วารสารคณิตศาสตร์ **Mathematical Journal** 63(696) กันยายน – ธันวาคม 2561
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการบรรจุรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าลงในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

Necessary and sufficient conditions for fitting regular pentagon in the right triangle

วัชรพงษ์ อนรรฆเมธี และ วาสนา เสือด้วง

Watcharapong Anakkamatee[1] and Wadsana Sueduang[2]

[1,2]Department of Mathematics, Faculty of Science, Naresuan University

Email: [1]watcharaponga@nu.ac.th, [2]wadsanas57@nu.ac.th

บทคัดย่อ

ในบทความนี้จะนำเสนอเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการบรรจุรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่มีความยาวด้าน a หน่วย ลงในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป้าหมาย ABC ที่มี $A\hat{B}C$ เป็นมุมฉากและมีด้านประกอบมุมฉากที่สั้นกว่าคือ $\overline{BC}$ ซึ่งยาว c หน่วย โดยได้ผลการศึกษาดังนี้

(1) ถ้า $A\hat{C}B = \alpha \leq 54^{\circ}$ แล้วจะสามารถใส่รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าลงในรูปสามเหลี่ยมเป้าหมายได้ ก็ต่อเมื่อ $a \leq \frac{c\tan\alpha}{2\cos 36^{\circ}\sin\alpha + \cos 18^{\circ}\sec\alpha}$

(2) ถ้า $A\hat{C}B = \alpha > 54^{\circ}$ แล้วจะสามารถใส่รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าลงในรูปสามเหลี่ยมเป้าหมายได้ ก็ต่อเมื่อ $a \leq \frac{c\tan\alpha}{\cos 18^{\circ}\tan\alpha + \sin 36^{\circ}\tan\alpha + \cos 36^{\circ}}$

คำสำคัญ: รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า การบรรจุ

ABSTRACT

In this paper, we present necessary and sufficient conditions for fitting a regular pentagon which each side has the length a into the target right triangle ABC with the right angle $A\hat{B}C$ and the shorter leg, $\overline{BC}$, has the length c. We get the result as follow

(i) If $A\hat{C}B = \alpha \leq 54^{\circ}$ then the regular pentagon can be fitted in the target triangle ABC if and only if $\leq \frac{c \tan \alpha}{2\cos 36^{\circ} \sin \alpha + \cos 18^{\circ} \sec \alpha}$.

(ii) if $A\hat{C}B = \alpha > 54^{\circ}$ then the regular pentagon can be fitted in the target triangle ABC if and only if $a \leq \frac{c \tan \alpha}{\cos 18^{\circ} \tan \alpha + \sin 36^{\circ} \tan \alpha + \cos 36^{\circ}}$.

Keywords: right triangle, regular pentagon, fitting

1. บทนำ

การบรรจุรูปเรขาคณิตลงในรูปเรขาคณิตอีกรูปหนึ่งได้ศึกษาโดยนักคณิตศาสตร์หลายท่านด้วยเหตุผลที่มีประโยชน์ในเชิงการประยุกต์ที่สามารถใช้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวันมากมาย ไม่ว่าจะเป็นปัญหาการบรรจุสิ่งของ หรือปัญหาการหาค่าสูงสุด-ต่ำสุด ปัญหาทั่วไปของการศึกษาดังกล่าวได้มีการแนะนำโดย Wetzel [2] สำหรับปัญหาการบรรจุรูปเรขาคณิตลงในรูปสามเหลี่ยมได้มีการนำมาพิจารณาครั้งแรกโดย Sullivan [4] ซึ่งพูดถึงรูปทั่วไปของการบรรจุรูปเรขาคณิตลงในรูปสามเหลี่ยม

ในปี ค.ศ.2007 Jepson และ Vulpe [3] ได้เริ่มศึกษากรณีเฉพาะของปัญหาของ Wetzel และ Sullivan โดยได้สนใจเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการบรรจุรูปสามเหลี่ยมมุมฉากลงในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากอีกรูปหนึ่ง ซึ่งผลการศึกษาดังกล่าวสามารถสรุปได้เป็นทฤษฎีบท ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.1 [3] รูปสามเหลี่ยมมุมฉากเริ่มต้นที่มีด้านประกอบมุมฉากยาว a และ b $(a \leq b)$ จะสามารถบรรจุลงในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป้าหมายที่มีด้านประกอบมุมฉากยาว c และ d $(c \leq d)$ ได้ ก็ต่อเมื่อ

