

ภาคผนวก ก
การหาคุณภาพเครื่องมือ

การหาคุณภาพของเครื่องมือ

ตาราง 12

ผลการประเมินคุณภาพชุดการเรียนรู้การสอนเรื่องจำนวนเชิงซ้อน โดยผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนคณิตศาสตร์ 3 ท่าน

ข้อที่	ผู้เชี่ยวชาญ			ค่าเฉลี่ย
	1	2	3	
ด้านใบความรู้/เนื้อหา				
1. เนื้อหาครอบคลุมตรงกับจุดประสงค์การเรียนรู้	+1	+1	+1	1.00
2. เนื้อหามีความถูกต้องตามหลักวิชา	+1	+1	+1	1.00
3. เนื้อหา มีรายละเอียดเพียงพอ	0	+1	+1	0.67
4. เนื้อหาเรียงลำดับได้อย่างเหมาะสม	+1	+1	0	0.67
5. ภาษาที่ใช้มีความเหมาะสมอ่านแล้วเข้าใจง่าย	+1	+1	+1	1.00
6. เนื้อหา มีความเหมาะสมกับระดับของผู้เรียน	+1	0	+1	0.67
7. มีความชัดเจนในการอธิบายเนื้อหา	0	+1	+1	0.67
ด้านใบงาน/ประกอบกิจกรรมการเรียนรู้				
8. มีความเหมาะสมกับเนื้อหาวิชา	+1	+1	0	0.67
9. ตรงกับจุดประสงค์การเรียนรู้	+1	+1	+1	1.00
10. มีขั้นตอนจากง่ายไปหายาก	+1	+1	0	0.67
11. เหมาะสมกับระดับผู้เรียน	+1	+1	+1	1.00
12. เวลาในการปฏิบัติงานเหมาะสม	+1	+1	+1	1.00
ด้านแบบทดสอบ				
13. แบบทดสอบในแต่ละบทเรียนกับเนื้อหาใน				
แต่ละหัวข้อสอดคล้องกัน	+1	+1	+1	1.00
14. แบบทดสอบครอบคลุมจุดประสงค์การสอน	+1	+1	+1	1.00
15. สามารถตรวจคำตอบได้ง่าย	+1	+1	+1	1.00
16. คำถามและคำตอบมีเป้าหมายชัดเจน	+1	+1	+1	1.00

ข้อที่	ผู้เชี่ยวชาญ			ค่าเฉลี่ย
	1	2	3	
ด้านสื่อ/อุปกรณ์ที่ใช้ประกอบในการจัดกิจกรรม				
17. เหมาะสมกับเนื้อหาและจุดประสงค์การสอน	+1	+1	+1	1.00
18. มีความหลากหลายและนำไปใช้ได้สะดวก	+1	+1	+1	1.00
19. ตัวหนังสือ/รูปภาพและสีสันทันชัดเจนและเหมาะสม	+1	+1	+1	1.00
20. ส่งเสริมให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้	+1	+1	+1	1.00

ตาราง 13

ผลการประเมินคุณภาพแผนการจัดการเรียนรู้เรื่องจำนวนเชิงซ้อน โดยผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนคณิตศาสตร์ 3 ท่าน

รายการประเมิน	ผู้เชี่ยวชาญ			ค่าเฉลี่ย
	1	2	3	
ด้านจุดประสงค์การเรียนรู้				
1. สอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง	+1	+1	+1	1.00
2. ระบุพฤติกรรมที่สามารถวัดและประเมินผลได้	+1	+1	+1	1.00
3. เหมาะสมกับระดับของผู้เรียน	0	+1	+1	1.00
ด้านกิจกรรมการเรียนรู้				
4. สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้	+1	+1	0	0.67
5. เน้นกระบวนการจัดกิจกรรมแบบร่วมมือ				
แบบแบ่งกลุ่มผลสัมฤทธิ์	+1	0	+1	0.67
6. มีขั้นตอนจากง่ายไปหายาก	+1	+1	+1	1.00
7. กิจกรรมมีความหลากหลาย	+1	+1	+1	1.00
8. เหมาะสมกับความสามารถและวัยของผู้เรียน	+1	+1	+1	1.00
9. ทำให้ผู้เรียนบรรลุวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้ด้านสื่อ	+1	+1	+1	1.00
10. เหมาะสมกับกิจกรรมการเรียนรู้	+1	0	+1	0.67

ตาราง 13 (ต่อ)

รายการประเมิน	ผู้เชี่ยวชาญ			ค่าเฉลี่ย
	1	2	3	
11. มีความหลากหลาย ด้านการวัดและประเมินผล	+1	+1	+1	1.00
12. สอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวังที่ กำหนดไว้	+1	+1	+1	1.00
13. ใช้วิธีการวัดและประเมินผลที่หลากหลาย	+1	+1	+1	1.00

ตาราง 14

ผลการประเมินความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาของแบบทดสอบก่อนเรียน เรื่องจำนวนเชิงซ้อน
โดยผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์ 3 ท่าน

พฤติกรรม	ข้อที่	ผู้เชี่ยวชาญท่านที่			คะแนนเฉลี่ย	แปลผล
		1	2	3		
1. ความรู้ความจำ	1	1	1	1	1.00	ใช้ได้
(ความรู้เกี่ยวกับทฤษฎี	2	1	1	1	1.00	ใช้ได้
โครงสร้างและระเบียบวิธี)	3	1	1	0	0.67	ใช้ได้
	4	1	1	0	0.67	ใช้ได้
	5	1	1	0	0.67	ใช้ได้
2. ความรู้ความเข้าใจ	6	1	1	1	1.00	ใช้ได้
(นำความรู้ที่เรียนมาแก้ปัญหา	7	1	1	1	1.00	ใช้ได้
เงื่อนไขแบบเดียวกัน)	8	1	1	1	1.00	ใช้ได้
	9	1	1	1	1.00	ใช้ได้
	11	1	1	0	0.67	ใช้ได้
	17	1	1	0	0.67	ใช้ได้
	18	1	1	1	1.00	ใช้ได้
	21	1	1	1	1.00	ใช้ได้
	29	1	1	0	0.67	ใช้ได้

ตาราง 14 (ต่อ)

พฤติกรรม	ข้อที่	ผู้เชี่ยวชาญท่านที่			คะแนนเฉลี่ย	แปลผล
		1	2	3		
3. การนำไปใช้	10	1	1	0	0.67	ใช้ได้
(นำความรู้ที่เรียนมาประยุกต์ใช้	12	1	1	0	0.67	ใช้ได้
ตามความเหมาะสม)	13	1	1	1	1.00	ใช้ได้
	14	1	1	1	1.00	ใช้ได้
	19	1	1	1	1.00	ใช้ได้
	20	1	1	1	1.00	ใช้ได้
	23	1	1	1	1.00	ใช้ได้
	24	1	1	0	0.67	ใช้ได้
	26	1	1	0	0.67	ใช้ได้
	28	1	1	1	1.00	ใช้ได้
4. การวิเคราะห์	15	1	1	0	0.67	ใช้ได้
(ความสามารถในการแยกแยะสิ่ง	16	1	1	0	0.67	ใช้ได้
ต่าง ๆ ออกเป็นส่วนย่อย ๆ ลำดับ	22	1	1	1	1.00	ใช้ได้
ความคิดที่แสดงออกอย่างชัดเจน	25	1	1	1	1.00	ใช้ได้
เพื่อค้นหาความจริงต่าง ๆ ที่ซ่อน	27	1	1	1	1.00	ใช้ได้
แฝงในเรื่อนั้น ๆ)	30	1	1	1	1.00	ใช้ได้

ตาราง 15

ผลการประเมินความสอดคล้องจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมกับข้อสอบแต่ละข้อของ
แบบทดสอบก่อนเรียน โดยผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์ 3 ท่าน

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังข้อสอบข้อที่	ผู้เชี่ยวชาญท่านที่			คะแนนเฉลี่ย	แปลผล
	1	2	3		
1. อธิบายสมบัติการบวกและการคูณของจำนวน					
เชิงซ้อนได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้
2. อธิบายสมบัติการบวกและการคูณของจำนวน					
เชิงซ้อนได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้
3. อธิบายสมบัติสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนได้	1	1	0	0.67	ใช้ได้

ตาราง 15 (ต่อ)

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังข้อสอบข้อที่	ผู้เชี่ยวชาญท่านที่			คะแนนเฉลี่ย	แปลผล
	1	2	3		
				1.00	
4. อธิบายสมบัติอินเวอร์สของจำนวนเชิงซ้อนได้	1	1	0	0.67	ใช้ได้
5. อธิบายสมบัติสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนได้	1	1	0	0.67	ใช้ได้
6. นำความรู้เรื่องค่าของ i มาใช้ในการแก้ปัญห าโจทย์ได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้
7. นำความรู้เรื่องค่าของ i มาใช้ในการแก้ปัญห าโจทย์ได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้
8. นำสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อนมาใช้ ในการแก้ปัญหาโจทย์ได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้
9. นำความรู้เรื่องค่าของ i มาใช้ในการแก้ปัญห าโจทย์ได้และหาสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนที่ กำหนดให้ได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้
10. นำสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อนมาใช้ ในการแก้ปัญหาโจทย์ได้และหาสังยุคของ จำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ได้	1	1	0	0.67	ใช้ได้
11. หาตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อนที่ กำหนดให้ได้	1	1	0	0.67	ใช้ได้
12. หาตัวผกผัน (อินเวอร์ส) การคูณของจำนวน เชิงซ้อนที่กำหนดให้ได้	1	1	0	0.67	ใช้ได้
13. นำความรู้เรื่องค่าของ i มาใช้ในการแก้ปัญห าโจทย์ได้และหาตัวผกผันของจำนวนเชิงซ้อน ที่กำหนดให้ได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้
14. นำสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อนมาใช้ ในการแก้ปัญหาโจทย์ได้และหาค่าสัมบูรณ์ ของจำนวนเชิงซ้อนได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้
15. นำสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อนมาใช้ ในการแก้ปัญหาโจทย์ได้และหาค่าสัมบูรณ์ ของจำนวนเชิงซ้อนได้	1	1	0	0.67	ใช้ได้

ตาราง 15 (ต่อ)

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังข้อสอบข้อที่	ผู้เชี่ยวชาญท่านที่			คะแนนเฉลี่ย	แปลผล
	1	2	3		
				1.00	
16. นำความรู้เรื่องค่าของ i มาใช้ในการแก้ปัญหา โจทย์ได้และหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวน เชิงซ้อนได้	1	1	0	0.67	ใช้ได้
17. เขียนจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ในรูปเชิง พิกัดขั้วได้	1	1	0	0.67	ใช้ได้
18. เขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปพิกัดเชิงขั้วในรูป $z = a + bi$ ได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้
19. แก้ปัญหาโจทย์เกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนในรูป เชิงขั้วได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้
20. หาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนในรูปพิกัด เชิงขั้วได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้
21. นำทฤษฎีของเดอมัวร์มาใช้ในการแก้ปัญหา โจทย์จำนวนเชิงซ้อนได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้
22. นำทฤษฎีของเดอมัวร์มาใช้ในการแก้ปัญหา โจทย์จำนวนเชิงซ้อนได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้
23. หาผลหารของจำนวนเชิงซ้อนในรูปพิกัด เชิงขั้วได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้
24. หารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ได้	1	1	0	0.67	ใช้ได้
25. บอกได้ว่าเซตคำตอบที่กำหนดให้เป็นรากที่ n ของจำนวนใด	1	1	1	1.00	ใช้ได้
26. แก้ปัญหาโจทย์เกี่ยวกับรากที่ n ของจำนวน เชิงซ้อนที่กำหนดให้ได้	1	1	0	0.67	ใช้ได้
27. นำสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนมาใช้ในการ การแก้ปัญหาโจทย์รากที่ n ได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้
28. นำสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนมาใช้ในการ แก้ปัญหาโจทย์รากที่ n ได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้
29. หารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ได้	1	1	0	0.67	ใช้ได้

ตาราง 15 (ต่อ)

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังข้อสอบข้อที่	ผู้เชี่ยวชาญท่านที่			คะแนนเฉลี่ย	แปลผล
	1	2	3		
30. นำสมบัติของตัวผกผันการคูณของจำนวน เชิงซ้อนมาใช้ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์	1	1	1	1.00	ใช้ได้

ตาราง 16

ผลการประเมินความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาของแบบทดสอบหลังเรียน เรื่องจำนวนเชิงซ้อน
โดยผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์ 3 ท่าน

พฤติกรรม	ข้อที่	ผู้เชี่ยวชาญท่านที่			คะแนนเฉลี่ย	แปลผล
		1	2	3		
1. ความรู้ความจำ	1	1	1	1	1.00	ใช้ได้
(ความรู้เกี่ยวกับทฤษฎี	2	1	1	1	1.00	ใช้ได้
โครงสร้างและระเบียบวิธี)	3	1	1	0	0.67	ใช้ได้
	4	1	1	0	0.67	ใช้ได้
	5	1	1	0	0.67	ใช้ได้
2. ความรู้ความเข้าใจ	6	1	1	1	1.00	ใช้ได้
(นำความรู้ที่เรียนมาแก้ปัญหาคณิตศาสตร์	7	1	1	1	1.00	ใช้ได้
เงื่อนไขแบบเดียวกัน)	8	1	1	1	1.00	ใช้ได้
	9	1	1	1	1.00	ใช้ได้
	11	1	1	0	0.67	ใช้ได้
	17	1	1	0	0.67	ใช้ได้
	18	1	1	1	1.00	ใช้ได้
	21	1	1	1	1.00	ใช้ได้
	29	1	1	0	0.67	ใช้ได้
3. การนำไปใช้	10	1	1	0	0.67	ใช้ได้
(นำความรู้ที่เรียนมาประยุกต์ใช้	12	1	1	0	0.67	ใช้ได้
ตามความเหมาะสม)	13	1	1	1	1.00	ใช้ได้
	14	1	1	1	1.00	ใช้ได้

ตาราง 16 (ต่อ)

พฤติกรรม	ข้อที่	ผู้เชี่ยวชาญท่านที่			คะแนนเฉลี่ย	แปลผล
		1	2	3	1.00	
	19	1	1	1	1.00	ใช้ได้
	20	1	1	1	1.00	ใช้ได้
	23	1	1	1	1.00	ใช้ได้
	24	1	1	0	0.67	ใช้ได้
	26	1	1	0	0.67	ใช้ได้
	28	1	1	1	1.00	ใช้ได้
4. การวิเคราะห์	15	1	1	0	0.67	ใช้ได้
(ความสามารถในการแยกแยะสิ่ง	16	1	1	0	0.67	ใช้ได้
ต่าง ๆ ออกเป็นส่วนย่อย ๆ ลำดับ	22	1	1	1	1.00	ใช้ได้
ความคิดที่แสดงออกอย่างชัดเจน	25	1	1	1	1.00	ใช้ได้
เพื่อค้นหาความจริงต่าง ๆ ที่ซ่อน	27	1	1	1	1.00	ใช้ได้
แฝงในเรื่องนั้น ๆ)	30	1	1	1	1.00	ใช้ได้

ตาราง 17

ผลการประเมินความสอดคล้องจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมกับข้อสอบแต่ละข้อของ
แบบทดสอบหลังเรียน โดยผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์ 3 ท่าน

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังข้อสอบข้อที่	ผู้เชี่ยวชาญ			คะแนนเฉลี่ย	แปลผล
	1	2	3	1.00	
1. อธิบายสมบัติการบวกและการคูณของจำนวน เชิงซ้อนได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้
2. อธิบายสมบัติการบวกและการคูณของจำนวน เชิงซ้อนได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้
3. อธิบายสมบัติสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนได้	1	1	0	0.67	ใช้ได้
4. อธิบายสมบัติอินเวอร์สของจำนวนเชิงซ้อนได้	1	1	0	0.67	ใช้ได้
5. อธิบายสมบัติสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนได้	1	1	0	0.67	ใช้ได้
6. นำความรู้เรื่องค่าของ i มาใช้ในการแก้ปัญห โจทย์ได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้

ตาราง 17 (ต่อ)

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังข้อสอบข้อที่	ผู้เชี่ยวชาญ			คะแนนเฉลี่ย	แปลผล
	1	2	3		
7. นำความรู้เรื่องค่าของ i มาใช้ในการแก้ปัญห โจทยได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้
8. นำสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อนมาใช้ ในการแก้ปัญหโจทยได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้
9. นำความรู้เรื่องค่าของ i มาใช้ในการแก้ปัญห โจทยได้และหาสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนที่ กำหนดให้ได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้
10. นำสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อนมา ใช้ในการแก้ปัญหโจทยได้และหาสังยุคของ จำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ได้	1	1	0	0.67	ใช้ได้
11. หาตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อนที่ กำหนดให้ได้	1	1	0	0.67	ใช้ได้
12. หาตัวผกผัน (อินเวอร์ส) การคูณของจำนวน เชิงซ้อนที่กำหนดให้ได้	1	1	0	0.67	ใช้ได้
13. นำความรู้เรื่องค่าของ i มาใช้ในการแก้ปัญห โจทยได้และหาตัวผกผันของจำนวนเชิงซ้อน ที่กำหนดให้ได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้
15. นำสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อนมา ใช้ในการแก้ปัญหโจทยได้และหาค่าสัมบูรณ์ ของจำนวนเชิงซ้อนได้	1	1	0	0.67	ใช้ได้
16. นำความรู้เรื่องค่าของ i มาใช้ในการแก้ปัญห โจทยได้และหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวน เชิงซ้อนได้	1	1	0	0.67	ใช้ได้
17. เขียนจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ในรูปเชิง พิกัดขั้วได้	1	1	0	0.67	ใช้ได้
18. เขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปพิกัดเชิงขั้วในรูป $z = a + bi$ ได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้

ตาราง 17 (ต่อ)

