กล่าวมาข้างต้น เราจะเห็นได้ว่านอกจากเวลา อัตราดอกเบี้ยและเงินต้นแล้ว วิธีการคิดดอกเบี้ยก็ยังมีผลอย่างมากต่อเงินรวม ซึ่งการคำนวณหาเงินรวมและดอกเบี้ยนั้นสามารถทำได้โดยอาศัยความรู้เรื่องลำดับเรขาคณิตเบื้องต้น

4. สู่เป้าหมายการออม

การออมเงินเพื่อใช้ยามเกษียณหรือเมื่อยามจำเป็นในอนาคตเป็นสิ่งสำคัญอย่างมาก เมื่อเรากำหนดเป้าหมายการออมแล้ว เราจะทราบได้อย่างไรว่าเราต้องใช้เวลาออมนานเท่าไร และออมเดือนละเท่าไร ในหัวข้อนี้เราจะประยุกต์ความรู้เรื่องลำดับเรขาคณิตเพื่อมาตอบโจทย์ดังกล่าว

ผู้ฝากเงินคนหนึ่งต้องการออมเงินโดยการฝากประจำกับธนาคารแห่งหนึ่ง โดยเงื่อนไขการฝากว่าจะต้องฝากเงินทุกเดือน ๆ ละ 1,000 บาท ต่อเนื่องกันเป็นระยะเวลา 3 ปี และธนาคารจะให้ดอกเบี้ยร้อยละ 6 ต่อปี โดยจะคิดทบต้นให้ทุกครั้งที่นำเงินเข้าฝาก ผู้ฝากจึงตัดสินใจฝากเงินออม เดือนละ 1,000 บาท อยากทราบว่า เมื่อครบกำหนดเวลา 3 ปี ผู้ฝากคนนี้จะได้รับเงินพร้อมดอกเบี้ยเป็นจำนวนเท่าใด



ดอกเบี้ยของเงินต้น 1 บาท ในเวลา 1 งวด มีค่าเท่ากับ $\frac{\mathbf{0.06}}{\mathbf{12}} = \mathbf{0.005}$ บาท

จำนวนงวดทั้งหมดมีค่าเท่ากับ 36 งวด ดังนั้น

เงินต้นงวดที่ 1 จำนวน 1,000 บาท จะได้รับการคิดดอกเบี้ยทบต้น 36 ครั้ง

ซึ่งจะทำให้ได้รับเงินรวมเท่ากับ $S_{36} = 1000(1+0.005)^{36}$ บาท

เงินต้นงวดที่ 2 จำนวน 1,000 บาท จะได้รับการคิดดอกเบี้ยทบต้น 35 ครั้ง

ซึ่งจะทำให้ได้รับเงินรวมเท่ากับ $S_{35} = 1000(1+0.005)^{35}$ บาท

เงินต้นงวดที่ 3 จำนวน 1,000 บาท จะได้รับการคิดดอกเบี้ยทบต้น 34 ครั้ง

ซึ่งจะทำให้ได้รับเงินรวมเท่ากับ $S_{34} = 1000(1+0.005)^{34}$ บาท

เป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งเงินต้นงวดสุดท้าย จะได้รับดอกเบี้ย 1 ครั้ง ทำให้ได้เงินรวม คือ $S_1 = 1000(1+0.005)$ บาท ดังนั้นเงินรวมทั้งหมดเท่ากับ

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 + \cdots + S_{36} \\ &= 1000(1+0.005) + 1000(1+0.005)^2 + \cdots + 1000(1+0.005)^{36} \\ &= 1000(1.005)\left[\frac{1-(1+0.005)^{36}}{1-(1+0.005)}\right] \\ &= 1005(39.3361) \\ &= 39{,}532.78 \text{ บาท} \end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อฝากครบ 3 ปี ผู้ฝากเงินคนนี้จะได้รับเงินรวมทั้งหมด 39,532.78 บาท

จากตัวอย่างดังกล่าว เราสามารถหาสูตรในการคำนวณเงินรวมสุดท้ายเมื่อสิ้นสุดการฝากเงินเป็นงวด งวดละเท่า ๆ กันได้ดังนี้

กำหนดให้

P แทนจำนวนเงินที่ฝากในแต่ละงวด

i แทนดอกเบี้ยของเงิน 1 บาทในระยะเวลา 1 งวด

n แทนจำนวนงวดทั้งหมดที่ส่งเงินฝาก

ดังนั้น เงินฝากในงวดที่ 1 จะได้รับการคิดดอกเบี้ยทั้งหมด n ครั้ง ทำให้ยอดเงินรวมที่ได้รับจากเงินฝากในงวดที่ 1 มีค่าเท่ากับ

$$S_n = P(1+i)^n$$

เงินฝากในงวดที่ 2 จะได้รับการคิดดอกเบี้ยทั้งหมด $n-1$ ครั้ง ทำให้ยอดเงินรวมที่ได้รับจากเงินฝากในงวดที่ 2 มีค่าเท่ากับ

$$S_{n-1} = P(1+i)^{n-1}$$

เงินฝากในงวดที่ 3 จะได้รับการคิดดอกเบี้ยทั้งหมด $n-2$ ครั้ง ทำให้ยอดเงินรวมที่ได้รับจากเงินฝากในงวดที่ 3 มีค่าเท่ากับ

$$S_{n-2} = P(1+i)^{n-2}$$

เป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ ทำให้ เงินฝากในงวดที่ n จะได้รับการคิดดอกเบี้ยทั้งหมด 1 ครั้ง ทำให้ยอดเงินรวมที่ได้รับจากเงินฝากในงวดที่ n มีค่าเท่ากับ

$$S_1 = P(1+i)^1$$

ดังนั้น เงินรวมทั้งหมดเมื่อสิ้นงวดที่ n ที่ได้รับพร้อมดอกเบี้ยเท่ากับ

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 + \cdots + S_n \\ &= P(1+i) + P(1+i)^2 + \cdots + P(1+i)^n \\ &= P(1+i)[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-1}] \\ &= P(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \end{aligned}$$