(ก) $a \leq c$ และ $b \leq d$ หรือ

(ข) $a < c$ และ $b \leq \frac{ac(d-\sqrt{a^2-c^2})}{c^2+d\sqrt{a^2-c^2}}$ หรือ

(ค) $b > d$ และ $b \leq \frac{bd(c-\sqrt{b^2-d^2})}{d^2+c\sqrt{b^2-d^2}}$

จากความน่าสนใจของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่สามารถนำความรู้ทางตรีโกณมิติเบื้องต้นมาใช้ในการแก้ปัญหาการใส่รูปเรขาคณิตอีกรูปหนึ่งลงไปได้ โดยในปี ค.ศ. 2017 เมทา [1] ได้ศึกษาเงื่อนไขที่

จำเป็นและเพียงพอสำหรับการบรรจุรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสลงในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป้าหมาย โดยมีผลการศึกษาดังนี้

ทฤษฎีบท 1.2 [1] ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $A\hat{B}C$ เป็นมุมฉาก และ $c = |\overline{BC}| \leq |\overline{AB}| = d$ ถ้า $A\hat{C}B = \alpha$ แล้ว รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ยาวด้านละ a จะถูกบรรจุลงใน ΔABC ได้ ก็ต่อเมื่อ $a \leq \frac{c\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$

ทฤษฎีบท 1.3 [1] ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $A\hat{B}C$ เป็นมุมฉาก และ $c = |\overline{BC}| \leq |\overline{AB}| = d$ ถ้า $A\hat{C}B = \alpha < 60^{\circ}$ แล้วรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่ยาวด้านละ a จะถูกบรรจุลงใน ΔABC ได้ ก็ต่อเมื่อ $a \leq \frac{2c\sin\alpha}{\sqrt{3}}$

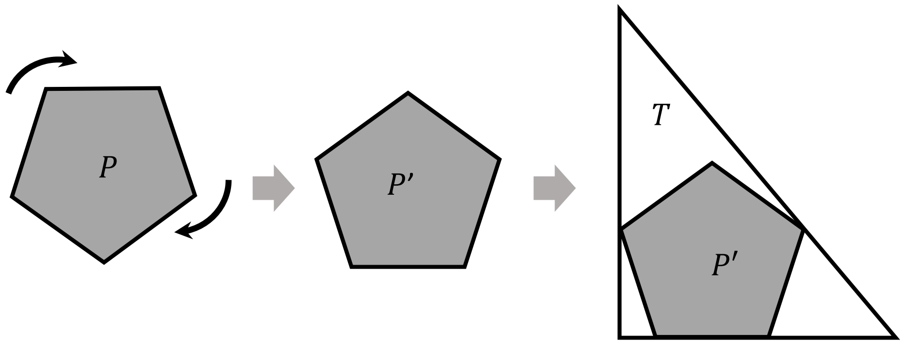
ทฤษฎีบท 1.4 [1] ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $A\hat{B}C$ เป็นมุมฉาก และ $c = |\overline{BC}| \leq |\overline{AB}| = d$ ถ้า $A\hat{C}B = \alpha > 60^{\circ}$ แล้วรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่ยาวด้านละ a จะถูกบรรจุลงใน ΔABC ได้ ก็ต่อเมื่อ $a \leq \frac{2c}{\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha}$

ในบทความนี้ผู้เขียนจะนำเสนอคำตอบบางส่วนของปัญหาของ Wetzel และ Sullivan ที่ถามไว้ใน [4] โดยในหัวข้อที่ 2 จะแสดงสมบัติสำคัญที่จำเป็นต้องใช้ในการพิสูจน์ และในหัวข้อที่ 3 จะได้ให้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการบรรจุรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าลงในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป้าหมาย เนื่องด้วยเนื้อหาส่วนใหญ่ของบทความนี้เป็นการประยุกต์ใช้ความรู้เบื้องต้นทางเรขาคณิตและฟังก์ชันตรีโกณมิติพื้นฐานในการอธิบาย ผู้เขียนจึงขอยกสมบัติดังกล่าวขึ้นมาใช้เลยโดยไม่แสดงการพิสูจน์

2. ความรู้พื้นฐาน

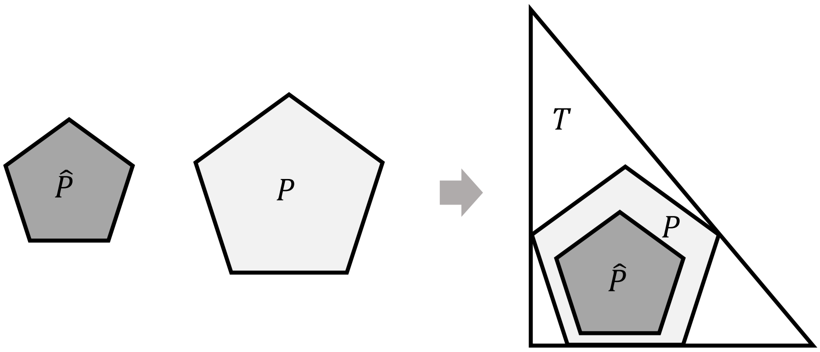
ในหัวข้อนี้จะได้รวบรวมบทนิยาม และสมบัติต่าง ๆ ที่จำเป็นต้องใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักในหัวข้อ 3