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังข้อสอบข้อที่	ผู้เชี่ยวชาญ			คะแนนเฉลี่ย	แปลผล
	1	2	3		
19. แก้ปัญหาโจทย์เกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนในรูป เชิงขั้วได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้
20. หาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนในรูปพิกัดเชิง ขั้วได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้
21. นำทฤษฎีของเดอมัวร์มาใช้ในการแก้ปัญห าโจทย์จำนวนเชิงซ้อนได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้
22. นำทฤษฎีของเดอมัวร์มาใช้ในการแก้ปัญห าโจทย์จำนวนเชิงซ้อนได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้
23. หาผลหารของจำนวนเชิงซ้อนในรูปพิกัดเชิง ขั้วได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้
24. หารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ได้	1	1	0	0.67	ใช้ได้
25. บอกได้ว่าเซตคำตอบที่กำหนดให้เป็นรากที่ n ของจำนวนใด	1	1	1	1.00	ใช้ได้
26. แก้ปัญหาโจทย์เกี่ยวกับรากที่ n ของจำนวน เชิงซ้อนที่กำหนดให้ได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้
27. นำสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนมาใช้ในการ การแก้ปัญหามูลค่ารากที่ n ได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้
28. นำสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนมาใช้ในการ การแก้ปัญหามูลค่ารากที่ n ได้	1	1	1	1.00	ใช้ได้
29. หารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ได้	1	1	0	0.67	ใช้ได้
30. นำสมบัติของตัวผกผันการคูณของจำนวน เชิงซ้อนมาใช้ในการแก้ปัญหามูลค่า	1	1	1	1.00	ใช้ได้

ตาราง 18

ผลค่าความยากง่าย และค่าอำนาจจำแนก ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ก่อนเรียน
เรื่องจำนวนเชิงซ้อน

ข้อที่	ค่าความยากง่าย	อำนาจจำแนก
1	0.56	0.49
2	0.44	0.17
3	0.67	0.53
4	0.22	0.28
5	0.67	0.35
6	0.56	0.33
7	0.44	0.28
8	0.56	0.67
9	0.56	0.44
10	0.33	0.66
11	0.78	0.23
12	0.56	0.73
13	0.56	0.67
14	0.33	0.55
15	0.67	0.47
16	0.33	0.33
17	0.67	0.35
18	0.22	0.52
19	0.22	0.22
20	0.33	0.43

ตาราง 19

ผลค่าความยากง่าย และค่าอำนาจจำแนก ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์หลังเรียน

ข้อที่	ค่าความยากง่าย	อำนาจจำแนก
1	0.56	0.30
2	0.56	0.24
3	0.67	0.59
4	0.67	0.45
5	0.78	0.25
6	0.78	0.25
7	0.78	0.47
8	0.67	0.26
9	0.78	0.25
10	0.67	0.33
11	0.56	0.26
12	0.56	0.56
13	0.78	0.25
14	0.56	0.55
15	0.78	0.54
16	0.44	0.43
17	0.67	0.26
18	0.56	0.26
19	0.56	0.30
20	0.44	0.69

ภาค ข
เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ สาระคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน จำนวน 4 คาบ
 เรื่อง โครงสร้างจำนวนเชิงซ้อน สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. อธิบายโครงสร้างของจำนวนเชิงซ้อนได้
2. เขียนจำนวนที่กำหนดให้ให้อยู่ในรูปจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ พร้อมทั้งบอกส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน
3. หาค่า i^n ที่กำหนดให้ได้
4. นำสมบัติการบวกและการคูณ จำนวนเชิงซ้อนมาใช้ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่กำหนดให้ได้

สาระการเรียนรู้

บทนิยาม จำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ หรือ (a, b) โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริง เรียก a ว่า ส่วนจริง (real part) ของจำนวนเชิงซ้อน z เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\text{Re}(z)$ เรียก b ว่า ส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของจำนวนเชิงซ้อน z เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\text{Im}(z)$

ค่าของ i^n แทนค่า i^2 เท่ากับ -1

บทนิยาม จำนวนเชิงซ้อนคือ คู่อันดับ (a, b) เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงและกำหนดการเท่ากัน การบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อนดังนี้

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน (a, b) และ (c, d)

1. การเท่ากัน $(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$
2. การบวก $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
3. การคูณ $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ เราอาจแทน $(a, b) \cdot (c, d)$ ด้วย $(a, b)(c, d)$ ก็ได้

เซตของจำนวนเชิงซ้อนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathbb{C}$

สมบัติเกี่ยวกับการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า z_1, z_2, z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อนแล้วจะได้ว่าจำนวนเชิงซ้อนมีสมบัติปิดการบวกและการคูณ

$$1. z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

สมบัติการสลับที่การบวก

$$2. z_1 z_2 = z_2 z_1$$

สมบัติการสลับที่การคูณ

$$3. z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

สมบัติการเปลี่ยนหมู่การบวก

$$4. z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$$

สมบัติการเปลี่ยนหมู่การคูณ

$$5. z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

สมบัติการแจกแจง

สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

ให้ $z = a + bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน เรียก $a - bi$ ว่าเป็นสังยุคของ z เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\bar{z}$ นั่นคือ $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

สมบัติสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

ให้ z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

$$1. \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \text{ และ } \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$2. \overline{\bar{z}} = z$$

$$3. \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$4. \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$5. \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$6. \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \text{ เมื่อ } \bar{z}_2 \neq 0$$

กิจกรรมการเรียนรู้

คาบที่ 1

ขั้นที่ 1 ขั้นการจัดกลุ่มและนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูทบทวนโครงสร้างของระบบจำนวนจริงและการหาสมการพหุนามและอธิบายถึงสมการพหุนามบางสมการ เช่น $x^2 + 1 = 0$ ไม่มีคำตอบเนื่องจากกำลังสองของจำนวนจริงใด ๆ จะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ นักคณิตศาสตร์จึงสร้างระบบจำนวนชนิดใหม่ขึ้นมาเพื่อหาคะตอบของสมการพหุนามทุกสมการได้เสมอ และเรียก

จำนวนในระบบที่สร้างขึ้นใหม่นี้ว่า จำนวนเชิงซ้อน (complex numbers) พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ

ตัวอย่าง จงเขียนจำนวนที่กำหนดให้ต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูปจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ และบอก $\text{Re}(z)$, $\text{Im}(z)$

1. $(-5, 2)$ จะได้ $(-5, 2)$ แทน (a, b)

$$\therefore z = a + bi \text{ เขียนได้เป็น } -5 + 2i$$

$$\text{ส่วนจริง } \text{Re}(z) = -5$$

$$\text{ส่วนจินตภาพ } \text{Im}(z) = 2$$

2. ให้นักเรียนลองทำข้อสอง $(\frac{1}{2}, \frac{1}{5})$

$$\text{เขียนได้เป็น } \frac{1}{2} + \frac{1}{5}i$$

$$\text{ส่วนจริง } \text{Re}(z) = \frac{1}{2}$$

$$\text{ส่วนจินตภาพ } \text{Im}(z) = \frac{1}{5}$$

ขั้นที่ 2 ขั้นนำเสนอบทเรียนต่อทั้งชั้น

2. ครูยกตัวอย่างสมบัติการบวกและการคูณ จำนวนเชิงซ้อน

ตัวอย่าง จงหาผลลัพธ์เมื่อ $z_1 = 5 + 3i$, $z_2 = -2 + 4i$, $z_3 = -1 - i$

$$\begin{aligned} \text{จงทำ 1. } Z_1 + Z_2 &= (5 + 3i) + (-2 + 4i) \\ &= (5 + (-2)) + (3i + 4i) \\ &= 3 + 7i \end{aligned}$$

ให้นักเรียนลองหาคำตอบของ $Z_2 + Z_1$ ช่วยกันสรุปถึงสมบัติการสลับที่การบวก

$$\begin{aligned} 2. \quad Z_1 - Z_2 &= (5 + 3i) - (-2 + 4i) \\ &= (5 + 3i) - (-2 + 4i) = 7 - i \end{aligned}$$

ให้นักเรียนลองหา $z_2 z_1$ กับ $Z_1 Z_2$ และ $z_1 + (z_2 + z_3)$ กับ $(z_1 + z_2) + z_3$ และ $Z_1(Z_2 + Z_3)$

กับ $Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3$ พร้อมทั้งสรุปเป็นสมบัติการสลับที่การบวก การคูณ การเปลี่ยนหมู่

การบวก และการแจกแจง

ขั้นที่ 3 ขั้นการศึกษากลุ่มย่อยและฝึกทักษะ

3. ให้นักเรียนฝึกทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 1 เรื่อง โครงสร้างของจำนวนเชิงซ้อน จากชุดการเรียนการสอน ให้เวลาประมาณ 20 นาที แล้วช่วยกันเฉลยพร้อมทั้งอธิบาย

ขั้นที่ 4 ขั้นการประเมิน

4. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปโครงสร้างของจำนวนเชิงซ้อน สมบัติการบวก และการคูณจำนวนเชิงซ้อนอีกครั้ง ให้การบ้านแบบฝึกทักษะชุดที่ 2 เรื่อง โครงสร้างของจำนวนเชิงซ้อน สมบัติการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

คาบที่ 2

ขั้นที่ 1 ขั้นการจัดกลุ่มและนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูและนักเรียนช่วยกันเฉลยการบ้านจากแบบฝึกทักษะชุดที่ 2
2. ให้นักเรียนทบทวนหลักการบวก ลบ จำนวนเชิงซ้อนอีกครั้ง

ขั้นที่ 2 ขั้นนำเสนอบทเรียนต่อทั้งชั้น

3. ครูเสนอแนะเรื่อง การคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วยจำนวนเชิงซ้อน พร้อมทั้งยกตัวอย่าง

ตัวอย่าง กำหนด $Z_1 = 2 + i$

$$Z_2 = 3 - i$$

$$Z_3 = 4 - 2i$$

จงทำ $Z_1 Z_2$

จะได้ $Z_1 Z_2 = (2 + i)(3 - i)$

$$= (2)(3) + (2)(-i) + (3)(i) + (i)(-i)$$

$$= i^2 = -1$$

ถึงขั้นนี้ครูอธิบายค่าของ i^n $= i^3 = -i$

$$= i^4 = 1$$

$$\text{หาค่า} = (2)(3) + (2)(-i) + (3)(i) + (i)(-i)$$

$$= 6 - 2i + 3i - i^2$$

$$= 6 + i - (-1)$$

$$= 6 + i + 1 = 7 + i$$

4. ให้นักเรียนลองหา $Z_2 Z_1$ และ $Z_1(Z_2 + Z_3)$ กับ $Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3$ พร้อมทั้งสรุปเป็นสมบัติการสลับที่การคูณ สมบัติการแจกแจง

5. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปสมบัติเพิ่มเติมของจำนวนเชิงซ้อน พร้อมทั้งยกตัวอย่างการพิสูจน์บางข้อดังต่อไปนี้

1. เซตของจำนวนเชิงซ้อนมีเอกลักษณ์การบวก ซึ่งเอกลักษณ์การบวกของจำนวนเชิงซ้อนคือ $(0, 0)$

ตัวอย่างการพิสูจน์ ให้ (a, b) เป็นจำนวนเชิงซ้อน

เนื่องจาก $(a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (0 + a, 0 + b) = (0, 0) + (a, b) = (a, b)$

ดังนั้น $(0, 0)$ จึงเป็นเอกลักษณ์การบวกของจำนวนเชิงซ้อน

2. เซตของจำนวนเชิงซ้อนมีตัวผกผันการบวกคือ $(-a, -b)$

3. เซตของจำนวนเชิงซ้อนมีเอกลักษณ์การคูณคือ $(1, 0)$

4. เซตของจำนวนเชิงซ้อนมีตัวผกผันการคูณ คือ $\frac{1}{z}$ เขียนแทนด้วย Z^{-1}

ขั้นที่ 3 ขั้นการศึกษากลุ่มย่อยและฝึกทักษะ

6. ให้นักเรียนฝึกทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 3 เรื่องสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน จากชุดการเรียนการสอนให้เวลาประมาณ 20 นาทีแล้วช่วยกันเฉลยพร้อมทั้งอธิบาย

ขั้นที่ 4 ขั้นการประเมิน

7. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนอีกครั้ง

คาบที่ 3

ขั้นที่ 1 ขั้นการจัดกลุ่มและนำเข้าสู่บทเรียน

1. ให้นักเรียนจับกลุ่มกลุ่มละ 3 ด้วยวิธีการจับฉลาก โดยครูเขียนเลขที่ของนักเรียนในห้องทั้งหมดและคัดแยกฉลากเป็น 3 กอง แบ่งตามความสามารถ เก่ง-ปานกลาง-อ่อน เมื่อนักเรียนแต่ละคนมีกลุ่มแล้วให้จัดโต๊ะหันหน้าเข้าหากัน

2. ครูตั้งคำถามทบทวนสาระสำคัญในเรื่องโครงสร้างของจำนวนเชิงซ้อนและสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน 10 คำถาม แจกกระดาษคำตอบให้นักเรียนแต่ละกลุ่มตอบคำถามใช้เวลาประมาณ 5 นาที แล้วสลับกันตรวจในแต่ละกลุ่มเก็บเป็นคะแนนกลุ่ม 5 คะแนน

ขั้นที่ 2 ขั้นนำเสนอบทเรียนต่อทั้งชั้น

3. ให้นักเรียนทบทวนการหาแก้ปัญหาโจทย์ในเรื่องการทำให้ตัวส่วนไม่ติดกรณฑ์
ในเรื่องระบบจำนวนจริงพร้อมยกตัวอย่าง

4. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปความหมายและหลักการหาสังยุคของจำนวน
เชิงซ้อนพร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ

ตัวอย่าง กำหนด $z = 5 + 2i$ หา $\bar{z}$ (สังยุคของ Z) $= \overline{5 + 2i}$

$$= 5 - 2i$$

ตัวอย่าง จงหาผลหารของ $\frac{1-i}{2+i}$

จะได้

$$\begin{aligned} & \frac{(1+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} \\ &= \frac{(1-i)(2-i)}{2^2 - i^2} \therefore i^2 = -1 \\ &= \frac{2-i-2i+i^2}{4-(-1)} \\ &= \frac{2-3i+(-1)}{5} = \frac{1-3i}{5} \end{aligned}$$

ช่วยกันสรุป

$\therefore$ การหาผลหารก็คือ การทำให้ตัวส่วนไม่ติดเป็นค่าของจำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจินตภาพ
แท้ที่แน่นอน

ขั้นที่ 3 ขั้นการศึกษากลุ่มย่อยและฝึกทักษะ

3. ให้นักเรียนฝึกทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 3 เรื่องการนำสมบัติเชิงพีชคณิตมาใช้ในการ
การแก้ปัญหาโจทย์ จากชุดการเรียนการสอนให้เวลาประมาณ 15 นาทีโดยสมาชิกใน
แต่ละกลุ่มปรึกษาคำตอบร่วมกัน

ขั้นที่ 4 ขั้นการประเมิน

4. ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มส่งตัวแทนออกมาเฉลยคำตอบและอธิบายให้เพื่อนฟัง
หน้าชั้นเรียนโดยครูเลือกจากนักเรียนที่มีผลการเรียนอ่อนในกลุ่มให้ออกมาเฉลย ให้
คะแนนกลุ่ม 5 คะแนน จนครบทุกกลุ่มทุกข้อ ใช้เวลาประมาณ 15 นาที

5. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปการหาสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนอีกครั้ง

ขั้นที่ 5 ขั้นการยอมรับและความสำเร็จของกลุ่ม

6. ให้แต่ละกลุ่มรวมคะแนนกลุ่มและมอบรางวัลเล็ก ๆ น้อย ๆ 5 รางวัลให้กับกลุ่มที่มีคะแนนสูงสุดตามลำดับ พร้อมทั้งกล่าวชมเชยกลุ่มที่ได้รับรางวัลและให้กำลังใจกลุ่มที่ไม่ได้รับรางวัล

คาบที่ 4

1. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบชุดที่ 1 เรื่องโครงสร้างจำนวนเชิงซ้อนและพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน คิดเป็นคะแนนฐานครั้งที่ 1 คะแนนเต็ม 30 คะแนน
2. ให้อเวลาทำแบบทดสอบ 30 นาที เก็บรวบรวมแบบทดสอบ แล้วช่วยกันเฉลย

สื่อการเรียนรู้

ชุดการเรียนการสอนเรื่องจำนวนเชิงซ้อน

หนังสือแบบเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้น ม. 5 ของสสวท.

แบบทดสอบชุดที่ 1 เรื่องโครงสร้างของจำนวนเชิงซ้อนและสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

หนังสือคู่มือคณิตศาสตร์มัธยมปลายของสำนักพิมพ์อื่น เพื่อค้นคว้าเพิ่มเติม

บัตรคำถามเรื่อง โครงสร้างของจำนวนเชิงซ้อนและสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

การวัดผลและประเมินผล

สังเกตจากการตอบคำถามรายบุคคล โดยกำหนดเกณฑ์ ผ่าน/ไม่ผ่าน

สังเกตจากการทำแบบทดสอบรายบุคคล เป็นคะแนนฐานครั้งที่ 1 30 คะแนน

สังเกตจากการทำแบบฝึกทักษะ โดยพิจารณาเกณฑ์นักเรียนสามารถตอบคำถามถูกไม่น้อยกว่าร้อยละ 80

จากการร่วมมือและทำกิจกรรมภายในกลุ่ม โดยครูเป็นผู้ประเมินแบบประเมินพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม กำหนดเกณฑ์ขั้นต่ำต้องอยู่ในระดับดี

บันทึกหลังการสอน

.....

.....