จากข้างต้น ทำให้เราสรุปได้ว่า

เมื่อเราฝากเงิน P บาท ติดต่อกัน n งวด โดยที่ดอกเบี้ยของเงินต้น 1 บาทในแต่ละงวดเท่ากับ i บาท ถ้าเราคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นแล้ว จะได้รับเงินพร้อมดอกเบี้ย S เมื่อสิ้นงวดที่ n เป็นจำนวน

$$S = P(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \qquad \textbf{(1)}$$

ตัวอย่าง 4.1 อรนิตย์ฝากเงินกับธนาคารทุกเดือน ๆ ละ 1,000 บาทตั้งแต่เริ่มต้นทำงานจนเกษียณเป็นเวลา 40 ปี โดยทางธนาคารจะให้ดอกเบี้ยร้อยละ 12 ต่อปี และคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เมื่อครบกำหนดระยะเวลา 40 ปี อรนิตย์จะได้รับเงินฝากพร้อมดอกเบี้ยเป็นจำนวนเท่าใด

วิธีทำ จำนวนเงินที่ฝากในแต่ละงวด คือ $P = 1{,}000$ บาท

ดอกเบี้ยของเงินต้น 1 บาท ในแต่ละงวด คือ $i = \frac{0.12}{12} = 0.01$ บาท

จำนวนงวดทั้งหมดที่ส่งเงินฝาก คือ $n = 40 \times 12 = 480$ งวด

จากสูตร จะได้ว่า

$$\begin{aligned} S &= 1000(1+0.01)\left[\frac{(1+0.01)^{480} - 1}{0.01}\right] \\ &= 1010(11764.77) \\ &= 11{,}882{,}417.70 \text{ บาท} \end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อครบกำหนด 40 ปี อรนิตย์จะได้รับเงินฝากพร้อมดอกเบี้ยเป็นจำนวน 11,882,417.70 บาท

ตารางต่อไปนี้ เป็นตารางสรุปเงินรวมที่ได้จากการออมเงินเดือนละ 1,000 บาท โดยสถาบันการเงินคิดดอกเบี้ยทบต้นทุกเดือน

จำนวนปีที่ออม (ปี)	อัตราดอกเบี้ยต่อปี			
	2%	6%	12%	20%
5	63,152.43	70,118.88	82,486.37	103,454.18
10	132,940.86	164,698.74	232,339.08	382,363.55
20	295,288.16	464,351.10	999,147.92	3,161,479.37
40	735,659.68	2,001,448.19	11,882,417.70	170,174,627.50

ผู้อ่านสามารถใช้แนวคิดของตัวอย่างที่ 4.1 คำนวณเงินรวมตามตารางข้างต้นได้ การออมโดยฝากเงินฝากกับธนาคารอาจได้ผลตอบแทนประมาณ 2% ต่อปีในขณะที่พันธบัตรหรือหุ้นกู้อาจได้ผลตอบแทนประมาณ 5% - 6% ต่อปี สำหรับกองทุนในหุ้นในระยะยาวมีข้อมูลผลตอบแทนประมาณ 10% - 12% ต่อปี

ตัวอย่าง 4.2 สมบัติวางแผนเก็บเงินจำนวน 500,000 บาท ในอีก 2 ปีข้างหน้า โดยการนำฝากธนาคารทุกเดือน ทางธนาคารให้ดอกเบี้ยร้อยละ 6 ต่อปี และคิดดอกเบี้ยทบต้นให้ในเดือนถัดไปทุก ๆ เดือน อยากทราบว่าสมบัติควรฝากเงินกับธนาคารเดือนละเท่าไรเพื่อให้มีเงินครบตามจำนวนที่ต้องการ

วิธีทำ จำนวนเงินที่ฝากในแต่ละงวด คือ P บาท

ดอกเบี้ยของเงินต้น 1 บาท ในแต่ละปีคือ $i = \frac{0.006}{100} = 0.06$ บาท

ดอกเบี้ยของเงินต้น 1 บาท ในแต่ละงวด คือ $i = \frac{0.06}{12} = 0.005$ บาท

จำนวนงวดทั้งหมดที่ส่งเงินฝาก คือ $n = 24$ งวด

จาก (1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P &= \frac{s}{(1+i)}\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right] \\ &= \frac{500000}{1.005}\left[\frac{0.005}{(1+0.005)^{24} - 1}\right] \\ &= 19{,}562.49 \text{ บาท} \end{aligned}$$

ดังนั้น สมบัติจะต้องฝากเงินกับธนาคารเดือนละ 19,562.49 บาท เพื่อให้มีเงินครบตามจำนวนที่ต้องการในอีก 2 ปีข้างหน้า

เอกสารอ้างอิง

[1] กฤษณะ เนียมมณี (2540). *แคลคูลัส สำหรับธุรกิจ 1*, กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Neammanee, K. (1997). *Calculus for Business I*. Bangkok : Chulalongkorn University Press.

[2] Capinski, M. and Zastawniak, T. (2011). *Mathematics for Finance, An Introduction to Financial Engineering.* London : Springer-Verlag.

[3] Buchanan, J. R. (2012). *An Undergraduate Introduction to Financial Mathematics*. Singapore : World Scientific Publishing Company.

[4] Dworsky, L. N. (2009). *Understanding the Mathematics of Personal Finance: An Introduction to Financial Literacy*. New Jersey : Wiley.