บทนิยาม 2.1 ให้ P และ T เป็นรูปเรขาคณิตใด ๆ เรากล่าวว่า P สามารถ *บรรจุ* ลงใน T ได้ ถ้าเราสามารถหมุนหรือเลื่อนขนาน P จนได้รูป P' และทำให้ $P' \subset T$ นั่นคือไม่มีส่วนใดของ P' ที่อยู่นอก T



รูปที่ 2.1 ตัวอย่างการหมุนและเลื่อนขนานรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าให้บรรจุใน
รูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามบทนิยาม 2.1

ข้อสังเกต ถ้า P สามารถบรรจุลงใน T ได้ แล้วรูปที่คล้ายและเล็กกว่ารูป P จะต้องสามารถบรรจุได้ใน T เช่นกัน โดยการวางไว้ภายในรูป P ดังแสดงในรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 ตัวอย่างการบรรจุรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่คล้ายและเล็กกว่ารูป P
ลงในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก T

เพื่อความสะดวกและลดความสับสนในบทความฉบับนี้ จะใช้สัญลักษณ์ $|\overline{AB}|$ แทน ความยาวของส่วนของเส้นตรง $\overline{AB}$ และโดยไม่เสียนัยทั่วไป เมื่อกล่าวถึงรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป้าหมาย ABC จะหมายถึงรูปสามเหลี่ยมที่มี $A\hat{B}C$ เป็นมุมฉาก $c = |\overline{BC}| \leq |\overline{AB}| = d$ และ $A\hat{C}B = \alpha$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นสมบัติพื้นฐานที่สามารถพิสูจน์โดยใช้ความรู้ทางตรีโกณมิติและพีชคณิตได้ไม่ยากและใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก

ทฤษฎีบท 2.2 เส้นทแยงมุมของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่มีความยาวด้าน a หน่วย จะมีความยาวเท่ากับ $2a\cos 36^{\circ}$ หน่วย

ทฤษฎีบท 2.3 $\sin 18^{\circ} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \cos 18^{\circ} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, \sin 36^{\circ} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ และ $\cos 36^{\circ} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

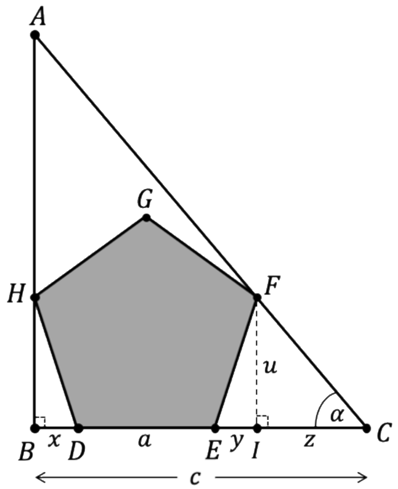
บทนิยาม 2.4 เราจะเรียก การหมุน หรือการเลื่อนขนาน หรือการประกอบกันของการหมุนและการเลื่อนขนานว่า *การเคลื่อนที่คงรูป (rigid motion)*

ทฤษฎีบท 2.5 [4] ให้ T เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ถ้ารูปหลายเหลี่ยมนูน P สามารถบรรจุในรูปสามเหลี่ยม T ได้ แล้วเราจะสามารถทำการเคลื่อนที่คงรูปกับรูป P จนทำให้มีด้านใดด้านหนึ่งของรูป P ทับกับด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม T ได้ โดยที่รูป P อยู่ในรูปสามเหลี่ยม T ตลอดการเคลื่อนที่คงรูปดังกล่าว

3. ทฤษฎีบทหลัก

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป้าหมาย จะได้ว่า รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า $DEFGH$ ที่ใหญ่ที่สุดที่สามารถวางประชิดด้าน $\overline{BC}$ และบรรจุในรูปสามเหลี่ยม ABC ได้ จะมีความยาวด้าน เท่ากับ $\frac{c\tan\alpha}{2\cos 36^{\circ}\tan\alpha+\cos 18^{\circ}}$ หน่วย

บทพิสูจน์ จากรูปที่ 3.1 ลากเส้น $\overline{FI}$ มาตั้งฉากกับ $\overline{BC}$ ที่จุด I และให้ x, y, z และ u แทน $|\overline{BD}|$, $|\overline{EI}|, |\overline{IC}|$ และ $|\overline{FI}|$ ตามลำดับ



รูปที่ 3.1 การวางรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าให้สอดคล้องกับทฤษฎีบท 3.1