.....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ สาระคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน

จำนวน 1 คาบ

เรื่อง กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. สามารถเขียนจุดบนระนาบเชิงซ้อนแทนจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ได้
2. หาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ได้

สาระการเรียนรู้

บทนิยาม ค่าสัมบูรณ์ (absolute value หรือ modulus) ของจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ คือ จำนวนจริง $\sqrt{a^2 + b^2}$ เขียนแทนด้วย $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

สมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

ให้ z , z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ จะได้ว่า

1. $|z|^2 = z\bar{z}$
2. $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
3. ถ้า $z \neq 0$ แล้ว $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$
4. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
5. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
6. $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$
7. $|z^n| = |z|^n$
8. $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2$
9. $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - \bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2$

กิจกรรมการเรียนรู้

คาบที่ 1

ขั้นที่ 1 ขั้นการจัดกลุ่มและนำเข้าสู่บทเรียน

1. ให้นักเรียนจับกลุ่มกลุ่มละ 3 คน จากสมาชิกในกลุ่มเดิมจากคาบที่แล้ว
2. ให้นักเรียนทบทวนการเขียนเวกเตอร์สองมิติบนระนาบ

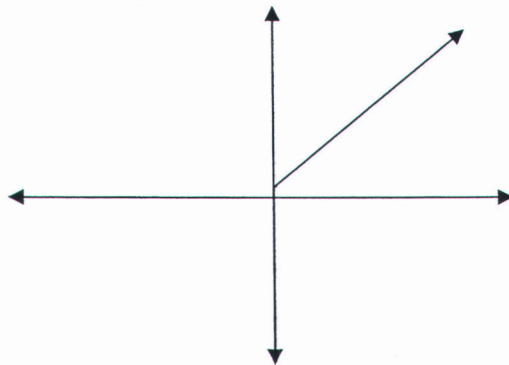
ขั้นที่ 2 ขั้นนำเสนอบทเรียนต่อทั้งชั้น

1. ครูเสนอแนะวิธีการเขียนจุดบนระนาบเชิงซ้อนที่ พร้อมทั้งยกตัวอย่าง ตามขั้นตอนดังนี้

เนื่องจากจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ สามารถเขียนในรูป (a, b) จึงกล่าวได้ว่า (a, b) เป็นจุดบนระนาบในระบบแกนมุมฉาก โดยมีการกำหนดแกน x แทนแกนจริง และแกน y แทนแกนจินตภาพ และเรียกระนาบที่เกิดจากแกนทั้งสองว่าระนาบเชิงซ้อน

เปรียบเทียบให้นักเรียนเห็นระนาบบนแกนมุมฉากในระบบจำนวนจริง และบนระนาบจำนวนเชิงซ้อน

ตัวอย่าง จงเขียน $4 + 3i$ ด้วยเวกเตอร์บนระนาบเชิงซ้อน



ให้นักเรียนฝึกหาจุดบนระนาบเชิงซ้อนจากแบบฝึกทักษะชุดที่ 4 เรื่องกราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน จากชุดการเรียนรู้การสอน ให้เวลาประมาณ 5 นาที แล้วช่วยกันเฉลยพร้อมทั้งอธิบาย

2. ครูอธิบายการหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนพร้อมทั้งยกตัวอย่าง

ตัวอย่าง จงหาค่าสัมบูรณ์ของ $2 - \sqrt{3}i$

$$|2 - \sqrt{3}i| = \sqrt{(2)^2 + (-\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{4+3}$$

$$= \sqrt{7}$$

ครูเสนอแนะเพิ่มเติมถึงสมบัติของค่าสัมบูรณ์พร้อมทั้งยกตัวอย่างการพิสูจน์ในบางข้อของสมบัติดังกล่าว

ตัวอย่าง จงพิสูจน์สมบัติที่ว่า $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

ให้ $z=a+bi$, $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$

$$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$|\bar{z}| = |a-bi| = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$|-z| = |-(a+bi)| = |-a-bi| = \sqrt{(-a)^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

ขั้นที่ 3 ขั้นการศึกษากลุ่มย่อยและฝึกทักษะ

3. ให้นักเรียนฝึกทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 4 เรื่องกราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน ให้เวลาประมาณ 10 นาที แล้วช่วยกันเฉลยพร้อมทั้งอธิบาย

4. ครูแจกใบงานการสร้างปริศนาคำทายรูปทรงอะไรเอ่ย โดยให้นักเรียนแต่ละกลุ่มปรึกษากัน กำหนดพิภคสามมิติ บนระนาบเชิงซ้อน 10 จุด เขียนลงบนใบงานที่ครูแจกให้ และช่วยกันคิดหาคำตอบล่วงหน้าในการสร้างรูปทรงปริศนาที่แต่ละกลุ่มคิดไว้ ให้เวลากำหนดพิภคดังกล่าวประมาณ 10 นาที

ขั้นที่ 4 ขั้นการประเมิน

5. ให้แต่ละกลุ่มนำใบงานมาส่ง และส่งตัวแทนมาจับฉลากใบงานของกลุ่มอื่น ให้เวลาในการคิดหาคำตอบ 15 นาที แล้วส่งใบงานดังกล่าวกลับไปยังกลุ่มที่เป็นเจ้าของใบงานเพื่อตรวจให้คะแนนตามเกณฑ์ คิดเป็นคะแนนกลุ่ม 10 คะแนน

6. ครูและนักเรียนช่วยกันทบทวนการเขียนกราฟ การหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนอีกครั้ง พร้อมทั้งให้การบ้านให้นักเรียนไปทำการพิสูจน์สมบัติข้อที่เหลือ

ขั้นที่ 5 ขั้นการยอมรับและความสำเร็จของกลุ่ม

7. ให้แต่ละกลุ่มรวมคะแนนกลุ่มและมอบรางวัล 5 รางวัลให้กับกลุ่มที่มีคะแนนสูงสุดตามลำดับ พร้อมทั้งกล่าวชมเชยกลุ่มที่ได้รับรางวัลและให้กำลังใจกลุ่มที่ไม่ได้รับรางวัล

สื่อการเรียนรู้

ชุดการเรียนรู้การสอนเรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

หนังสือแบบเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ของสสวท.

หนังสือคู่มือคณิตศาสตร์มัธยมปลายของสำนักพิมพ์อื่น เพื่อค้นคว้าเพิ่มเติม

ใบงานปริศนาคำทายรูปทรงอะไรเอ๋ย

การวัดผลและประเมินผล

สังเกตจากการตอบคำถามรายบุคคล โดยกำหนดเกณฑ์ ผ่าน/ไม่ผ่าน

สังเกตจากการทำแบบฝึกทักษะ โดยพิจารณาเกณฑ์นักเรียนสามารถตอบคำถาม ถูกไม่น้อยกว่าร้อยละ 80

จากการร่วมมือและทำกิจกรรมภายในกลุ่ม โดยครูเป็นผู้ประเมินแบบประเมิน พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม กำหนดเกณฑ์ขั้นต่ำต้องอยู่ในระดับดี

บันทึกหลังการสอน

.....

.....

.....

.....

.....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ สาระคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน

จำนวน 1 คาบ

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. เขียนจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ในรูปเชิงขั้วได้
2. แก้ปัญหาโจทย์จำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ในรูปเชิงขั้วได้

สาระการเรียนรู้

จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = x + yi = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

การคูณ การหารจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

$$\text{ให้ } \begin{cases} z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \\ z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \end{cases} \quad \text{โดยที่ } z_2 \neq 0 \text{ แล้ว}$$

$$1. z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$2. \frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2} (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)$$

$$3. \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] \quad \text{เมื่อ } z_2 \neq 0$$

$$4. \overline{z_1} = r_1 [\cos(-\theta_1) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

ทฤษฎีของเดอมัวร์ (De Moivre's theorem)

$$\text{ถ้า } z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \neq 0 \quad \text{และ} \quad n \in I$$

$$z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

กิจกรรมการเรียนรู้

คาบที่ 1

ขั้นที่ 1 ขั้นการจัดกลุ่มและนำเข้าสู่บทเรียน

1. ให้นักเรียนทบทวนค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติในรูปของพิกัด (x,y)

คือ $x \in \cos \theta$
 $y \in \sin \theta$

ขั้นที่ 2 ขั้นนำเสนอบทเรียนต่อทั้งชั้น

2. ครูเสนอแนะรูปแบบของ จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

$$z = x + yi = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ}$$

ตัวอย่าง จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในรูปเชิงขั้ว $z = 2 + 2i$

จาก $z = x + yi = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

หา r จาก $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\therefore z = 2\sqrt{2}(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

$$\therefore z = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

ขั้นที่ 3 ขั้นการศึกษากลุ่มย่อยและฝึกทักษะ

3. ให้นักเรียนฝึกทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 5 เรื่องจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

จากชุดการเรียนรู้การสอน ให้เวลาประมาณ 10 นาที

4. ครูยกตัวอย่างประกอบทฤษฎีของเดอมัวร์

ตัวอย่าง กำหนด $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ จงเขียน z^{10} ในรูป $a + bi$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวร์ $z^n = r^n[\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$

จะได้ว่า $z^{10} = r^{10}\left[\cos\left(\frac{10\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{10\pi}{6}\right)\right] = 2^{10}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2^9 - 2^9\sqrt{3}i$

5. ให้นักเรียนฝึกทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 5 ต่อ จากชุดการเรียนรู้การสอน ให้เวลาประมาณ 10 นาที

ขั้นที่ 4 ขั้นการประเมิน

6. ครูสุ่มเรียกนักเรียนออกมาเฉลยบนกระดานพร้อมทั้งอธิบายให้เพื่อนฟัง

ขั้นที่ 5 ขั้นการยอมรับและความสำเร็จของกลุ่ม

7. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปการเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วอีกครั้ง



สื่อการเรียนรู้

ชุดการเรียนรู้การสอนเรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

หนังสือแบบเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ของสสวท.

หนังสือคู่มือคณิตศาสตร์มัธยมปลายของสำนักพิมพ์อื่น เพื่อค้นคว้าเพิ่มเติม

การวัดผลและประเมินผล

สังเกตจากการตอบคำถาม โดยกำหนดเกณฑ์ผ่าน/ไม่ผ่าน

สังเกตจากการทำแบบฝึกทักษะ โดยพิจารณาเกณฑ์นักเรียนสามารถตอบคำถาม

ถูกไม่น้อยกว่าร้อยละ 80

บันทึกหลังการสอน

.....

.....

.....

.....

.....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ สาระคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน จำนวน 3 คาบ
 เรื่อง รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. หารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ได้

สาระการเรียนรู้

บทนิยาม สำหรับจำนวนเชิงซ้อน Z และ w ใดๆ โดย n เป็นจำนวนเต็มบวก Z เป็นรากที่ n ของ w ก็ต่อเมื่อ $Z^n = w$

สูตรการหารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนใดๆ

$$\text{ให้ } z = a + bi$$

$$\text{เนื่องจาก } \sqrt{a^2 + b^2} = |a + bi| \text{ ให้ } |a + bi| = r$$

$$\text{รากที่ 2 ของ } a + bi \text{ คือ } \pm(x + yi) \text{ และรากที่สองของ } a - bi \text{ คือ } \pm(x - yi)$$

$$\text{เมื่อ } x = \sqrt{\frac{r+a}{2}} \text{ และ } y = \sqrt{\frac{r-a}{2}}$$

ทฤษฎีบท ถ้า $Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ แล้วรากที่ n ของ Z มีได้ทั้งหมด n ราก ที่แตกต่างกัน คือ

$$Z_k = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{2k\pi + \theta}{n} + i \sin \frac{2k\pi + \theta}{n} \right) \text{ เมื่อ } k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$$

กิจกรรมการเรียนรู้

คาบที่ 1

ขั้นที่ 1 ขั้นการจัดกลุ่มและนำเข้าสู่บทเรียน

1. ให้นักเรียนจับกลุ่มกลุ่มละ 3 ด้วยวิธีการจับฉลาก โดยครูเขียนเลขที่ของนักเรียนในห้องทั้งหมดและคัดแยกฉลากเป็น 3 กอง แบ่งตามความสามารถ เก่ง-ปานกลาง-อ่อน เมื่อนักเรียนแต่ละคนมีกลุ่มแล้วให้จัดโต๊ะหันหน้าเข้าหากัน

2. ครูตั้งคำถาม 10 คำถาม ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทบทวนการเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วอีกครั้งพร้อมทั้งทบทวนเรื่องการหารากที่สองในระบบจำนวนจริง เก็บเป็นคะแนนกลุ่ม 5 คะแนน ใช้เวลาประมาณ 5 นาที

ขั้นที่ 2 ขั้นนำเสนอทบทวนต่อทั้งชั้น

3. ครูเสนอแนะเพิ่มเติมการหารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ

ตัวอย่าง จหารากที่สอง ของ $3 - 4i$

วิธีทำ ให้ $x + yi$ เป็นรากที่สอง ของ $3 - 4i$

$$(x + yi)^2 = 3 - 4i$$

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 3 - 4i$$

$$x^2 - y^2 = 3 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$xy = -2 \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$y = \frac{-2}{x} \quad \text{แทนใน } \dots\dots(1)$$

$$x^2 - \frac{4}{x^2} = 3$$

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$$

$$x^2 = 4 \quad \text{และ } x^2 = -1$$

เนื่องจาก $x \in R \quad x^2 \geq 0$

$$x = \pm 2 \quad \text{แทนค่าใน } \dots\dots(2)$$

$x = 2$ จะได้ $y = -1$ และ $x = -2$ จะได้ $y = 1$

แสดงว่ารากที่ 2 ของ $3 - 4i$ คือ $2 - i, -2 + i$

ขั้นที่ 3 ขั้นการศึกษากลุ่มย่อยและฝึกทักษะ

4. ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันฝึกทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 6 เรื่องรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน จากชุดการเรียนรู้การสอนให้เวลาประมาณ 15 นาที

5. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปสูตรในการหารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน พร้อมทั้งยกตัวอย่างเดิมเพื่อเปรียบเทียบคำตอบ

สูตรการหารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ

$$\text{ให้ } z = a + bi$$

เนื่องจาก $\sqrt{a^2 + b^2} = |a + bi|$ ให้ $|a + bi| = r$

รากที่ 2 ของ $a + bi$ คือ $\pm(x + yi)$ และรากที่สองของ $a - bi$ คือ $\pm(x - yi)$

$$\text{เมื่อ } x = \sqrt{\frac{r+a}{2}} \text{ และ } y = \sqrt{\frac{r-a}{2}}$$

ตัวอย่าง จงหารากที่สอง ของ $3 - 4i$

$$\text{วิธีทำ } z = 3 - 4i \quad \text{หา } r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

จะได้ว่ารากที่สองของ $3 - 4i$ คือ $\pm(x - yi)$

$$\text{เมื่อ } x = \sqrt{\frac{5+3}{2}} = 2 \text{ และ } y = \sqrt{\frac{5-3}{2}} = 1$$

แสดงว่ารากที่ 2 ของ $3 - 4i$ คือ $2 - i, -2 + i$

คำตอบเท่ากันทั้งสองวิธี

ขั้นที่ 4 ขั้นการประเมิน

6. ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มส่งตัวแทนออกมาเฉลยหน้าชั้นเรียนพร้อมทั้งอธิบายให้เพื่อนฟัง เก็บเป็นคะแนนกลุ่ม 5 คะแนน

ขั้นที่ 5 ขั้นการยอมรับและความสำเร็จของกลุ่ม

7. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปหลักในการหารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนอีกครั้ง

8. ครูแจกใบความรู้สรุปเนื้อหาสาระสำคัญและแบบฝึกหัดบททวนให้แก่สมาชิกแต่ละคนในกลุ่ม ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มสรุปสาระสำคัญเป็นบทกลอนหรือบทเพลงที่เข้าใจและจำง่ายด้วยภาษาและถ้อยคำที่สุภาพ พร้อมทั้งทำแบบฝึกหัดบททวน เป็นการบ้าน

คาบที่ 2

1. ครูและนักเรียนช่วยกันเฉลยการบ้านพร้อมทั้งอธิบาย

2. ครูเสนอแนะเพิ่มเติมเรื่องการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ พร้อมทั้งยกตัวอย่าง

ตัวอย่าง จงหารากที่ 3 ของ 8

วิธีทำ ให้ x เป็นรากที่ 3 ของ 8

$$\text{จะได้ } x^3 = 8$$

$$x^3 - 8 = 0$$

$$x^3 - 2^3 = 0$$

$$(x-2)(x^2+2x+4) = 0$$

$$x-2 = 0 \text{ หรือ } x^2+2x+4 = 0$$

$$x = 2 \text{ หรือ } x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

ดังนั้น รากที่ 3 ของ 8 คือ $2, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i$

3. ครบถ้วนอย่างการหารากที่ n โดยใช้ทฤษฎีบทที่อยู่ในรูปของเชิงซ้อน

จากทฤษฎีบท ถ้า $Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ แล้วรากที่ n ของ Z มีได้ทั้งหมด n ราก ที่แตกต่างกัน คือ $Z_k = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{2k\pi + \theta}{n} + i \sin \frac{2k\pi + \theta}{n} \right)$ เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$

ตัวอย่าง จงหารากที่ 3 ของ 8

วิธีทำ รูปเชิงซ้อนของ 8 คือ $8(\cos 0 + i \sin 0)$

จะได้ว่า $Z_k = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{2k\pi + \theta}{n} + i \sin \frac{2k\pi + \theta}{n} \right)$ เมื่อ $k = 0, 1, 2$

$$Z_0 = 8^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{2(0)\pi + 0}{3} + i \sin \frac{2(0)\pi + 0}{3} \right) = 2(1 + 0i) = 2$$

$$Z_1 = 8^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{2(1)\pi + 0}{3} + i \sin \frac{2(1)\pi + 0}{3} \right) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$Z_2 = 8^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{2(2)\pi + 0}{3} + i \sin \frac{2(2)\pi + 0}{3} \right) = -1 - \sqrt{3}i$$

ดังนั้น รากที่ 3 ของ 8 คือ $2, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i$

จะเห็นว่าทั้งสองวิธีมีคำตอบเท่ากัน

4. ให้นักเรียนฝึกทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 7 จากชุดการเรียนรู้การสอน ให้เวลาประมาณ 20 นาที แล้วช่วยกันเฉลยพร้อมทั้งอธิบาย

5. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปหลักในการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนอีกครั้ง
ตอนที่ 3

1. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบเรื่องกราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน
จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงซ้อน รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

2. ให้เวลาทำแบบทดสอบ 40 นาที เก็บรวบรวมแบบทดสอบ แล้วช่วยกันเฉลย
พร้อมทั้งอธิบาย โดยเก็บคะแนน 30 คะแนน คิดเป็นคะแนนฐานครั้งที่ 2

3. ให้นักเรียนแต่ละคนหาคะแนนฐานเฉลี่ยของตัวเอง

สื่อการเรียนรู้

ชุดการเรียนการสอนเรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

หนังสือแบบเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ของสสวท.

แบบทดสอบเรื่องกราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

หนังสือคู่มือคณิตศาสตร์มัธยมปลายของสำนักพิมพ์อื่น เพื่อค้นคว้าเพิ่มเติม

การวัดผลและประเมินผล

สังเกตจากการตอบคำถาม

สังเกตจากการทำแบบทดสอบ

สังเกตจากการทำแบบฝึกทักษะ

บันทึกหลังการสอน

.....

.....

.....