เนื่องจาก $I\hat{E}F = B\hat{D}H = 72^{\circ}$ และ $H\hat{B}D = F\hat{I}E = 90^{\circ}$ ดังนั้น $I\hat{F}E = B\hat{H}D = 18^{\circ}$

ทำให้ได้ว่า $x = y = a\sin 18^{\circ}$ และ $u = a\cos 18^{\circ}$

พิจารณา ΔCFI จะได้ว่า $\tan\alpha = \frac{u}{z}$

ดังนั้น $z = \frac{a\cos 18^{\circ}}{\tan\alpha}$

จากทฤษฎีบท 2.3 จะได้ว่า $2\cos 36^{\circ} = 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) + 1 = 2\sin 18^{\circ} + 1$

จากรูปที่ 3.1 จะเห็นว่า

$$c = x + a + y + z = a\left(2\sin 18^{\circ} + 1 + \frac{\cos 18^{\circ}}{\tan\alpha}\right) = a\left(\frac{2\cos 36^{\circ}\tan\alpha + \cos 18^{\circ}}{\tan\alpha}\right)$$

ดังนั้น $a = \frac{c\tan\alpha}{2\cos 36^{\circ}\tan\alpha + \cos 18^{\circ}}$ □

สำหรับการบรรจุรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าโดยการวางประชิดด้าน $\overline{AB}$ หรือ $\overline{BC}$ นั้น เนื่องจากในกรณีที่ $\alpha \leq 54^{\circ}$ และ $\alpha > 54^{\circ}$ รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่พิจารณามีจุดที่ประชิดด้านที่เหลือเป็นคนละจุดกัน ดังนั้นการพิจารณาบรรจุรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าโดยการวางประชิดด้านดังกล่าวลงในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป้าหมาย จึงต้องพิจารณาแยกกรณี ดังแสดงในทฤษฎีบท 3.2 และ 3.3

ทฤษฎีบท 3.2 ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป้าหมาย และ $DEFGH$ เป็นรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่ใหญ่ที่สุดซึ่งมีความยาวด้าน a หน่วย และบรรจุในรูปสามเหลี่ยม ABC ได้โดยวางประชิดด้าน $\overline{AB}$ จะได้ว่า

1) ถ้า $\alpha \leq 54^{\circ}$ แล้ว $a = \frac{c\tan\alpha}{\cos 18^{\circ}\tan\alpha + 2\cos 36^{\circ}}$

2) ถ้า $\alpha > 54^{\circ}$ แล้ว $a = \frac{c\tan\alpha}{\cos 18^{\circ}\tan\alpha + \sin 36^{\circ}\tan\alpha + \cos 36^{\circ}}$

บทพิสูจน์

1) ให้ $\alpha \leq 54^{\circ}$ จะได้ว่ารูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทนี้ จะต้องวางในลักษณะดังรูปที่ 3.2

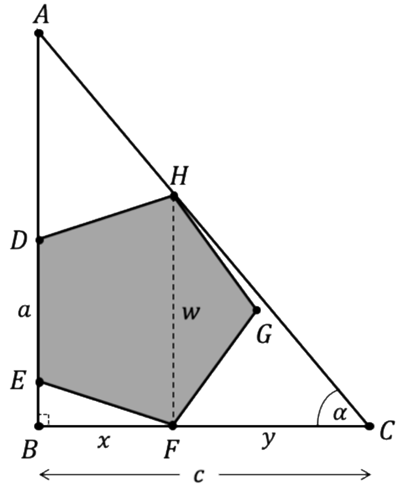
ให้ x, y และ w แทน $|\overline{BF}|, |\overline{FC}|$ และ $|\overline{HF}|$ ตามลำดับ

โดยทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า $w = 2a\cos 36^{\circ}$

จากรูป 3.2 เห็นได้ชัดว่า $\overline{AB}//\overline{HF}$ ดังนั้น ΔHFC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

พิจารณา ΔEBF และ ΔHFC จะได้ว่า $x = a\cos 18^{\circ}$ และ $\tan\alpha = \frac{w}{y}$ ตามลำดับ

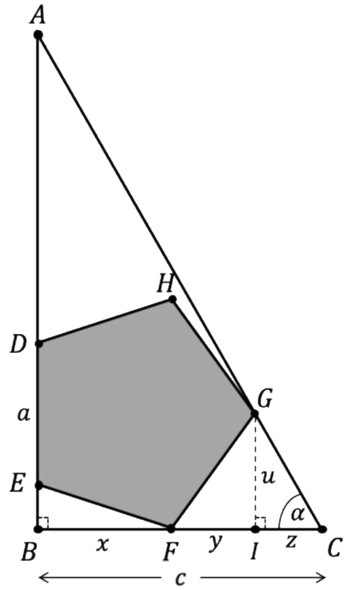
ดังนั้น $y = \frac{2a\cos 36^{\circ}}{\tan\alpha}$