.....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ สาระคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน จำนวน 6 คาบ
 เรื่อง โครงสร้างจำนวนเชิงซ้อน สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน กราฟและค่า
 สัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน การเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว รากที่ n ของจำนวน
 เชิงซ้อน

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. สามารถนำความรู้ในเรื่องโครงสร้างของจำนวนเชิงซ้อน สมบัติเชิงพีชคณิต
 ของจำนวนเชิงซ้อน กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนมาใช้ในการแก้ปัญหา
 โจทย์ได้

2. สามารถนำความรู้ที่ได้รับมาอธิบายและคิดคำนวณ วิเคราะห์ เชื่อมโยงความรู้
 เดิมที่เกี่ยวข้องมาใช้ในการทำกิจกรรมกลุ่มให้ประสบความสำเร็จได้

สาระการเรียนรู้

จำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ หรือ (a, b) โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริง เรียก a ว่า
 ส่วนจริง (real part) ของจำนวนเชิงซ้อน z เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\text{Re}(z)$ เรียก b ว่า
 ส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของจำนวนเชิงซ้อน z เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\text{Im}(z)$
 สมบัติที่เกี่ยวกับการบวก ลบ คูณ จำนวนเชิงซ้อน

ถ้า z_1, z_2, z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อนแล้วจะได้ว่าจำนวนเชิงซ้อนมีสมบัติปิดการบวก
 และการคูณ

$$1. z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

สมบัติสลับที่การบวก

$$2. z_1 z_2 = z_2 z_1$$

สมบัติสลับที่การคูณ

$$3. z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

สมบัติการเปลี่ยนหมู่การบวก

$$4. z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$$

สมบัติการเปลี่ยนหมู่การคูณ

$$5. z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

สมบัติการแจกแจง

สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

ให้ $z = a + bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน เรียก $a - bi$ ว่าเป็นสังยุคของ z เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\bar{z}$ นั่นคือ $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

สมบัติสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

ให้ z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

$$1. \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \text{ และ } \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$2. \overline{\bar{z}} = z$$

$$3. \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$4. \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$5. \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$6. \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \text{ เมื่อ } \bar{z}_2 \neq 0$$

ค่าสัมบูรณ์ (Absolute value หรือ modulus) ของจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ คือ

จำนวนจริง $\sqrt{a^2 + b^2}$ เขียนแทนด้วย $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

สมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

ให้ z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ จะได้ว่า

$$1. |z|^2 = z \bar{z}$$

$$2. |z| = |-z| = |\bar{z}|$$

$$3. \text{ ถ้า } z \neq 0 \text{ แล้ว } \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

$$4. |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$5. |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$6. |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

$$7. |z^n| = |z|^n$$

$$8. |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2$$

$$9. |z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - \bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2$$

กิจกรรมการเรียนรู้

คาบที่ 1

1. ครูแบ่งกลุ่มนักเรียนออกเป็นกลุ่มละ 6 คน โดยในกลุ่มประกอบด้วยนักเรียนที่เก่ง-ปานกลาง-อ่อน เท่า ๆ กัน พร้อมทั้งอธิบายถึงวัตถุประสงค์ของการจัดกลุ่มและกิจกรรมที่นักเรียนต้องปฏิบัติร่วมกัน หลังจากนั้นให้นักเรียนจัดโต๊ะและนั่งเป็นกลุ่มเป็นวงกลม

2. กิจกรรมที่ 1 สรุปเนื้อหาสาระเรื่องจำนวนเชิงซ้อน

2.1 ครูแจกใบความรู้เรื่องจำนวนเชิงซ้อนให้นักเรียนแต่ละกลุ่มโดยให้นักเรียนสรุปความรู้ในหน่วยการเรียนรู้เรื่อง การเขียนสัญลักษณ์จำนวนเชิงซ้อน การหาค่า i^n สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนกราฟ จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน ให้นักเรียนช่วยกันสรุป

2.2 ครูจับสลากกลุ่มขึ้นมา 1 กลุ่ม ให้ออกมาสรุปหน้าชั้นให้เพื่อนฟัง และสุ่มหยิบสลากคำถาม 10 คำครูอ่านบัตรคำถาม ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันหาคำตอบ ให้เวลาประมาณ 10 นาที

2.3 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มแบ่งกลุ่มย่อยเป็นกลุ่มละ 3 คน กลุ่มย่อยหนึ่งกลุ่มเป็นตัวแทนไปแข่งขันกับเพื่อนต่างกลุ่ม ครูแจกอุปกรณ์เกม pick and pair สูตรจำนวนเชิงซ้อน พร้อมทั้งอธิบายกติกาและวิธีการเล่น ให้เวลาในการแข่งขัน 15 นาที คัดคะแนนของแต่ละกลุ่ม เก็บเป็นคะแนนกลุ่มครั้งที่ 1

3. ครูแจกแบบฝึกหัดทบทวนโดยให้นักเรียนแต่ละคนทำเป็นรายงาน สามารถปรึกษาและขอความช่วยเหลือให้เพื่อนภายในกลุ่มอธิบายและทำความเข้าใจร่วมกันได้ กำหนดเวลาให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดประมาณ 3-4 วัน

คาบที่ 2

1. กิจกรรมที่ 2 เกมตัวต่อพีชคณิตจำนวนเชิงซ้อน

ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันทบทวนสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน, ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนและสมบัติต่าง ๆ ของจำนวนเชิงซ้อน แต่ละกลุ่มนั่งล้อมเป็นวงกลม

ครูแจกอุปกรณ์ตัวต่อจำนวนเชิงซ้อนพร้อมทั้ง อธิบายกติกาและวิธีการเล่นให้เวลานักเรียน
ประมาณ 25 นาที

2. สรุปลักษณะและเก็บเป็นคะแนนกลุ่มครั้งที่ 2

คาบที่ 3

1. กิจกรรมที่ 3 เกมหมากฮอส จำนวนเชิงซ้อน

1.1 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มแบ่งสมาชิกในกลุ่มเป็นกลุ่มย่อยกลุ่มละ 3 คน โดย
ภายในกลุ่มย่อยต้องประกอบด้วย นักเรียนเก่ง-ปานกลาง-อ่อน นักเรียนกลุ่มย่อยดังกล่าว
ไปแข่งขันกับกลุ่มอื่นที่มีสมาชิก 3 คนเช่นกัน โดยวิธีการจัดทีมที่แข่งขันกันใช้วิธีการ
จับสลาก

1.2 ครูอธิบายวิธีการเล่นเกม หมากฮอสจำนวนเชิงซ้อน พร้อมทั้งเกณฑ์การคิด
คะแนน ให้เวลานักเรียนทำกิจกรรมแข่งขันกัน 20 นาที เมื่อหมดเวลา ให้สมาชิกแต่ละ
กลุ่มกลับมาที่กลุ่มของตนเองและช่วยกันหาคำตอบจากคำถามที่อยู่บนกระดานหมากฮอส
ให้เวลาประมาณ 10 นาที แต่ละกลุ่มสลับกันตรวจเฉลย

2. คิดคะแนนกลุ่มโดยรวมคะแนนจากผลคะแนนที่นักเรียนแข่งขันกับกลุ่มอื่น
และคะแนนที่เฉลยคำตอบจากกระดานหมากฮอส เก็บเป็นคะแนนกลุ่มครั้งที่ 2

3. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปความรู้ที่ได้รับอีกครั้ง

4. ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มคิดคะแนนกลุ่มโดยนำคะแนนทั้งหมดจาก 3 กิจกรรมมา
รวมแล้วคิดคำนวณให้เหลือ 15 คะแนน

5. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปความรู้ที่ได้รับอีกครั้ง

คาบที่ 4

1. ครูและนักเรียนช่วยกันเฉลยแบบฝึกหัดทบทวน พร้อมทั้งสุ่มนักเรียนออกมา
อธิบายหน้าชั้นเรียนในบางข้อที่ครูพิจารณาว่าควรจะเน้นย้ำ

2. ให้นักเรียนแต่ละคนรวบรวมแบบฝึกทักษะ ใบความรู้ เอกสารกิจกรรมกลุ่ม
และรายงาน รวบรวมให้เป็นแฟ้มสะสมงานที่สวยงามพร้อมทั้งสรุปความรู้ที่ได้รับส่ง
เป็นรายบุคคล

คาบที่ 5

ให้นักเรียนทำแบบทดสอบให้เวลาประมาณ 40 นาที และเก็บรวบรวมแบบทดสอบ พร้อมทั้งช่วยกันเฉลยและอธิบาย

คาบที่ 6

1. ให้นักเรียนแต่ละคนคิดคะแนนความก้าวหน้าโดยคำนวณจาก คะแนนเต็ม 30 คะแนน ที่เกิดจากการทดสอบและคะแนนกลุ่มที่ทำกิจกรรมในกระบวนการจัดการเรียน แบบร่วมมือแบบแบ่งกลุ่มผลสัมฤทธิ์ ลบกับ คะแนน 30 คะแนน เป็นคะแนนฐานที่เก็บ ก่อนการจัดการเรียนแบบร่วมมือแบบแบ่งกลุ่มผลสัมฤทธิ์ เท่ากับคะแนนที่ได้รับนำ คะแนนที่ได้มาเทียบเกณฑ์ตามแนวกิตติลาวิน แล้วเอาคะแนนความก้าวหน้าของสมาชิก ทุกคนในกลุ่มมารวมกัน จัดอันดับกลุ่มตามลำดับคะแนน

2. ครูกล่าวชมเชยและมอบรางวัลให้กับกลุ่มดีเด่น 3 อันดับแรก

3. ช่วยกันสรุปกิจกรรมถึงความรู้ที่ได้รับ และสมาชิกภายในกลุ่มทำแบบประเมิน พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม

สื่อการเรียนรู้

ชุดการเรียนการสอนเรื่องจำนวนเชิงซ้อน แบบทดสอบเรื่องจำนวนเชิงซ้อน

สื่อการสอน เกมหมากฮอสจำนวนเชิงซ้อน

สื่อการสอนเกมตัวต่อจำนวนเชิงซ้อน สื่อการสอนบัตรสูตรเกม pick and pair

หนังสือแบบเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ของสสวท.

หนังสือคู่มือคณิตศาสตร์มัธยมปลายของสำนักพิมพ์อื่น เพื่อค้นคว้าเพิ่มเติม

การวัดผลและประเมินผล

สังเกตจากการตอบคำถาม

สังเกตจากการทำแบบทดสอบ

สังเกตจากการทำแบบฝึกทักษะ

สังเกตจากการร่วมกิจกรรมกลุ่ม

บันทึกหลังการสอน

.....

.....

.....

คำชี้แจง

ชุดการเรียนรู้การสอนชุดนี้ใช้สำหรับจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในกลุ่มสาระคณิตศาสตร์ สาระคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่องจำนวนเชิงซ้อน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ประกอบไปด้วย

1. โครงสร้างจำนวนเชิงซ้อน
2. สมบัติเชิงพีชคณิตจำนวนเชิงซ้อน
3. กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน
4. จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว
5. รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

ชุดการเรียนรู้การสอนนี้ประกอบด้วย แบบฝึกทักษะ แบบทดสอบย่อย 3 ฉบับ ใบความรู้ สรุปเนื้อหา แบบฝึกหัดทบทวน แบบฝึกปฏิบัติการกิจกรรมกลุ่มในรูปแบบเกม 3 เกม โดยกำหนด รูปแบบและเนื้อหาเพื่อให้สอดคล้องกับหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 และกระบวนการจัดการเรียนการสอนโดยวิธีการเรียนแบบร่วมมือ แบบแบ่งกลุ่มผลสัมฤทธิ์ (STAD) แบ่งเป็น 2 ส่วนคือ

1. การจัดการเรียนแบบรายบุคคล ประกอบด้วย
 - แบบฝึกทักษะชุดที่ 1 โครงสร้างจำนวนเชิงซ้อน
 - แบบฝึกทักษะชุดที่ 2 โครงสร้างจำนวนเชิงซ้อน สมบัติการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อน
 - แบบฝึกทักษะชุดที่ 3 สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน
 - แบบทดสอบชุดที่ 1 (เก็บเป็นคะแนนฐานครั้งที่ 1)
 - แบบฝึกทักษะชุดที่ 4 กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน
 - แบบฝึกทักษะชุดที่ 5 จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว
 - แบบฝึกทักษะชุดที่ 6 รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน
 - แบบทดสอบชุดที่ 2 (เก็บเป็นคะแนนฐานครั้งที่ 2)
2. การจัดการเรียนแบบแบ่งกลุ่มละความสามารถ ประกอบด้วย
 - ใบความรู้ทบทวนเนื้อหาเรื่องจำนวนเชิงซ้อน
 - แบบฝึกหัดทบทวนจำนวนเชิงซ้อน

แบบฝึกปฏิบัติกิจกรรมกลุ่มครั้งที่ 1 เกม pick and pair สูตรจำนวนเชิงซ้อน

แบบฝึกปฏิบัติกิจกรรมกลุ่มครั้งที่ 2 เกมตัวต่อ พีชคณิตจำนวนเชิงซ้อน

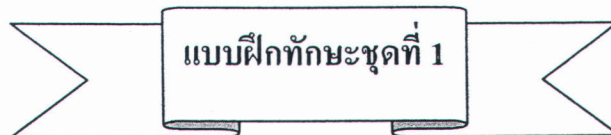
แบบฝึกปฏิบัติกิจกรรมกลุ่มครั้งที่ 3 เกมหมากฮอส จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

แบบทดสอบชุดที่ 3 (หาคะแนนความก้าวหน้า)

ระยะเวลาที่ใช้ในการจัดการเรียนการสอนแบ่งเป็น

- | | | | |
|--|-------|---|-----|
| 1. ทำการทดสอบก่อนเรียน-หลังเรียน | จำนวน | 2 | คาบ |
| 2. การจัดการเรียนแบบรายบุคคล | จำนวน | 9 | คาบ |
| 3. การจัดการเรียนแบบแบ่งกลุ่มตามความสามารถ | จำนวน | 6 | คาบ |

รวมเวลาที่ใช้ 17 คาบ คาบละ 50 นาที



เรื่อง โครงสร้างของจำนวนเชิงซ้อน

วันที่.....เดือน.....พ.ศ.....

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

- อธิบายโครงสร้างของจำนวนเชิงซ้อนได้
- เขียนจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ในรูป $z = a + bi$ ได้
- หาค่า i^n ได้

.....

1. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูป $a + bi$ พร้อมทั้งบอก ส่วนจริง $\text{Re}(z)$ และส่วนจินตภาพ $\text{Im}(z)$

จำนวน	$a + bi$	$\text{Re}(z)$	$\text{Im}(z)$
1. $\sqrt{5} + \sqrt{-3}$			
2. $2 + \sqrt{-25}$			
3. $\sqrt{-225}$			
4. $10 + \sqrt{\frac{-9}{16}}$			
5. $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{7}\right)$			

2. จงหาค่าของ i^n ต่อไปนี้

i^n	เศษ	คำตอบ	i^n	เศษ	คำตอบ
i^{1760}			i^{39}		
i^{2999}			i^{30}		
i^{3871}			i^{999}		
i^{2127}			i^{600}		
i^{228}			i^{501}		

3. จงเขียนผลลัพธ์ให้อยู่ในรูป $a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

โจทย์	ขั้นตอนการคิด	ผลลัพธ์
1. $(7 - 5i) + 4(5 - i)$		
2. $(5 - \sqrt{3}i) + (4 + \sqrt{8}i)$		
3. $4(i + 3) + 3(2i - 5)$		
4. $\frac{1}{2}(5 - 3i) - \frac{3}{2}(4 + i)$		
5. $-(6 + 4i) + (2 + 6i)$		

4. กำหนดให้ $Z_1 = 3 - 5i$, $Z_2 = 4 + i$, $Z_3 = -5 + 3i$ จงหาค่า $(Z_3 - Z_1) + (Z_2 - \frac{1}{2}Z_3)$

.....

.....

.....

5. จงหาจำนวนจริง x และ y ในแต่ละข้อ

1. $5x + 4yi = 20 - 16i$

.....

.....

.....

2. $3x - yi = (1 + i)^2$

.....

.....

.....

3. $x + y - xyi = 8 - 15i$

.....

.....

.....

เฉลยแบบฝึกทักษะชุดที่ 1
เรื่อง โครงสร้างของจำนวนเชิงซ้อน

วันที่.....เดือน.....พ.ศ.....

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. อธิบายโครงสร้างของจำนวนเชิงซ้อนได้
2. เขียนจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ในรูป $z = a + bi$ ได้
3. หาค่า i^n ได้

1. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูป $a + bi$ พร้อมทั้งบอก ส่วนจริง $\text{Re}(z)$ และส่วนจินตภาพ

$\text{Im}(z)$

จำนวน	$a + bi$	$\text{Re}(z)$	$\text{Im}(z)$
1. $\sqrt{5} + \sqrt{-3}$	$\sqrt{5} + \sqrt{3}i$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{3}$
2. $2 + \sqrt{-25}$	$2 + 5i$	2	5
3. $\sqrt{-225}$	$0 + 15i$	0	15
4. $10 + \sqrt{\frac{-9}{16}}$	$10 + \frac{3}{4}i$	10	$\frac{3}{4}$
5. $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{7}\right)$	$\frac{1}{9} + \frac{2}{7}i$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{7}$

2. จงหาค่าของ i^n ต่อไปนี้

i^n	เศษ	คำตอบ	i^n	เศษ	คำตอบ	i^n	เศษ	คำตอบ
i^{1760}	0	1	i^{39}	3	-i	i^{228}	0	1
i^{2999}	3	-i	i^{30}	2	-1	i^{501}	1	i
i^{3871}	3	-i	i^{999}	3	-i			
i^{212}	3	-i	i^{600}	0	1			

3. จงเขียนผลลัพธ์ให้อยู่ในรูป $a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

โจทย์	ขั้นตอนการคิด	ผลลัพธ์
1. $(7 - 5i) + 4(5 - i)$	$7 + 20 - 5i - 4i$	$27 - 9i$
2. $(5 - \sqrt{3}i) + (4 + \sqrt{8}i)$	$5 + 4 - \sqrt{3}i + 2\sqrt{2}i$	$9 - (\sqrt{3} - 2\sqrt{2})i$
3. $4(i + 3) + 3(2i - 5)$	$4i + 12 + 6i - 15$	$-3 + 10i$
4. $\frac{1}{2}(5 - 3i) - \frac{3}{2}(4 + i)$	$\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i - \frac{12}{2} - \frac{3}{2}i$	$\frac{-7}{2} - 3i$
5. $-(6 + 4i) + (2 + 6i)$	$-6 + 2 - 4i + 6i$	$-4 + 2i$

4. กำหนดให้ $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = 4 + i$, $z_3 = -5 + 3i$ จงหาค่า $(z_3 - z_1) + (z_2 - \frac{1}{2}z_3)$

$$[(-5 + 3i) - (3 - 5i)] + [(4 + i) - \frac{1}{2}(-5 + 3i)]$$

$$(-8 + 8i) + (\frac{13}{2} - \frac{i}{2})$$

$$-\frac{3}{2} + \frac{15}{2}i$$

5. จงหาจำนวนจริง x และ y ในแต่ละข้อ

1. $5x + 4yi = 20 - 16i$

$$5x = 20$$

$$x = \frac{20}{5} = 4$$

$$4yi = -16i$$

$$4y = -16$$

$$y = -4$$

2. $3x - yi = (1 + i)^2$

$$(1 + i)^2 = (1 + i)(1 + i) = 1 + i + i + i^2 = 2i$$

$$\therefore 3x - yi = 2i \quad \text{แสดงว่า } 3x = 0$$

$$x = 0$$

$$-yi = 2i$$

$$y = -2$$

3. $x + y - xyi = 8 - 15i$

$$x + y = 8 \quad \text{--- (1)}$$

$$-xy = -15$$

$$y = \frac{15}{x} \quad \text{--- (2)}$$

แทน y ใน (1)

$$x + \frac{15}{x} = 8$$

$$x^2 + 15 = 8x$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$(x - 5)(x - 3) = 0$$

$$x = 5, 3$$

$$\text{ถ้า } x = 5$$

$$y = 3$$

$$\text{ถ้า } x = 3$$

$$y = 5$$

แบบฝึกทักษะชุดที่ 2

เรื่อง โครงสร้างของจำนวนเชิงซ้อน สมบัติการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

วันที่.....เดือน.....พศ.....