รูปที่ 3.2 การวางรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าให้สอดคล้องกับทฤษฎีบท 3.2 1)

จากรูปที่ 3.2 จะเห็นว่า $c = x + y = a\left(\frac{\cos 18^\circ \tan\alpha + 2\cos 36^\circ}{\tan\alpha}\right)$
ดังนั้น $a = \frac{c\tan\alpha}{\cos 18^\circ \tan\alpha + 2\cos 36^\circ}$ ตามต้องการ

2) ให้ $\alpha > 54^\circ$ จะได้ว่ารูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทนี้ จะต้องวางในลักษณะดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 การวางรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าให้สอดคล้องกับทฤษฎีบท 3.2 2)

จากรูปที่ 3.3 ลากเส้น $\overline{GI}$ มาตั้งฉากกับ $\overline{BC}$ ที่จุด I และให้ x, y, z และ u แทน $|\overline{BF}|, |\overline{FI}|, |\overline{IC}|$ และ $|\overline{GI}|$ ตามลำดับ

พิจารณา ΔBFE เนื่องจาก $B\hat{F}E = 18^\circ$ จะได้ว่า $x = a\cos 18^\circ$

จาก $I\hat{F}G = 180^\circ - B\hat{F}E - G\hat{F}E = 180^\circ - 18^\circ - 108^\circ = 54^\circ$ และพิจารณา ΔBFE และ ΔBFE จะได้ว่า $u = a\cos 36^\circ, y = a\sin 36^\circ$ และ $\tan\alpha = \frac{u}{z}$

ดังนั้น $z = \frac{u}{\tan\alpha} = \frac{a\cos 36^\circ}{\tan\alpha}$

จากรูปที่ 3.3 จะเห็นว่า $c = x + y + z = a\left(\frac{\cos 18^\circ \tan\alpha + \sin 36^\circ \tan\alpha + \cos 36^\circ}{\tan\alpha}\right)$

ดังนั้น $a = \frac{c\tan\alpha}{\cos 18^\circ \tan\alpha + \sin 36^\circ \tan\alpha + \cos 36^\circ}$ ตามต้องการ □

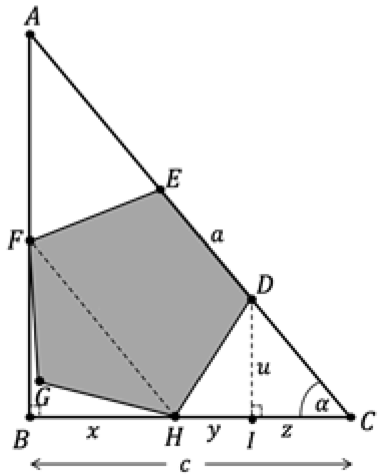
ทฤษฎีบท 3.3 ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป้าหมาย และ $DEFGH$ เป็นรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่ใหญ่ที่สุดซึ่งมีความยาวด้าน a หน่วย และบรรจุในรูปสามเหลี่ยม ABC ได้โดยวางประชิดด้าน $\overline{AC}$ จะได้ว่า

1) ถ้า $\alpha \leq 54^\circ$ แล้ว $a = \frac{c\tan\alpha}{2\cos 36^\circ \sin\alpha + \cos 18^\circ \sec\alpha}$

2) ถ้า $\alpha > 54^\circ$ แล้ว $a = \frac{c\tan\alpha}{\cos(\alpha - 36^\circ)\tan\alpha + \cos 18^\circ \sec\alpha}$

บทพิสูจน์

1) ให้ $\alpha \leq 54^\circ$ จะได้ว่ารูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทนี้ จะต้องวางในลักษณะดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 การวางรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าให้สอดคล้องกับทฤษฎีบท 3.3 1)

จากรูปที่ 3.4 ลากเส้น $\overline{DI}$ มาตั้งฉากกับ $\overline{BC}$ ที่จุด I และให้ x, y, z และ u แทน $|\overline{BH}|$, $|\overline{HI}|, |\overline{IC}|$ และ $|\overline{DI}|$ ตามลำดับ

โดยทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า $|\overline{HF}| = 2a\cos 36^\circ$ และจากการที่ $\overline{FH}//\overline{AC}$ ทำให้ $B\hat{H}F = \alpha$

ดังนั้น $x = 2a\cos 36^\circ \cos\alpha$

จาก $C\hat{H}D = 180^\circ - H\hat{C}D - C\hat{D}H = 180^\circ - \alpha - 72^\circ = 108^\circ - \alpha$

ดังนั้น $y = a\cos(108^\circ - \alpha), u = a\sin(108^\circ - \alpha)$ และ $\tan\alpha = \frac{u}{z}$

เพราะฉะนั้น $z = \frac{a\sin(108^\circ - \alpha)}{\tan\alpha}$

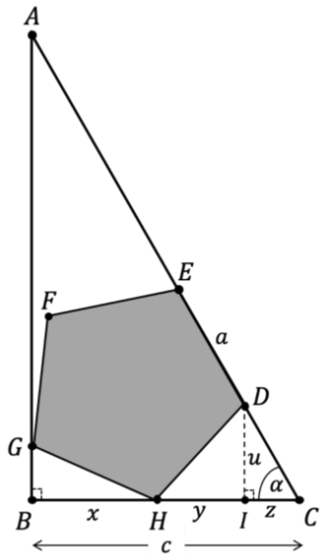
โดยสมบัติของฟังก์ชันตรีโกณมิติ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
&\cos(108^\circ - \alpha)\tan\alpha + \sin(108^\circ - \alpha) \\
&\quad = (\cos 108^\circ \cos\alpha + \sin 108^\circ \sin\alpha)\tan\alpha + \sin 108^\circ \cos\alpha - \cos 108^\circ \sin\alpha \\
&\quad = \cos 108^\circ \sin\alpha + \sin 108^\circ \sin^2\alpha \sec\alpha + \sin 108^\circ \cos\alpha - \cos 108^\circ \sin\alpha \\
&\quad = \sin 108^\circ \sec\alpha\,(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) \\
&\quad = \cos 18^\circ \sec\alpha
\end{aligned}$$

จากรูปที่ 3.4 จะเห็นว่า $c = x + y + z = a\left(\frac{2\cos 36^\circ \sin\alpha + \cos 18^\circ \sec\alpha}{\tan\alpha}\right)$

เพราะฉะนั้น $a = \frac{c\tan\alpha}{2\cos 36^\circ \sin\alpha + \cos 18^\circ \sec\alpha}$ ตามต้องการ

2) ให้ $\alpha \geq 54^\circ$ จะได้ว่ารูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทนี้ จะต้องวางในลักษณะดังรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5 การวางรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าให้สอดคล้องกับทฤษฎีบท 3.3 2)

จากรูปที่ 3.5 ลากเส้น $\overline{DI}$ มาตั้งฉากกับ $\overline{BC}$ ที่จุด I และให้ x, y, z และ u แทน $|\overline{BH}|, |\overline{HI}|, |\overline{IC}|$ และ $|\overline{DI}|$ ตามลำดับ

จาก $C\hat{H}D = 180^\circ - H\hat{C}D - C\hat{D}H = 180^\circ - \alpha - 72^\circ = 108^\circ - \alpha$

ดังนั้น $B\hat{H}G = 180^\circ - 108^\circ - (108^\circ - \alpha) = \alpha - 36^\circ$

ทำให้ $x = a\cos(\alpha - 36^\circ)$, $y = a\cos(108^\circ - \alpha)$ และ $z = \frac{a\sin(108^\circ - \alpha)}{\tan\alpha}$

เมื่อพิจารณาในทำนองเดียวกับการพิสูจน์ข้อ 1) จะได้ว่า $y + z = \frac{a\cos 18^\circ \sec\alpha}{\tan\alpha}$

จากรูปที่ 3.5 จะเห็นว่า $c = x + y + z = a\left(\frac{\cos(\alpha - 36^\circ)\tan\alpha + \cos 18^\circ \sec\alpha}{\tan\alpha}\right)$

ดังนั้น $a = \frac{c\tan\alpha}{\cos(\alpha - 36^\circ)\tan\alpha + \cos 18^\circ \sec\alpha}$ ตามต้องการ □

ทฤษฎีบท 3.4 ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป้าหมายที่มี $\alpha \leq 54^\circ$ จะได้ว่ารูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่มีความยาวด้าน a หน่วย จะบรรจุลงในรูปสามเหลี่ยม ABC ได้ ก็ต่อเมื่อ

$$a \leq \frac{c\tan\alpha}{2\cos 36^\circ \sin\alpha + \cos 18^\circ \sec\alpha}$$

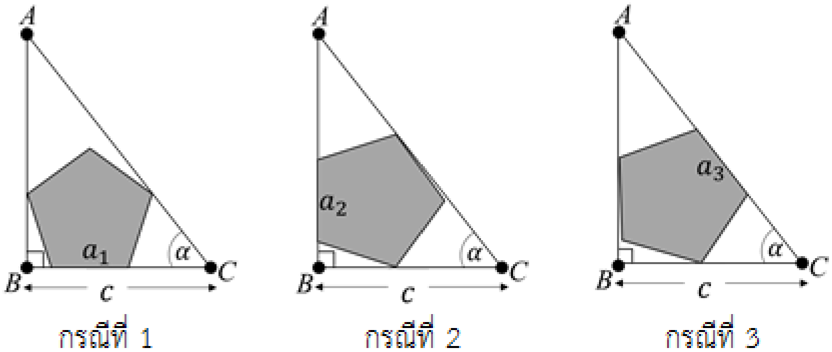
บทพิสูจน์ โดยบทนิยาม 2.1 และทฤษฎีบท 2.5 เราสามารถพิจารณาการวางรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าลงในรูปสามเหลี่ยมเฉพาะ 3 กรณีต่อไปนี้

1) วางรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าประชิดด้าน BC หรือ

2) วางรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าประชิดด้าน AB หรือ

3) วางรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าประชิดด้าน AC

ให้ a_1, a_2 และ a_3 แทนความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่ใหญ่ที่สุดที่สามารถใส่ใน ΔABC ได้ในกรณีที่ 1), 2) และ 3) ตามลำดับ ดังรูปที่ 3.6



รูปที่ 3.6 การวางรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าให้บรรจุใน ΔABC ได้ ในกรณีที่ $\alpha \leq 54^\circ$

จะเห็นว่า a_1, a_2 และ a_3 ถูกกำหนดโดยทฤษฎีบท 3.1, 3.2 และ 3.3 ตามลำดับ

ต่อไปจะแสดงว่า $a_1 < a_3$ และ $a_2 \le a_3$

เนื่องจาก $\sqrt{10} + \sqrt{2} > 4\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ จะได้ว่า

$$\frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{2\sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}}}{\sqrt{5}+1} = \frac{\cos 18^\circ}{2\cos 36^\circ} = \frac{\cos 18^\circ(1-\cos\alpha)}{2\cos 36^\circ(1-\cos\alpha)}$$

เนื่องจาก $\alpha \ge 45^\circ$ และ sine เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ โดยจะได้ว่า

$$\sin\alpha \ge \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{\cos 18^\circ(1-\cos\alpha)}{2\cos 36^\circ(1-\cos\alpha)}$$

ดังนั้น
$$2\cos 36^\circ \sin\alpha - 2\cos 36^\circ \cos\alpha \sin\alpha > \cos 18^\circ - \cos 18^\circ \cos\alpha$$

$$2\cos 36^\circ \sin\alpha + \cos 18^\circ \cos\alpha > 2\cos 36^\circ \cos\alpha \sin\alpha + \cos 18^\circ$$

เพราะฉะนั้น

$$a_1 = \frac{c\tan\alpha}{2\cos 36^\circ \tan\alpha + \cos 18^\circ} < \frac{c\tan\alpha}{\cos 18^\circ \sec\alpha + 2\cos 36^\circ \sin\alpha} = a_3$$

โดยสมบัติของฟังก์ชันตรีโกณมิติ จะได้ว่า

$$2\cos 36^\circ \cos 54^\circ = 2\cos 36^\circ \sin 36^\circ = \sin 72^\circ = \cos 18^\circ$$

จากการที่ cosine เป็นฟังก์ชันลดช่วง $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ จะได้ว่า

$$2\cos 36^\circ \cos\alpha - \cos 18^\circ \ge 0$$

เนื่องจาก $\sin\alpha < 1$ จะได้ว่า $\sin\alpha(2\cos 36^\circ \cos\alpha - \cos 18^\circ) \le 2\cos 36^\circ \cos\alpha - \cos 18^\circ$

ดังนั้น $2\cos 36^\circ \sin\alpha \cos\alpha + \cos 18^\circ \le \cos 18^\circ \sin\alpha + 2\cos 36^\circ \cos\alpha$

$$2\cos 36^\circ \sin\alpha + \cos 18^\circ \sec\alpha \le \cos 18^\circ \tan\alpha + 2\cos 36^\circ$$

เพราะฉะนั้น

$$a_3 = \frac{c\tan\alpha}{2\cos 36^\circ \sin\alpha + \cos 18^\circ \sec\alpha} \ge \frac{c\tan\alpha}{\cos 18^\circ \tan\alpha + 2\cos 36^\circ} = a_2$$

ในทางกลับกัน ให้ $a \le \frac{c\tan\alpha}{2\cos 36^\circ \sin\alpha + \cos 18^\circ \sec\alpha}$ จะได้ว่า รูปห้าเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเท่ากับ a จะสามารถบรรจุลงในรูปสามเหลี่ยม ABC ได้พอดี โดยบรรจุแบบกรณีที่ 3 □

ทฤษฎีบท 3.5 ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเป้าหมายที่มี $\alpha > 54^\circ$ จะได้ว่ารูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่มีความยาวด้าน a หน่วย จะบรรจุลงในรูปสามเหลี่ยม ABC ได้ ก็ต่อเมื่อ

$$a \le \frac{c\tan\alpha}{\cos 18^\circ \tan\alpha + \sin 36^\circ \tan\alpha + \cos 36^\circ}$$