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

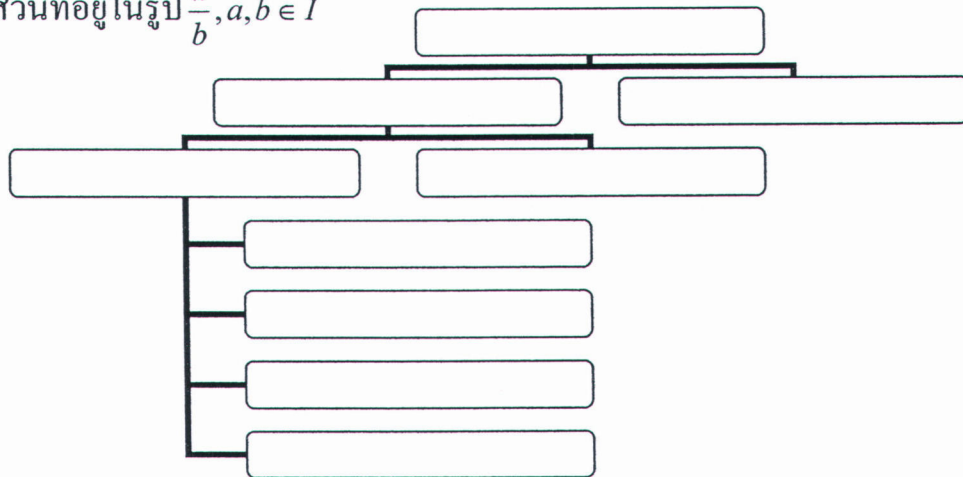
1. นำความรู้เรื่องค่าของ i และสมบัติเชิงพีชคณิตมาใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์ได้

1. จงเติมคำลงในช่องว่างเพื่อสรุปแผนผังแสดงความสัมพันธ์ของระบบจำนวนเชิงซ้อน

ให้ถูกต้อง โดยเลือกจากคำต่อไปนี้ ระบบจำนวนเชิงซ้อน จำนวนตรรกยะ จำนวนจริง

จำนวนอตรรกยะ จำนวนจินตภาพ จำนวนเต็ม ทศนิยมซ้ำรู้จบ ทศนิยมซ้ำไม่รู้จบ

เศษส่วนที่อยู่ในรูป $\frac{a}{b}, a, b \in I$



2. จงกาเครื่องหมาย ✓ หน้าข้อความที่ถูกต้องและกาเครื่องหมาย ✗ หน้าข้อความที่ผิด พร้อมทั้งขีดเส้นใต้ข้อความที่ผิดและให้เหตุผลประกอบว่าเพราะเหตุใด

...1) สำหรับจำนวนเชิงซ้อน (a,b) และ (c,d) ใด ๆ แล้ว $(a.b) = (c,d)$ ก็ต่อเมื่อ $a=c, b=d$

...2) สำหรับจำนวนเชิงซ้อน (a,b) และ (c,d) ใด ๆ แล้ว $(a.b) + (c,d) = (a+c, b+d)$

...3) สำหรับจำนวนเชิงซ้อน (a,b) และ (c,d) ใด ๆ แล้ว $(a.b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$

...4) ให้ C เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน, $z_1, z_2 \in C$ จะได้ $z_1+z_2 \in c$ เป็นสมบัติปิดการบวก

...5) เซตของจำนวนเชิงซ้อนมีสมบัติสลับที่การบวกแต่ไม่มีสมบัติสลับที่การคูณ

เฉลยแบบฝึกทักษะชุดที่ 2

เรื่อง โครงสร้างของจำนวนเชิงซ้อน, สมบัติการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

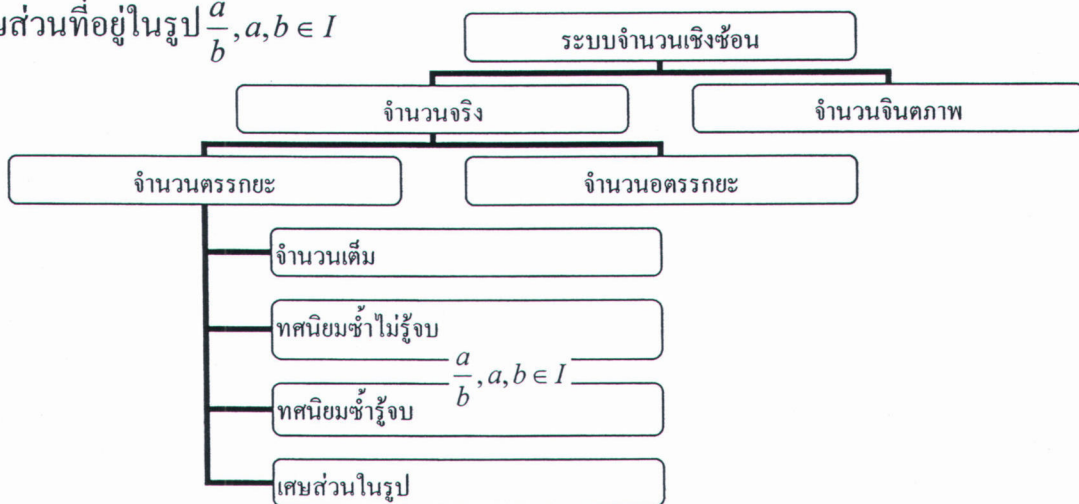
วันที่.....เดือน.....พศ.....

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. นำความรู้เรื่องค่าของ i และ สมบัติเชิงพีชคณิตมาใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์ได้

1. จงเติมคำลงในช่องว่างเพื่อสรุปแผนผังแสดงความสัมพันธ์ของระบบจำนวนเชิงซ้อน
ให้ถูกต้อง โดยเลือกจากคำต่อไปนี้ ระบบจำนวนเชิงซ้อน, จำนวนตรรกยะ, จำนวนจริง,
จำนวนอตรรกยะ, จำนวนจินตภาพ, จำนวนเต็ม, ทศนิยมซ้ำรู้จบ, ทศนิยมซ้ำไม่รู้จบ,

เศษส่วนที่อยู่ในรูป $\frac{a}{b}, a, b \in I$



2. จงกาเครื่องหมาย ✓ หน้าข้อความที่ถูกต้องและกาเครื่องหมาย ✗ หน้าข้อความที่ผิด
พร้อมทั้งขีดเส้นใต้ข้อความที่ผิดและให้เหตุผลประกอบว่าเพราะเหตุใด

- ✓ 1.) สำหรับจำนวนเชิงซ้อน (a, b) และ (c, d) ใด ๆ แล้ว $(a.b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c, b = d$
- ✓ 2.) สำหรับจำนวนเชิงซ้อน (a, b) และ (c, d) ใด ๆ แล้ว $(a.b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- ✗ 3.) สำหรับจำนวนเชิงซ้อน (a, b) และ (c, d) ใด ๆ แล้ว $(a.b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$
- ✓ 4.) ให้ C เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน, $z_1, z_2 \in C$ จะได้ $z_1 + z_2 \in c$ เป็นสมบัติปิดการบวก
- ✗ 5.) เซตของจำนวนเชิงซ้อนมีสมบัติสลับที่การบวกแต่ไม่มีสมบัติสลับที่การคูณ



เรื่อง สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

วันที่.....เดือน.....พศ.....

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. นำความรู้เรื่องค่าของ i และ สมบัติเชิงพีชคณิตมาใช้ในการแก้ปัญหาลงโทษได้

1. จงจับคู่ความสัมพันธ์ข้อความที่กำหนดให้ต่อไปนี้

- | | |
|---|---------------------------|
| 1.) เอกลักษ์ณ์การบวกของจำนวนเชิงซ้อน | ก. $(1, 0)$ |
| 2.) ตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน | ข. $a - bi$ |
| 3.) เอกลักษ์ณ์การคูณของจำนวนเชิงซ้อน | ค. $(0, 0)$ |
| 4.) ตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน | ง. $\frac{1}{z} = z^{-1}$ |
| 5.) สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ | จ. $(-a, -b)$ |

2. จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

1. จงหาค่าของ $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{25}$

.....

2. จงหาค่าของ $\frac{(1+i)^4 - (1-i)^4}{(1+2i)^2 + (1-2i)^2}$

.....

3. จงหาค่าของ $\frac{4(2i^{28} + i^{53})^2}{1-2i}$

.....

4. จงหาตัวผกผันการคูณของ $Z = \frac{3}{(1+i)(1+3i)}$

.....

5. จงหาตัวผกผันการบวกของ $Z = \frac{(1+\sqrt{3}i)^6(1-i)^3}{(-1+i)^4}$

.....

6. จงหาสังยุคของ $\frac{4+6i}{2-i}$

.....

เฉลยแบบฝึกทักษะชุดที่ 3

เรื่อง สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

วันที่.....เดือน.....พศ.....

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. นำความรู้เรื่องค่าของ i^n และ สมบัติเชิงพีชคณิตมาใช้ในการแก้โจทย์ได้

1. จงจับคู่ความสัมพันธ์ข้อความที่กำหนดให้ต่อไปนี้

- | | |
|---|---------------------------|
| ก 1.) เอกลัพท์การบวกของจำนวนเชิงซ้อน | ก. (1, 0) |
| ข 2.) ตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน | ข. $a - bi$ |
| ค 3.) เอกลัพท์การคูณของจำนวนเชิงซ้อน | ค. (0, 0) |
| ง 4.) ตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน | ง. $\frac{1}{z} = z^{-1}$ |
| ข 5.) สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ | จ. $(-a, -b)$ |

2. จงหาผลลัพธ์ต่อไปนี้

1. จงหาค่าของ $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{25}$

พิจารณา $((1+i)^2)^{12} \cdot (1+i)$

หาเฉพาะ $(1+i)^2$ ก่อน

$$(1+i)(1+i) = 1 + 2i - 1 = 2i$$

$$\therefore (2i)^{12} = 2^{12} i^{12} = 2^{12}$$

$$2^{12} \cdot (1+i)$$

พิจารณา $((1-i)^2)^{12} \cdot (1-i)$

หาเฉพาะ $(1-i)^2$ ก่อน

$$(1-i)(1-i) = -2i$$

$$\therefore (-2i)^{12} = 2^{12} i^{12} = 2^{12}$$

$$2^{12} \cdot (1-i)$$

จะได้ว่า $\frac{2^{12}(1+i)}{2^{12}(1-i)} = \frac{(1+i)}{(1-i)} \cdot \frac{(1+i)}{(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1^2-i^2} = \frac{2i}{2} = i$

2. จงหาค่าของ $\frac{(1+i)^4 - (1-i)^4}{(1+2i)^2 + (1-2i)^2}$

หา $(1+i)^4 = (2i)^2 = 4i^2 = -4$

$$(1-i)^4 = (-2i)^2 = 4i^2 = -4$$

ดังนั้น $-4 - (-4) = 0$

และพิจารณาตัวส่วนไม่เท่ากับ 0

จะได้ส่วนเท่ากับ -6

(พิจารณาตัวส่วน) $(1+2i)^2 = -3 + 4i$

$$(1-2i)^2 = -3-4i$$

$$\therefore (-3+4i)+(-3-4i) = -6$$

$$\therefore \text{คำตอบจึงมีค่าเท่ากับ } \frac{0}{-6} = 0$$

3. จงหาค่าของ $\frac{4(2i^{28} + i^{53})^2}{1-2i}$

พิจารณา i^{28} นำ 28 หารด้วย 4 เหลือเศษ 0 ลงตัว จะได้ $i^{28} = 1$

พิจารณา i^{53} นำ 53 หารด้วย 4 เหลือเศษ 1 จะได้ $i^{53} = i$

$$\text{จัดรูปใหม่จะได้ } \frac{4(2(1)+i)^2}{1-2i} = \frac{4(2+i)^2}{1-2i} = \frac{(12+16i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-20+40i}{5} = -4+8i$$

4. จงหาตัวผกผันการคูณของ $z = \frac{3}{(1+i)(1+3i)}$

ตัวผกผันการคูณของ z คือ $\frac{1}{z}$ หรือ z^{-1}

$$\therefore \frac{1}{z} = \frac{(1+i)(1+3i)}{3} = \frac{1+3i+i+3i^2}{3} = \frac{-2+4i}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3}i$$

5. จงหาตัวผกผันการบวกของ $Z = \frac{(1+\sqrt{3}i)^6(1-i)^3}{(-1+i)^4}$

ตัวผกผันของ z คือ $-a-bi$

$$\text{หา } (1+\sqrt{3}i)^6 = (-2+2\sqrt{3}i)^3 = (-8-8\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i) = 16-16\sqrt{3}i$$

$$(1-i)^3 = (-2i)(1-i) = -2i-2$$

$$(-1+i)^4 = (-2-2i)^2 = 8i$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{(16-16\sqrt{3}i)(-2-2i)}{8i} &= \frac{16(1-\sqrt{3}i)(-2)(1+i)}{8i} \\ &= \frac{-4(1-\sqrt{3}i)(1+i)}{i} \cdot \frac{i}{i} \\ &= 4(1-\sqrt{3}i)(1+i)(i) \\ &= 4[(-1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i] \end{aligned}$$

$$\therefore (-4+4\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i$$

$$\begin{aligned} \text{ตัวผกผันของ } z \text{ คือ } -a-bi &= -(-4+4\sqrt{3})-(1+\sqrt{3}i) \\ &= (4-4\sqrt{3})-(1+\sqrt{3}i) \end{aligned}$$

6. จงหาสังยุคของ $\frac{4+6i}{2-i}$

พิจารณา $\frac{(4+6i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{8+4i+12i+6i^2}{2^2-i^2}$

$$= \frac{2+16i}{3}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{16}{3}i$$

สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ คือ $\bar{z} = a - bi$

$$\therefore \bar{z} = \frac{2}{3} - \frac{16}{3}i$$

แบบทดสอบชุดที่ 1 (คะแนนฐานครั้งที่ 1)

เรื่อง โครงสร้างของจำนวนเชิงซ้อน, สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

คำชี้แจง ข้อสอบมีทั้งหมด 10 ข้อ คะแนนเต็ม 30 คะแนน

1. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูป $a + bi$ พร้อมทั้งบอก $\text{Re}(z)$ และ $\text{Im}(z)$ (2 คะแนน)

จำนวน	$a + bi$	$\text{Re}(z)$	$\text{Im}(z)$
1. $\sqrt{7} + \sqrt{-9}$			
2. $\left(\frac{2}{9}, \frac{-1}{5}\right)$			

2. จงหาค่าของ i^n ต่อไปนี้ (3 คะแนน)

i^n	เศษ	คำตอบ	i^n	เศษ	คำตอบ
i^{1760}			i^{39}		
i^{2999}			i^{30}		
i^{3871}			i^{999}		

3. จงเขียนผลลัพธ์ให้อยู่ในรูป $a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง (2 คะแนน)

โจทย์	ขั้นตอนการคิด	ผลลัพธ์
1. $\frac{3}{4}(2 - 3i) - \frac{1}{2}(1 + 8i)$		
2. $-(9 + 3i) + (5 + 4i)$		

4. กำหนดให้ $Z_1 = 6 - 3i$, $Z_2 = 3 + i$, $Z_3 = -2 + 9i$ จงหาค่า $(Z_3 - 3Z_1) + (Z_2 - \frac{1}{3}Z_3)$

(2 คะแนน)

.....

.....

5. จงหาจำนวนจริง x และ y ในแต่ละข้อ (4 คะแนน)

1. $2x + 8yi = 20 - 24i$

.....

.....

2. $12x - 3yi = (2 - i)^2$

.....

.....

6. จงหาจำนวนจริง x, y ซึ่ง $(1-i)x + (1+i)y = 1-3i$ (3 คะแนน)

.....

.....

7. จงหาสังยุคของ $3+i - \frac{(1+i)^2}{1-i}$ ในรูป $a+bi$ (3 คะแนน)

.....

.....

8. จงพิสูจน์สมบัติสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้เมื่อกำหนดให้ $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$

8.1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ (2 คะแนน)

.....

.....

8.2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ (2 คะแนน)

.....

.....

9. กำหนด Z เป็นจำนวนเชิงซ้อน $\bar{z}$ เป็นสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน ถ้า $\overline{z_2} = 3 + 2i$ และ $\overline{z_1}z_2 + 2z_2 - 1 = 0$ จงหาตัวผกผันการคูณของ z_1 (4 คะแนน)

.....

.....

10. กำหนด $z = x + yi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ ถ้า $(x + yi)(2 + 3i) = 5 + i$ แล้ว $x - yi$ มีค่าเท่าใด (3 คะแนน)

.....

.....