บทพิสูจน์ สมมติ a_1, a_2 และ a_3 แทนความยาวด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่บรรจุลงใน ΔABC ได้ ในทำนองเดียวกับการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.4 และด้วยเหตุผลทำนองเดียวกันการพิสูจน์ในทฤษฎีบทดังกล่าว การพิสูจน์นี้จะเหลือสิ่งที่ต้องแสดงเพียง $a_1 < a_2$ และ $a_3 \le a_2$ ซึ่งจะแสดงตามลำดับดังนี้

เนื่องจาก $\cos 36^\circ - \cos 18^\circ < 0$ แต่ $2\cos 36^\circ \tan\alpha\left(1-\cos 18^\circ\right) \ge 0$ ดังนั้น

$$2\cos 36^\circ \tan\alpha\left(1-\cos 18^\circ\right) > \cos 36^\circ - \cos 18^\circ$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
2\cos 36^\circ \tan\alpha + \cos 18^\circ &> 2\cos 36^\circ \cos 18^\circ \tan\alpha + \cos 36^\circ \\
&= \left(1 + 2\sin 18^\circ\right)\cos 18^\circ \tan\alpha + \cos 36^\circ \\
&= \cos 18^\circ \tan\alpha + 2\sin 18^\circ \cos 18^\circ \tan\alpha + \cos 36^\circ \\
&= \cos 18^\circ \tan\alpha + \sin 36^\circ \tan\alpha + \cos 36^\circ
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$a_1 = \frac{c\tan\alpha}{2\cos 36^\circ + \cos 18^\circ} < \frac{c\tan\alpha}{\cos 18^\circ \tan\alpha + \sin 36^\circ \tan\alpha + \cos 36^\circ} = a_2$$

จาก $\alpha - 36^\circ \ge 18^\circ$ และ cosine เป็นฟังก์ชันลดช่วง $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ จะได้ว่า $\cos\left(\alpha - 36^\circ\right) \le \cos 18^\circ$

เนื่องจาก $\sin\alpha - 1 < 0$ จะได้ว่า

$$(\sin\alpha - 1)\cos\left(\alpha - 36^\circ\right) \ge (\sin\alpha - 1)\cos 18^\circ$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha - 36^\circ)\sin\alpha + \cos 18^\circ &\ge \cos 18^\circ \sin\alpha + \cos(\alpha - 36^\circ) \\
&= \cos 18^\circ \sin\alpha + \sin 36^\circ \sin\alpha + \cos 36^\circ \cos\alpha
\end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\cos(\alpha - 36^\circ)\tan\alpha + \cos 18^\circ \sec\alpha \ge \cos 18^\circ \tan\alpha + \sin 36^\circ \tan\alpha + \cos 36^\circ$$

เพราะฉะนั้น

$$a_3 = \frac{c\tan\alpha}{\cos(\alpha - 36^\circ)\tan\alpha + \cos 18^\circ \sec\alpha} \le \frac{c\tan\alpha}{\cos 18^\circ \tan\alpha + \sin 36^\circ \tan\alpha + \cos 36^\circ} = a_2$$

ในทางกลับกัน ให้ $a \le \frac{c\tan\alpha}{\cos 18^\circ \tan\alpha + \sin 36^\circ \tan\alpha + \cos 36^\circ}$ จะได้ว่ารูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามีความยาวด้านเท่ากับ a จะสามารถบรรจุลงในรูปสามเหลี่ยม ABC ได้พอดี โดยบรรจุแบบกรณี 2 □

กิตติกรรมประกาศ ผู้เขียนขอขอบคุณข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างยิ่งจากผู้ทรงคุณวุฒิที่พิจารณาบทความนี้ ซึ่งข้อเสนอแนะดังกล่าวเป็นส่วนสำคัญที่ทำให้บทความฉบับนี้มีความถูกต้องและสมบูรณ์มากขึ้น

เอกสารอ้างอิง

[1] ชนากานต์ เมทา. (2560). *เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการใส่รูปเรขาคณิตลงในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก*. (วิทยานิพนธ์วิทยาศาสตรบัณฑิต, มหาวิทยาลัยนเรศวร).
Chanakantha Meta. (2017). *Necessary and sufficient conditions for fitting regular pentagon in the right triangle*. (Master's thesis, Naresuan University).

[2] Wetzel, J. E. *(2003).* Fits and Covers. *Mathematics Magazine*, 76(5), p. 349 - 369.

[3] Jepsen, C. H. and Vulpe, V. (2007). Fitting One Right Triangle in Another. *Mathematics Magazine*, 80(3), p. 203- 207.

[4] Sullivan, J. M. (1996) *Polygon in Triangle: Generalizing a Theorem of Post*. Retrieved from http://torus.math.uiuc.edu/jms/papers/post.pdf