เฉลยแบบทดสอบชุดที่ 1 (คะแนนฐานครั้งที่ 1)

เรื่อง โครงสร้างของจำนวนเชิงซ้อน, สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

คำชี้แจง ข้อสอบมีทั้งหมด 10 ข้อ คะแนนเต็ม 30 คะแนน

1. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูป $a + bi$ พร้อมทั้งบอก $\text{Re}(z)$ และ $\text{Im}(z)$ (2 คะแนน)

จำนวน	$a + bi$	$\text{Re}(z)$	$\text{Im}(z)$
1. $\sqrt{7} + \sqrt{-9}$	$\sqrt{7} + 3i$	$\sqrt{7}$	3
2. $\left(\frac{2}{9}, \frac{-1}{5}\right)$	$\frac{2}{9} - \frac{1}{5}i$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{5}$

2. จงหาค่าของ i^n ต่อไปนี้ (3 คะแนน)

i^n	เศษ	คำตอบ	i^n	เศษ	คำตอบ
i^{1760}	0	1	i^{33}	1	i
i^{2999}	3	$-i$	i^{30}	2	-1
i^{3871}	3	$-i$	i^{999}	3	$-i$

3. จงเขียนผลลัพธ์ให้อยู่ในรูป $a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง (2 คะแนน)

โจทย์	ขั้นตอนการคิด	ผลลัพธ์
1. $\frac{3}{4}(2 - 3i) - \frac{1}{2}(1 + 8i)$	$\frac{6}{4} - \frac{1}{2} - \frac{9}{4}i - \frac{8}{2}i$	$1 - \frac{25}{4}i$
2. $-(9 + 3i) + (5 + 4i)$	$-9 - 3i + 5 + 4i$	$-4 + i$

4. กำหนดให้ $z_1 = 6 - 3i$, $z_2 = 3 + i$, $z_3 = -2 + 9i$ จงหาค่า $(z_3 - 3z_1) + (z_2 - \frac{1}{3}z_3)$ (2 คะแนน)

$$[(-2 + 9i) - 3(6 - 3i)] + [(3 + i) - \frac{1}{3}(-2 + 9i)]$$

$$(-20) + (\frac{11}{3} - 2i)$$

$$\frac{49}{3} - 2i$$

5. จงหาจำนวนจริง x และ y ในแต่ละข้อ (4 คะแนน)

1. $2x + 8yi = 20 - 24i$

$$2x = 20$$

$$x = \frac{20}{2} = 10$$

$$8yi = -24i$$

$$y = \frac{-24}{8} = -3$$

2. $12x - 3yi = (2 - i)^2$

$$12x - 3yi = 3 - 4i$$

$$\text{จะได้ } 12x = 3$$

$$x = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$-3yi = -4i$$

$$-3y = -4$$

$$y = \frac{4}{3}$$

6. จงหาจำนวนจริง x, y ซึ่ง $(1 - i)x + (1 + i)y = 1 - 3i$ (3 คะแนน)

$$x - xi + y + yi = (x + y) + (-x + y)i = 1 - 3i$$

$$\text{จะได้ว่า } x + y = 1 \quad \text{--- (1)}$$

$$-x + y = -3 \quad \text{--- (2)}$$

$$\text{(1) - (2)} \quad 2x = 4$$

$$x = 2$$

$$\text{แทน } x \text{ ใน (1)}$$

$$2 + y = 1$$

$$y = 1 - 2 = -1$$

$$\therefore x = 2, y = -1$$

7. จงหาสังยุคของ $3 + i - \frac{(1+i)^2}{1-i}$ ในรูป $a + bi$ (3 คะแนน)

$$\text{พิจารณา } (1+i)^2 = 2i$$

$$\text{จะได้ } (3+i) - \left[\frac{2i}{(1-i)} \times \frac{(1+i)}{(1+i)} \right] = (3+i) - \left[\frac{2i + 2i^2}{1^2 - i^2} \right]$$

$$= (3+i) - \left[\frac{2i - 2}{2} \right]$$

$$= (3+i) - (-1+i)$$

$$z = 4$$

$$\bar{z} = 4$$

8. จงพิสูจน์สมบัติสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้เมื่อกำหนดให้ $z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2 + b_2i$

8.1) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ (2 คะแนน)

$$\text{หา } \overline{z_1 + z_2} = \overline{(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i)} = \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i} = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i$$

$$\text{หา } \bar{z}_1 = a_1 - b_1i, \bar{z}_2 = a_2 - b_2i$$

$$\overline{z_1 + z_2} = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i$$

$$\therefore \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$8.2) \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \quad (2 \text{ คะแนน})$$

$$\begin{aligned} \text{หา } \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i)} \\ &= \overline{a_1a_2 + a_1b_2i + a_2b_1i + b_1b_2i^2} \\ &= \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i} \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{หา } \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} &= (a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i) = a_1a_2 - a_1b_2i - a_2b_1i + b_1b_2i^2 \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)i \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

9. กำหนด Z เป็นจำนวนเชิงซ้อน $\overline{z}$ เป็นสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน ถ้า $\overline{z_2} = 3 + 2i$ และ

$$\overline{z_1}z_2 + 2z_2 - 1 = 0 \text{ จงหาตัวผกผันการคูณของ } z_1 \quad (4 \text{ คะแนน})$$

$$\text{ถ้า } \overline{z_2} = 3 + 2i \quad \text{แสดงว่า } z_2 = 3 - 2i$$

$$\text{จะได้ว่า } \overline{z_1}(3 - 2i) + 2(3 - 2i) - 1 = 0$$

$$\overline{z_1} = \frac{-6 + 4i + 1}{3 - 2i} = \frac{(-5 + 4i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{-23 + 2i}{3^2 - (2i)^2}$$

$$\overline{z_1} = \frac{-23}{13} + \frac{2}{13}i$$

$$z_1 = \frac{-23}{13} - \frac{2}{13}i$$

$$\begin{aligned} \text{หา } z_1^{-1} &= \frac{1}{\frac{-23}{13} - \frac{2}{13}i} \\ &= \frac{13}{(-23 - 2i)(-23 + 2i)} \\ &= \frac{-299 + 26i}{533} \\ &= \frac{-23 + 2i}{41} \\ &= \frac{-23}{41} + \frac{2}{41}i \end{aligned}$$

10. กำหนด $z = x + yi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ ถ้า $(x + yi)(2 + 3i) = 5 + i$ แล้ว $x - yi$ มีค่าเท่าใด (3 คะแนน)

$$\begin{aligned} x + yi &= \frac{(5 + i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} \\ &= \frac{10 - 15i + 2i - 3i^2}{4 + 9} \\ &= \frac{13 - 13i}{13} \\ &= 1 - i \end{aligned}$$

$$\therefore x + yi = 1 - i$$

$$x = 1$$

$$y = -1$$

$$\therefore x - yi = 1 - (-i) = 1 + i$$



เรื่อง กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

วันที่.....เดือน.....พศ.....

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. เขียนจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ด้วยเวกเตอร์บนระนาบเชิงซ้อนได้
2. หาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนและนำสมบัติของค่าสัมบูรณ์มาใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์ได้

.....

1. จงหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนในแต่ละข้อ

1. $3+4i$ =

2. $-3-3i$ =

3. $5+\sqrt{7}i$ =

2. จงพิสูจน์สมบัติของค่าสัมบูรณ์ต่อไปนี้

1. $|z| = |\bar{z}|$

2. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

3. กำหนด $z_1 = 2-i$ และ $z_2 = 3-2i$ จงหา

1. $|z_1 + z_2| =$

2. $|z_1| + |z_2| =$

3. จากข้อ 1 และ 2 เท่ากันหรือไม่

4. จงหาค่าสัมบูรณ์ของ z จากสมการ $\frac{2+i}{2-i} + \frac{3+4i}{1+2i} = z^2$

.....

5. จงเขียนเวกเตอร์ในระนาบเชิงซ้อนในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $(1, 5)$

2. $-5 + 3i$

3. $4 - i$

เฉลยแบบฝึกทักษะชุดที่ 4

เรื่อง กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

วันที่.....เดือน.....พศ.....

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. เขียนจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ด้วยเวกเตอร์บนระนาบเชิงซ้อนได้
2. หาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนและนำสมบัติของค่าสัมบูรณ์มาใช้ในการแก้ปัญหาลงโทษได้

1. จงหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนในแต่ละข้อ

$$1. 3+4i = |3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$2. -3-3i = |-3-3i| = \sqrt{(-3)^2+(-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$3. 5+\sqrt{7}i = |5+\sqrt{7}i| = \sqrt{5^2+(\sqrt{7})^2} = \sqrt{25+7} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

2. จงพิสูจน์สมบัติของค่าสัมบูรณ์ต่อไปนี้

$$1. |z| = |\bar{z}|$$

$$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$|\bar{z}| = |a-bi| = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\therefore |z| = |\bar{z}|$$

$$2. z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

$$z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

3. กำหนด $z_1 = 2-i$ และ $z_2 = 3-2i$ จงหา

$$1. |z_1 + z_2| = |(2-i) + (3-2i)| = |5-3i| = \sqrt{5^2+(-3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$2. |z_1| + |z_2| = \sqrt{2^2+(-1)^2} + \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{5} + \sqrt{13}$$

3. จากข้อ 1 และ 2 เท่ากันหรือไม่

ข้อ 1 และ ข้อ 2 ไม่เท่ากัน แสดงว่าไม่มีสมบัติ $|z_1 + z_2| \neq |z_1| + |z_2|$

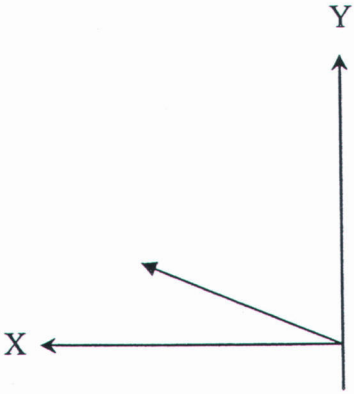
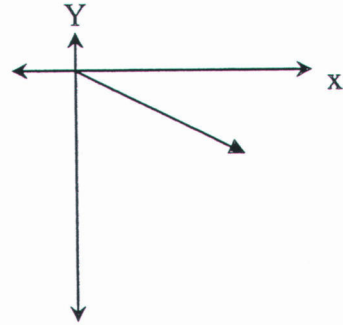
4. จงหาค่าสัมบูรณ์ของ z จากสมการ $\frac{2+i}{2-i} + \frac{3+4i}{1+2i} = z^2$

$$\text{พิจารณา } \frac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} + \frac{(3+4i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{14}{5} + \frac{2}{5}i = z^2$$

$$|z^2| = \left| \frac{14}{5} + \frac{2}{5}i \right| = \sqrt{\left(\frac{14}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{200}{25}} = \sqrt{8} = |z|^2$$

$$|z| = \sqrt{\sqrt{8}} = \sqrt[4]{8}$$

5. จงเขียนเวกเตอร์ในระนาบเชิงซ้อนในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. (1, 5)	2. $-5+3i$	3. $4-i$
		

แบบฝึกทักษะชุดที่ 5
เรื่อง จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

วันที่.....เดือน.....พศ.....

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. เขียนจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ในรูปเชิงขั้วได้
2. คูณและหารจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ในรูปเชิงขั้วได้
3. นำทฤษฎีของเดอมัวร์มาใช้ในการแก้ปัญหาลักษณะเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนได้

1. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ในรูปเชิงขั้ว

จำนวน เชิงซ้อน	$ z $ หรือ r	จุดภาค	θ	เขียนในรูปเชิงขั้ว
$1+\sqrt{3}i$				
$-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$				
$\frac{-1}{2}i$				
$-\sqrt{7}+\sqrt{21}i$				
$1-i$				
$5i$				

2. จงเขียน $z_1 z_2$ และ $\frac{z_1}{z_2}$ ในรูป $a+bi$

1. $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ และ $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

2. $z_1 = 2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$, $z_2 = 8(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ)$

3. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ ในรูป $a+bi$ เมื่อ $a, b \in R$

1. $(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)^5$

2. $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6$

เฉลยแบบฝึกทักษะชุดที่ 5
เรื่อง จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

วันที่.....เดือน.....พศ.....

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. เขียนจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ในรูปเชิงขั้วได้
2. คูณและหารจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ในรูปเชิงขั้วได้
3. นำทฤษฎีของเดอมัวร์มาใช้ในการแก้ปัญหาลักษณะเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนได้

1. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ในรูปเชิงขั้ว

จำนวน เชิงซ้อน	$ z $ หรือ r	จุดภาค	θ	เขียนในรูปเชิงขั้ว
$1 + \sqrt{3}i$	$= \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}$ $= 2$	(+,+) 1	$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{1}$ $\theta = 60^\circ$ $= \frac{\pi}{3}$	$z = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ หรือ $z = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ หรือ $z = 2(\cos(\frac{\pi}{3} + 2k\pi) + i \sin(\frac{\pi}{3} + 2k\pi))$ $, (k \in I)$
$-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$	$= \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2}$ $= \sqrt{2+2}$ $= 2$	(-,-) 3	$\tan \theta = \frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}$ $= 1$ $\theta = 225^\circ$ $= \frac{5\pi}{4}$	$z = 2(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)$ หรือ $z = 2(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})$ หรือ $z = 2(\cos(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi) + i \sin(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi))$ $, (k \in I)$
$\frac{-1}{2}i$	$= \sqrt{0 + (\frac{-1}{2})^2}$ $= \frac{1}{2}$	(0,-) แกน y ทางลบ	$\tan \theta =$ $\theta = 270^\circ$ $= \frac{3\pi}{2}$	$z = \frac{1}{2}(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$ หรือ $z = \frac{1}{2}(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})$ หรือ $z = 2(\cos(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) + i \sin(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi))$ $, (k \in I)$

จำนวน เชิงซ้อน	$ z $ หรือ r	จุดภาค	θ	เขียนในรูปเชิงขั้ว
- $\sqrt{7} + \sqrt{21}i$	$= \sqrt{(-\sqrt{7})^2 + (\sqrt{21})^2}$ $= \sqrt{28}$ $= 2\sqrt{7}$	(-,+) 2	$\tan \theta = 2 - \frac{\sqrt{21}}{7}$ $= -\sqrt{3}$ $\theta = 120^\circ$ $= \frac{2\pi}{3}$	$z = 2\sqrt{7}(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$ หรือ $z = 2\sqrt{7}(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$ หรือ $z = 2\sqrt{7}(\cos(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi) + i \sin(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi))$ $, (k \in I)$
$1-i$	$= \sqrt{1^2 + (-1)^2}$ $= \sqrt{2}$	(+,-) 4	$\tan \theta = \frac{-1}{1} = -1$ $\theta = 315^\circ$ $= \frac{7\pi}{4}$	$z = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$ หรือ $z = \sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4})$
$5i$	$= \sqrt{0^2 + 5^2}$ $= 5$	(+,+) แกน y ทางบ วก	$\tan \theta = \frac{5}{0}$ $\theta = 90^\circ$ $= \frac{\pi}{2}$	$z = 5(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$ หรือ $z = 5(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$

2. จงเขียน $z_1 z_2$ และ $\frac{z_1}{z_2}$ ในรูป $a + bi$

1. $z_1 = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ และ $z_2 = 3(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$

$$\begin{aligned}
 z_1 z_2 &= \left[2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right] \left[3 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right] \\
 &= 6 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \right) \\
 &= 6 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 6(0 + i) = 6i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)}{3 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)} \\
 &= \frac{2}{3} \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \right] \\
 &= \frac{2}{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i
 \end{aligned}$$

$$2. z_1 = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ), z_2 = 8(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2 \cdot 8 [\cos(30^\circ + 240^\circ) + i \sin(30^\circ + 240^\circ)] \\ &= 2 \cdot 8 [\cos(270^\circ) + i \sin(270^\circ)] \\ &= 16 [\cos(270^\circ) + i \sin(270^\circ)] \\ &= 16(0 - i) \end{aligned}$$

$$= -16i$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2}{8} [\cos(30^\circ - 240^\circ) + i \sin(30^\circ - 240^\circ)] \\ &= \frac{1}{4} [\cos(-210^\circ) + i \sin(-210^\circ)] \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{8}i \end{aligned}$$

3. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ ในรูป $a + bi$ เมื่อ $a, b \in R$

$$1. (\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^5$$

$$\text{หา } r = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$$

พิจารณาจุดภาค (+, -) ที่ 4

หา θ

$$\tan \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -1$$

$$\theta = 315^\circ, 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

จากทฤษฎีของเดอมัวร์

$$z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

$$= 2^5 \left[\cos\left(5 \cdot \frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(5 \cdot \frac{7\pi}{4}\right) \right]$$

$$= 2^5 \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right]$$

$$= -32 \frac{\sqrt{2}}{2} + 32 \frac{\sqrt{2}}{2}i = -16\sqrt{2} + 16\sqrt{2}i$$

$$2. \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^6$$

$$\text{หา } r = \sqrt{\left(\frac{-1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} = 1$$

$$\tan \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{-1}{2}} = -\sqrt{3}$$

จุดภาค 2 (-,+)

$$\theta = 120^\circ, \frac{2\pi}{3}$$

$$z^6 = 1^6 \left(\cos \frac{6 \cdot 2\pi}{3} + i \sin \frac{6 \cdot 2\pi}{3} \right) = \cos 4\pi + i \sin 4\pi = 1 + 0i$$



เรื่อง รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

วันที่.....เดือน.....พศ.....

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

หารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ได้

.....

1. จงหารากที่ 2 ของ 1

.....

2. จงหารากที่ 3 ของ $2 - 2\sqrt{3}i$

.....

3. จงหารากที่ 2 ของ $-1 - \sqrt{3}i$ โดยใช้สูตร

.....

4. จงหารากที่ 2 ของ $3 + 4i$ โดยใช้สูตร

.....

เฉลยแบบฝึกทักษะชุดที่ 6

เรื่อง รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

วันที่.....เดือน.....พศ.....

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

หารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ได้

1. จงหารากที่ 2 ของ 1

พิจารณา $z = 1 = 1+0i = (1,0)$

เขียนในรูป $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

$$\tan \theta = \frac{0}{1} = 0 \text{ อยู่บนแกน } x \text{ ทางบวก}$$

$$\theta = 0$$

$$\therefore z = 1(\cos 0 + i \sin 0)$$

จากสูตรรากที่ n ของ z

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

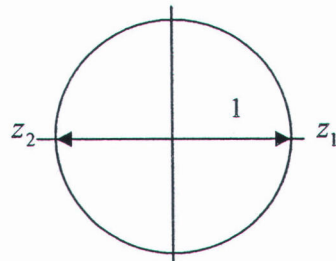
$$k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

$$\text{ถ้า } k=0 \quad z_0 = 1^{\frac{1}{2}} \left[\cos \frac{0+0}{2} + i \sin \frac{0+0}{2} \right] = 1[\cos 0 + i \sin 0] = 1$$

$$k=1 \quad z_1 = 1^{\frac{1}{2}} \left[\cos \frac{0+2\pi}{2} + i \sin \frac{2\pi}{2} \right]$$

$$= 1[\cos \pi + i \sin \pi]$$

$$= -1$$



$\therefore$ รากที่ 2 ของ 1 = 1, -1

2. จงหารากที่ 3 ของ $2-2\sqrt{3}i$

พิจารณา $z = 2-2\sqrt{3}i$

เขียนในรูป $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$r = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$$

$$\tan \theta = -\frac{2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

จุดภาคที่ 4 (+,-)

$$\theta = 300^\circ \text{ หรือ } 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$$\text{จะได้ } z = 4\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$$

$$k = \{0,1,2\}$$

$$z_0 = 4^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\frac{5\pi}{3} + 0}{3} + i \sin \frac{\frac{5\pi}{3} + 0}{3} \right)$$

$$= \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{5\pi}{9} + i \sin \frac{5\pi}{9} \right)$$

$$z_1 = \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{\frac{5\pi}{3} + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{5\pi}{3} + 2\pi}{3} \right)$$

$$= \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{11\pi}{9} + i \sin \frac{11\pi}{9} \right)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{\frac{5\pi}{3} + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{5\pi}{3} + 4\pi}{3} \right)$$

$$= \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{17\pi}{9} + i \sin \frac{17\pi}{9} \right)$$

จะได้ z_0, z_1, z_2 เป็นรากที่ 3 ของ $2 - 2\sqrt{3}i$ ตามลำดับ

3. จงหารากที่ 2 ของ $-1 - \sqrt{3}i$ โดยใช้สูตร

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

สูตร รากที่ 2 ของ $a - bi$ คือ $\pm(x - yi)$

$$\text{เมื่อ } x = \sqrt{\frac{r+a}{2}}, y = \sqrt{\frac{r-a}{2}}$$

$$a = -1, b = -\sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{\frac{2+(-1)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = \sqrt{\frac{2-(-1)}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \text{รากที่ 2 ของ } -1 - \sqrt{3}i \text{ คือ } \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}i \right)$$

4. จงหารากที่ 2 ของ $3 + 4i$ โดยใช้สูตร

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$a = 3, b = 4$$

$$x = \sqrt{\frac{5+3}{2}} = 2$$

$$y = \sqrt{\frac{5-3}{2}} = 1$$

$$\therefore \text{รากที่ 2 ของ } 3 + 4i \text{ คือ } \pm (2 + i)$$

แบบทดสอบครั้งที่ 2

เรื่อง กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน, จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว, รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

วันที่.....เดือน.....พ.ศ.....

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นำความรู้เรื่องกราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน, จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนมาใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์ได้

คำชี้แจง ข้อสอบมีทั้งหมด ข้อ 6 คะแนนเต็ม 30 คะแนน

1. พิจารณาข้อความที่กำหนดให้ต่อไปนี้ว่าถูกหรือผิด ถ้าผิดจงอธิบายเหตุผลประกอบ (8 คะแนน)

..... 1. ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ คือ $|z| = \sqrt{a^2 + (bi)^2}$

..... 2. $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2$ เมื่อ z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ, $n \in I^+$

..... 3. $|z^n| = |z|^n$ เมื่อ z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ, $n \in I^+$

..... 4. $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ เมื่อ z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ, $n \in I^+$

..... 5. จำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ เขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น $z = r(\cos \theta - i \sin \theta)$

เมื่อ $r = |z|$ หรือ $z = r \operatorname{cis} \theta$

..... 6. กำหนดให้ z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนโดยที่ $z_1 = r_1(\cos \theta_1 - i \sin \theta_1)$

$z_2 = r_2(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)$ จะได้ว่า $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$

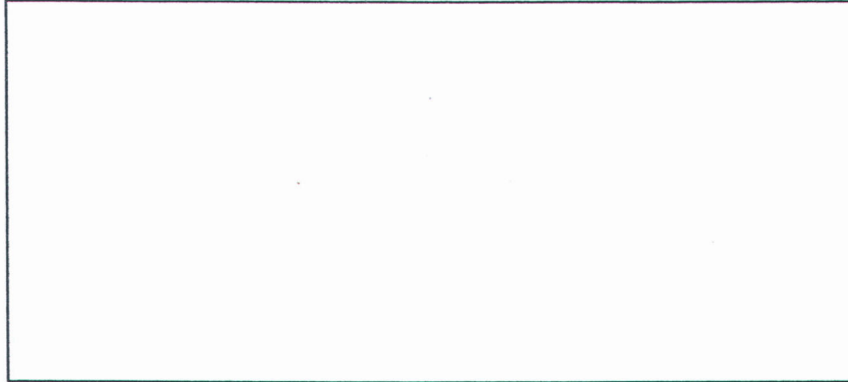
..... 7. ถ้า $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนโดยที่ $r = |z|$ และ n เป็นจำนวน

เต็มบวกแล้ว $z^n = r^n \left[\cos n \frac{\theta}{n} + i \sin n \frac{\theta}{n} \right]$

..... 8. ถ้า $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ แล้วรากที่ n ของ z มีได้ทั้งหมด n รากที่แตกต่างกัน

คือ $z_k = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{2k\pi + \theta}{n} + i \sin \frac{2k\pi + \theta}{n} \right]$

2. จงเขียน $3 + 3i, 3 - i, -3 + 2i, -4 - 5i$ ด้วยเวกเตอร์บนระนาบเชิงซ้อน (4 คะแนน)



3. จงหาค่าของ $|z|$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $z = (5 + 7i) - (2 - 3i)$ (2 คะแนน)

2. $z = \frac{2i^{30}}{(2 + \sqrt{5}i)^3}$ (3 คะแนน)

3. $z^3 = -5i^{120} + 2i^{101}$ (3 คะแนน)

4. จงเขียน $-\sqrt{3} - i$ ในรูปเชิงขั้ว (3 คะแนน)

5. จงเขียน $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{10}$ ในรูป $a + bi$ โดยใช้ความรู้ทฤษฎีของเดอมัวร์ (3 คะแนน)

6. จงหารากที่ 3 ของ 8 (4 คะแนน)

เฉลยแบบทดสอบครั้งที่ 2

เรื่อง กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน, จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

คำชี้แจง ข้อสอบมีทั้งหมด ข้อ 6 คะแนนเต็ม 30 คะแนน

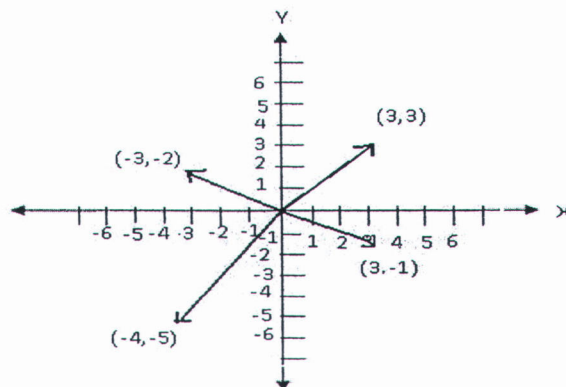
1. พิจารณาข้อความที่กำหนดให้ต่อไปนี้ว่าถูกหรือผิด ถ้าผิดจงอธิบายเหตุผลประกอบ (8 คะแนน)

- ✓ 1. ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ คือ $|z| = \sqrt{a^2 + (bi)^2}$
- ✓ 2. $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2$ เมื่อ z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ, $n \in I^+$
- ✓ 3. $|z^n| = |z|^n$ เมื่อ z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ, $n \in I^+$
- ✓ 4. $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ เมื่อ z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ, $n \in I^+$
- ✗ 5. จำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ เขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น $z = r(\cos \theta - i \sin \theta)$ เมื่อ $r = |z|$
หรือ $z = r \operatorname{cis} \theta$, $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

- ✗ 6. กำหนดให้ z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนโดยที่ $z_1 = r_1(\cos \theta_1 - i \sin \theta_1)$
 $z_2 = r_2(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)$ จะได้ว่า $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$
 $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$

- ✗ 7. ถ้า $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนโดยที่ $r = |z|$ และ n เป็นจำนวนเต็ม
บวกแล้ว $z^n = r^n \left[\cos n \frac{\theta}{n} + i \sin n \frac{\theta}{n} \right]$, $z^n = r^n [\cos n\theta + i \sin n\theta]$
- ✓ 8. ถ้า $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ แล้วรากที่ n ของ z มีได้ทั้งหมด n รากที่แตกต่างกัน
คือ $z_k = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{2k\pi + \theta}{n} + i \sin \frac{2k\pi + \theta}{n} \right]$

2. จงเขียน $3 + 3i, 3 - i, -3 + 2i, -4 - 5i$ ด้วยเวกเตอร์บนระนาบเชิงซ้อน (4 คะแนน)



3. จงหาค่าของ $|z|$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้อย

1. $z = (5 + 7i) - (2 - 3i)$ (2 คะแนน)

$$z = 3 + 10i$$

$$|z| = \sqrt{3^2 + 10^2} = \sqrt{109}$$

2. $z = \frac{2i^{30}}{(2 + \sqrt{5}i)^3}$ (3 คะแนน)

$$|z| = \frac{|2i^{30}|}{|(2 + \sqrt{5}i)^3|} = \frac{2|i|^{30}}{|(2 + \sqrt{5}i)^3|} = \frac{2(1)^{30}}{|(2 + \sqrt{5}i)^3|}$$

$$= \frac{2}{|(2^2 + \sqrt{5}^2)^3|} = \frac{2}{27}$$

3. $z^3 = -5i^{120} + 2i^{101}$

พิจารณา $i^{120} = (i^4)^{30} = 1$

$$i^{101} = (i^{100})i = i$$

$$z^3 = -5 + 2i$$

$$|z^3| = |-5 + 2i|$$

$$|z^3| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{29}$$

$$|z| = \sqrt[3]{\sqrt{29}}$$

$$= \sqrt[6]{29}$$

4. จงเขียน $-\sqrt{3} - i$ ในรูปเชิงขั้ว (3 คะแนน)

พิจารณา $r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$

หา θ จาก $\tan \theta = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$ $(-, -)$ อยู่ในจุดภาคที่ 3 และ

$$\theta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}, \theta = 210^\circ$$

$$\therefore z = 2\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right), z = 2(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$$

$$\therefore z = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right)\right) \text{ เมื่อ } k \in I$$

5. จงเขียน $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{10}$ ในรูป $a + bi$ โดยใช้ความรู้ทฤษฎีของเคอสมัวร์ (3 คะแนน)

$$\text{พิจารณาค่า } r = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

$$\text{หาค่า } \theta \text{ จาก } \tan \theta = \frac{\frac{-1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = -1 \quad (+, -) \quad \text{อยู่ในจตุภาคที่ 4}$$

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}, \theta = 315^\circ$$

$$\therefore z = 1 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

$$\begin{aligned} \therefore z &= 1^{10} \left(\cos 1 \left(10 \times \frac{7\pi}{4} \right) + i \sin \left(10 \times \frac{7\pi}{4} \right) \right) \\ &= 1 \left(\cos \frac{35\pi}{2} + i \sin \frac{35\pi}{2} \right) \\ &= -i \end{aligned}$$

6. จงหารากที่ 3 ของ 8

จัดให้อยู่ในรูปเชิงขั้วจะได้ $8(\cos 0 + i \sin 0)$ ดังนั้นรากที่ 3 ของ 8 คือ

$$z_k = 8^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \right) \quad \text{เมื่อ } k = 0, 1, 2$$

$$z_0 = \sqrt[3]{8} [\cos 0 + i \sin 0] = 2[1 + 0i]$$

$$z_1 = \sqrt[3]{8} \left[\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right] = -1 + \sqrt{3}i$$

$$z_2 = \sqrt[3]{8} \left[\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right] = -1 - \sqrt{3}i$$

ดังนั้นรากที่ 3 ของ 8 คือ $2, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i$

ใบความรู้ เรื่องจำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ หรือ (a, b) โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริง เรียก a ว่า ส่วนจริง (real part) ของจำนวนเชิงซ้อน z เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\text{Re}(z)$ เรียก b ว่า ส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของจำนวนเชิงซ้อน z เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\text{Im}(z)$ ค่าของ i^n

แทน i^2 เท่ากับ -1

สมบัติที่เกี่ยวกับการบวก คูณ จำนวนเชิงซ้อน

ถ้า z_1, z_2, z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อนแล้วจะได้ว่าจำนวนเชิงซ้อนมีสมบัติปิดการบวกและการคูณ

- | | |
|--|----------------------------|
| 1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ | สมบัติสลับที่การบวก |
| 2. $z_1 z_2 = z_2 z_1$ | สมบัติสลับที่การคูณ |
| 3. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ | สมบัติการเปลี่ยนหมู่การบวก |
| 4. $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ | สมบัติการเปลี่ยนหมู่การคูณ |
| 5. $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ | สมบัติการแจกแจง |

สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

ให้ $z = a + bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน เรียก $a - bi$ ว่าเป็นสังยุคของ z เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\bar{z}$ นั่นคือ $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

สมบัติสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

ให้ z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

- $\text{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ และ $\text{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- $\overline{\bar{z}} = z$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ เมื่อ $\bar{z}_2 \neq 0$

ค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value หรือ modulus) ของจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ คือ

จำนวนจริง $\sqrt{a^2 + b^2}$ เขียนแทนด้วย $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

สมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

ให้ z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ จะได้ว่า

1. $|z|^2 = z\bar{z}$
2. $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
3. ถ้า $z \neq 0$ แล้ว $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$
4. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
5. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
6. $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$
7. $|z^n| = |z|^n$
8. $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2$
9. $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - \bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2$

จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = x + yi = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

การคูณ การหารจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

$$\text{ให้ } \begin{cases} z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \\ z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \end{cases} \quad \text{โดยที่ } z_2 \neq 0 \text{ แล้ว}$$

1. $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$
2. $\frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2} (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)$
3. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$ เมื่อ $z_2 \neq 0$
4. $\bar{z}_1 = r_1 [\cos(-\theta_1) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$

ทฤษฎีของเดอมัวร์ (De Moivre's theorem)

$$\text{ถ้า } z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \neq 0 \quad \text{และ} \quad n \in I$$

$$z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

บทนิยาม สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z และ w ใด ๆ โดย n เป็นจำนวนเต็มบวก Z เป็นรากที่ n ของ w ก็ต่อเมื่อ $z^n = w$

สูตรการหารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ

$$\text{ให้ } z = a + bi$$

เนื่องจาก $\sqrt{a^2 + b^2} = |a + bi|$ ให้ $|a + bi| = r$

รากที่ 2 ของ $a + bi$ คือ $\pm(x + yi)$ และรากที่สองของ $a - bi$ คือ $\pm(x - yi)$

$$\text{เมื่อ } x = \sqrt{\frac{r+a}{2}} \text{ และ } y = \sqrt{\frac{r-a}{2}}$$

ทฤษฎีบท ถ้า $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ แล้วรากที่ n ของ Z มีได้ทั้งหมด n ราก ที่แตกต่างกัน คือ

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{2k\pi + \theta}{n} + i \sin \frac{2k\pi + \theta}{n} \right) \text{ เมื่อ } k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$$

แบบฝึกหัดทบทวน

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. นำความรู้เรื่องจำนวนเชิงซ้อนมาใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์ได้
2. นำความรู้เรื่องจำนวนเชิงซ้อนมาใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์ขั้นสูงได้

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำลงกระดาษรายงาน พร้อมทั้งแสดงวิธีทำทุกข้อ

1. กำหนด $\frac{1}{2}a - \sqrt{3}i = -4 + 6bi$ จงหาค่าของ a และ b
2. ค่า $\frac{i^4 + i^5 + i^{12}}{2 - i^9 + i^{18} + i^7}$ มีค่าเท่าใด
3. กำหนด x และ y เป็นจำนวนจริงบวก ค่าของ x - y จากสมการ $x^2 + x + 6i = y^2i + 6 - 5yi$ มีค่าเท่าใด
4. ถ้า $(1, -2)(x, -3) = (y, -5) - (4, -2y)$ แล้วสังยุคของ $(2x, 4y) - (4x, 2y)$ มีค่าเท่าใด
5. ตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน $(\sqrt{5}, -1)$ มีค่าเท่าใด
6. ส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อน $\frac{4+2i}{3+i}$ มีค่าเท่าใด
7. ค่าของ x และ y ที่สอดคล้องกับสมการ $x - 5yi = \frac{1+i}{i} + \frac{1+i}{i}$ มีค่าเท่าใด
8. ค่าของ $\frac{10}{i(1+i)(2+i)(3+i)(4+i)}$ เขียนในรูป a+bi มีค่าเท่าใด
9. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริง ถ้า $(5-12i)^2(a+bi)^2 = i(-12+5i)^2$ แล้ว $|a+bi|$ มีค่าเท่าใด
10. จงหารากที่ 3 ของ 8i
11. ถ้า $0 \leq \theta \leq 2\pi$ และ $2(\cos \theta + i \sin \theta) = \sqrt{3} - i$ แล้ว θ มีค่าเท่าใด
12. ให้ $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{100}$ และ $A = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^8$ แล้ว $\frac{A}{B}$ มีค่าเท่าใด
13. ให้ z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $z_1 z_2 = 2i$ และ $z_1^{-1} = \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}$, $\left|z_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_2\right|^2$ มีค่าเท่าใด
14. ถ้า $z = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ แล้วค่าของ $\left|\frac{z-i}{z^6+z^3+2}\right|^2$ มีค่าเท่าใด

เฉลย แบบฝึกหัดทบทวน

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. นำความรู้เรื่องจำนวนเชิงซ้อนมาใช้ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ได้

2. นำความรู้เรื่องจำนวนเชิงซ้อนมาใช้ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ขั้นสูงได้

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำลงกระดาษรายงาน พร้อมทั้งแสดงวิธีทำทุกข้อ

1. กำหนด $\frac{1}{2}a - \sqrt{3}i = -4 + 6bi$ จงหาค่าของ a และ b

$$(a = -8, b = -\frac{\sqrt{3}}{6})$$

2. ค่า $\frac{i^4 + i^5 + i^{12}}{2 - i^9 + i^{18} + i^7}$ มีค่าเท่าใด

i

3. กำหนด x และ y เป็นจำนวนจริงบวก ค่าของ x-y จากสมการ

$$x^2 + x + 6i = y^2i + 6 - 5yi \quad \text{มีค่าเท่าใด}$$

-4

4. ถ้า $(1, -2)(x, -3) = (y, -5) - (4, -2y)$ แล้วสังยุคของ $(2x, 4y) - (4x, 2y)$ มีค่าเท่าใด

(-3, -1)

5. ตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน $(\sqrt{5}, -1)$ มีค่าเท่าใด

$$(\frac{\sqrt{5}}{6}, \frac{1}{6})$$

6. ส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อน $\frac{4+2i}{3+i}$ มีค่าเท่าใด $\frac{7}{5}$ 7. ค่าของ x และ y ที่สอดคล้องกับสมการ $x - 5yi = \frac{1+i}{i} + \frac{1+i}{i}$ มีค่าเท่าใด

$$x = 0, y = \frac{2}{5}$$

8. ค่าของ $\frac{10}{i(1+i)(2+i)(3+i)(4+i)}$ เขียนในรูป a+bi มีค่าเท่าใด

$$-\frac{4}{17} + \frac{1}{17}i$$

9. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริง ถ้า $(5-12i)^2(a+bi)^2 = i(-12+5i)^2$ แล้ว $|a+bi|$ มีค่าเท่าใด

10. จงหารากที่ 3 ของ $8i$

$$-2i, \sqrt{3}+i, -\sqrt{3}+i$$

11. ถ้า $0 \leq \theta \leq 2\pi$ และ $2(\cos \theta + i \sin \theta) = \sqrt{3} - i$ แล้ว θ มีค่าเท่าใด

$$\frac{11\pi}{6}$$

12. ให้ $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)^{100}$ และ $A = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^8$ แล้ว $\frac{A}{B}$ มีค่าเท่าใด

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

13. ให้ z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $z_1 z_2 = 2i$ และ $z_1^{-1} = \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}, \left| z_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} z_2 \right|^2$

มีค่าเท่าใด

$$7$$

14. ถ้า $z = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ แล้วค่าของ $\left| \frac{z-i}{z^6+z^3+2} \right|^2$ มีค่าเท่าใด

$$0,5$$

เกม pick and pair

สูตรจำนวนเชิงซ้อน

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. อธิบายสมบัติการบวกและการคูณ
2. อธิบายสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อนได้
3. อธิบายทฤษฎีบทค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนได้
4. อธิบายสมบัติการคูณและการหารจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วได้
5. อธิบายทฤษฎีของเดอมัวร์ได้

กติกาและวิธีการเล่น

1. กรรมการ (ครู) แสดงแผ่นป้ายสรุปสูตรทั้งหมดหน้าชั้นเรียน พร้อมทั้งให้ผู้เล่น (นักเรียน) ช่วยกันทบทวนสูตรก่อนเล่นเกม
2. แบ่งผู้เล่นออกเป็น 2 ฝ่าย ฝ่ายละ 3 คน แต่ละฝ่ายนั่งหันหน้าเข้าหากัน
3. กรรมการแจกบัตรสูตรทั้งหมด 40 ใบ ให้กับผู้เล่นดู ให้เวลา 30 นาที หลังจากนั้นให้ผู้เล่นแต่ละวง ช่วยกันคว่ำบัตรสูตร ให้เป็นแถวละ 8 ใบ ทั้งหมด 5 แถว
4. ให้ทำการสุ่มฝ่ายที่เริ่มเล่นก่อน โดยให้ทั้งสองกลุ่มตกลงกันเอง ตามเงื่อนไขที่ทั้งสองฝ่ายยอมรับได้
5. ผู้เล่นฝ่ายแรกเริ่มเล่นก่อน โดยสุ่มเปิดบัตรสูตรขึ้นมา 2 ใบ ถ้าบัตรสุ่มที่เปิดขึ้นมาจับคู่ได้ถูกต้อง ถือว่าผู้เล่นกลุ่มดังกล่าวได้ 2 คะแนน แต่ถ้ายังไม่ถูกต้อง ให้ปิดบัตรสูตรคว่ำลงที่ตำแหน่งเดิม
6. ถ้าผู้เล่นกลุ่มดังกล่าวเปิดได้ถูกต้อง ให้ทำการเล่นต่อจนกว่าจะเปิดผิด จึงสลับให้อีกกลุ่มหนึ่งเล่นต่อ
7. ดำเนินการเช่นนี้ต่อไปจนบัตรสูตรครบ 20 คู่ แล้วรวมคะแนน คะแนนสูงสุดแต่ละกลุ่มจะได้ไม่เกิน 40 คะแนน โดยเกมนี้กรรมการเป็นผู้จัดเวลา ไม่เกิน 15 นาที เมื่อหมดเวลาแล้ว ถ้าบัตรสูตรยังไม่หมดให้เกมจบลงที่ผู้เล่นกลุ่มที่ 2 แล้วนับคะแนนและบัตรสูตร หลังจากนั้นจึงช่วยกันเฉลยที่เหลือ

บัตรสูตรจำนวนเชิงซ้อน

$z_1 z_2$ ในรูปเชิงขั้ว	$r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$	จำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ ในรูปเชิงขั้ว	$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$
$\frac{z_1}{z_2}$ ในรูปเชิงขั้ว	$\frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$	ตัวผกผันการคูณ ของ z	$z^{-1} = \frac{1}{z}$
z^n โดย ทบ. เดอมัวร์	$r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$ เมื่อ $n \in I^+$	ตัวผกผันการบวก ของ $z = a + bi$	$-a - bi$
$ z_1 \cdot z_2 $	$ z_1 z_2 $	$\overline{z_1 + z_2}$	$\overline{z_1} + \overline{z_2}$
$ z_1 ^2$	$z \cdot \overline{z}$	ถ้า $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ รากที่ n ของ	$r^{\frac{1}{n}} (\cos \frac{2k\pi + \theta}{n} + i \sin \frac{2k\pi + \theta}{n})$ $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

เฉลย บัตรสูตรจำนวนเชิงซ้อน

สมบัติ การสลับที่การบวก	$z_1 + z_2 =$ $z_2 + z_1$	สังยุคของ z $a + bi$	$\overline{z}$ $a - bi$
สมบัติ การสลับที่การคูณ	$z_1 z_2 = z_2 z_1$	ค่าสัมบูรณ์ของ z $a + bi$	$ z $ $\sqrt{a^2 + b^2}$
สมบัติ การเปลี่ยนหมู่ การบวก	$(z_1 + z_2) + z_3 =$ $z_1 + (z_2 + z_3)$	$ z^n $	$ z ^n$
สมบัติ การเปลี่ยนหมู่ การคูณ	$(z_1 z_2) z_3 =$ $z_1 (z_2 z_3)$	$ z^{-1} $	$ z ^{-1}$
สมบัติ การแจกแจง	$z_1 (z_2 + z_3) =$ $z_1 z_2 + z_1 z_3$	$\left \frac{z_1}{z_2} \right $	$\frac{ z_1 }{ z_2 }$

เกมตัวต่อ

(โครงสร้าง และพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน)

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. นำความรู้เรื่องโครงสร้างจำนวนเชิงซ้อนมาใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์ได้
2. นำความรู้เรื่องพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อนมาใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์ได้

กติกาและวิธีการเล่น

1. กรรมการ(ครู) แสดงแผ่นป้ายสรุปสูตรทั้งหมดหน้าชั้นเรียน พร้อมทั้งให้ผู้เล่น(นักเรียน) ช่วยกันทบทวนสูตรก่อนเล่นเกม
2. แบ่งกลุ่มผู้เล่น(นักเรียน) เป็นกลุ่มกลุ่มละ 5-6 คน โดยแต่ละกลุ่มประกอบด้วยคนที่ เก่ง-ปานกลาง-อ่อน นั้งล้อมเป็นวง
3. กรรมการแจกอุปกรณ์ คือ ซองจดหมายสำหรับใส่ชิ้นส่วนตัวต่อและอธิบายวิธีเล่นดังนี้
ให้แต่ละกลุ่มช่วยกันนำชิ้นส่วนตัวต่อทั้งหมดมาจัดวางให้แต่ละด้านมีความสัมพันธ์กัน จนเกิดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีขนาดเท่ากับกระดาษฐานที่กรรมการแจกให้ หลังจากนั้นให้ช่วยกันคิดให้เรียบร้อย และพิจารณาความสัมพันธ์ของด้านแต่ละคู่ มีอยู่ 3 ด้านที่ผิด ให้ผู้เล่นหา 3 ด้านดังกล่าวพร้อมทั้งแก้ไขให้ถูกต้อง
4. เมื่อดำเนินการแล้วเสร็จ แต่ละกลุ่มช่วยกันอภิปรายความสัมพันธ์ของแต่ละด้านดังกล่าว จนสมาชิกในกลุ่มเข้าใจ แล้วนำตัวต่อมาส่งกรรมการ
5. ให้เวลาในการดำเนินการไม่เกิน 15 นาที ถ้าเสร็จตามกำหนด และกรรมการลองสุ่มผู้เล่นในกลุ่ม ถาม-ตอบประมาณ 3 คำถามเกณฑ์การให้คะแนน เสร็จตามเวลาที่กำหนด ตอบคำถามถูกต้อง คะแนนเต็ม 10 คะแนน

เกมหมากฮอส
(จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว)

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

เขียนจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ในรูปเชิงขั้วได้

กติกาและวิธีการเล่น

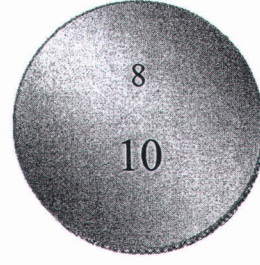
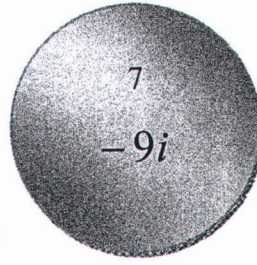
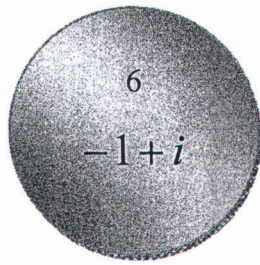
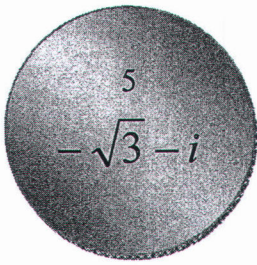
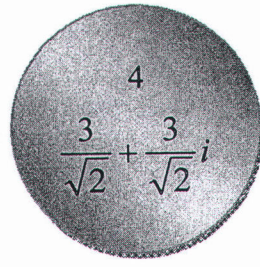
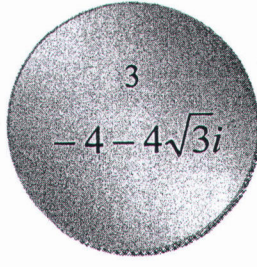
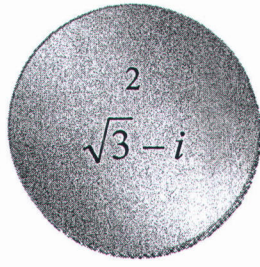
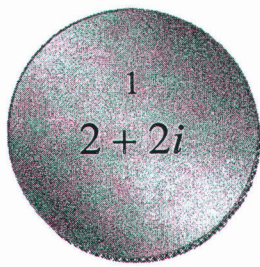
1. กรรมการ (ครู) สรุปหลักในการเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วพร้อมทั้งให้ผู้เล่น (นักเรียน) ช่วยกันทบทวน
2. แบ่งผู้เล่นเป็น 2 ฝ่าย ฝ่ายละ 3 คน แต่ละฝ่ายนั่งหันหน้าเข้าหากัน
3. กรรมการแจกอุปกรณ์ ประกอบด้วย (1) กระดานหมากฮอส ซึ่งมีตัวเลข 2-5 หมายถึงคะแนนที่ได้ถ้าผู้เล่นสามารถกินเบี้ยอีกฝ่ายและไปหยุดในตารางคะแนนที่เท่าใด โดยมี 2 กรณี คือ สามารถกินเบี้ยได้และตอบคำถามบนเบี้ยที่จะกินถูก กินเบี้ยได้แต่ตอบคำถามผิดคะแนนดังกล่าวจะถูกโอนเป็นของอีกฝ่ายทันที ถ้ามีโอกาสกินเบี้ยได้แต่ไม่กินอีกฝ่ายสามารถยึดเบี้ยดังกล่าวได้พร้อมทั้งได้คะแนน
เบี้ยจะมีคำถามคือค่า z ในรูป $a + bi$ ให้ผู้เล่นตอบให้อยู่ในรูป $z = r(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi))$
บัตรเฉลยของแต่ละฝ่าย เพื่อดูประกอบเมื่อผู้เล่นอีกฝ่ายตอบคำถาม และตารางบันทึกคะแนน
4. ดำเนินการเล่นโดยกติกาสากลเหมือนการเล่นหมากฮอสแตกต่างที่แต้มคะแนนและการตอบคำถาม (รายละเอียด การกินเบี้ยทแยงขวา-ซ้าย ข้างหน้า สามารถกินได้ 2-3-4 โดยตอบคำถามทุกเบี้ย แต่ถ้าตอบผิดไม่ถูกบางเบี้ยให้หยุดที่เบี้ยดังกล่าว หากเบี้ยเข้าฮอสสามารถข้ามตารางกินทแยงขวา-ซ้ายได้เช่นกัน)
5. เกมนี้ใช้เวลาเล่น 30 นาที หากหมดเวลาและเกมยังไม่จบ ให้สิ้นสุดและนับคะแนน พร้อมทั้งหยุดเกมที่ผู้เล่นฝ่ายที่ 2 ผู้ชนะคือผู้ที่ได้คะแนนมากกว่า

เฉลย เกมหมากฮอส
(จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว)

	5		5		5		5
4		4		4		4	
	3		3		3		3
2		2		2		2	
	2		2		2		2
3		3		3		3	
	4		4		4		4
5		5		5		5	

ตอบในรูป

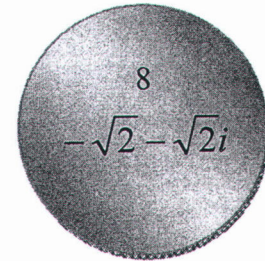
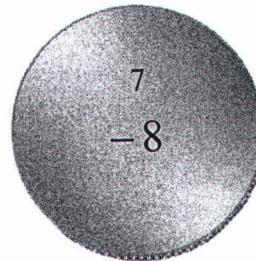
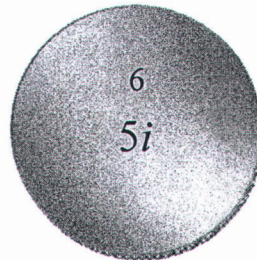
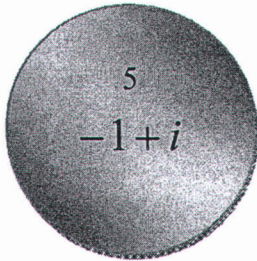
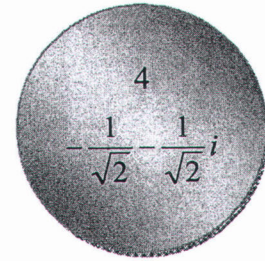
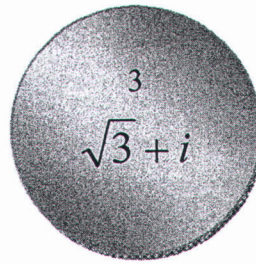
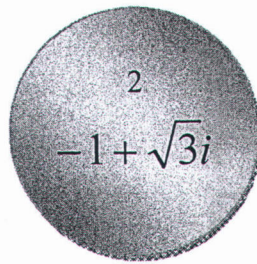
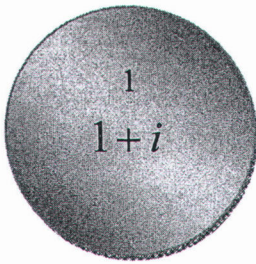
$$z = a + bi \leftrightarrow z = r(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi))$$



เป็ย

ผู้เล่นฝ่ายที่ 1

- เฉลย
1. $2\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \right]$
 2. $2 \left[\cos\left(\frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right) \right]$
 3. $8 \left[\cos\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right) \right]$
 4. $3 \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \right]$
 5. $2 \left[\cos\left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right) \right]$
 6. $\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) \right]$
 7. $9 \left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) \right]$
 8. $10 [\cos(0 + 2k\pi) + i \sin(0 + 2k\pi)]$



เบี้ย

ผู้เล่นฝ่ายที่ 2

- เฉลย
1. $\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \right]$
 2. $2 \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) \right]$
 3. $2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) \right]$
 4. $1 \left[\cos\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) \right]$
 5. $\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) \right]$
 6. $5 \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \right]$
 7. $8 [\cos(\pi + 2k\pi) + i \sin(\pi + 2k\pi)]$
 8. $2 \left[\cos\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) \right]$

แบบทดสอบชุดที่ 3

(หลังทำกิจกรรมกลุ่ม)

เพื่อเปรียบเทียบหาคะแนนความก้าวหน้า

เรื่อง โครงสร้างของจำนวนเชิงซ้อน พหุคูณของจำนวนเชิงซ้อน กราฟและค่าสัมบูรณ์
ของจำนวนเชิงซ้อน จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

คำชี้แจง ข้อสอบมีทั้งหมด 11 ข้อ คะแนนเต็ม 30 คะแนน

1. กำหนด $(a, b) + (-3, 5) = (2, 1)$ จงหาค่าของ a และ b (2 คะแนน)

.....

2. ค่าของ $\frac{i^7 + i^8 + i^{12}}{2 - i^{10} + i^9 + i^{13}}$ มีค่าเท่าใด (2 คะแนน)

.....

3. ตัวผกผันการคูณของ $\sqrt{3} - 2i$ มีค่าเท่าใด (2 คะแนน)

.....

4. ส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อน $\frac{4+3i}{2-2i}$ มีค่าเท่าใด (2 คะแนน)

.....

5. ถ้า (x, y) เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ $(x, y)(3, 4) = (20, 15)$ แล้วจำนวนเชิงซ้อน (x, y) มีค่าเท่าใด (2 คะแนน)

.....

6. จงเขียน $z = -4 - 4i$ ในรูปเชิงขั้ว (3 คะแนน)

.....

7. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ ในรูป $a+bi$

$$z = \left[2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right] \cdot \left[4 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \right] \quad (3 \text{ คะแนน})$$

.....

8. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ ในรูป $a+bi$

$$z = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)} \quad (3 \text{ คะแนน})$$

9. จงหาค่า r และ θ ที่เป็นไปได้ ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = 1 - \sqrt{3}i \quad \text{เมื่อ } 2\pi \leq \theta < 6\pi \quad (3 \text{ คะแนน})$$

10. จงหารากที่ 3 ของ $-2\sqrt{3} + 2i$ (4 คะแนน)

11. ถ้า $z = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ แล้ว $(z^{-1})^4$ มีค่าเท่าใด (4 คะแนน)

เฉลย แบบทดสอบชุดที่ 3

(หลังทำกิจกรรมกลุ่ม)

เพื่อเปรียบเทียบหาคะแนนความก้าวหน้า

เรื่อง โครงสร้างของจำนวนเชิงซ้อน พหุคูณของจำนวนเชิงซ้อน, กราฟและค่าสัมบูรณ์
ของจำนวนเชิงซ้อน จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

.....
คำชี้แจง ข้อสอบมีทั้งหมด 11 ข้อ คะแนนเต็ม 30 คะแนน

1. กำหนด $(a, b) + (-3, 5) = (2, 1)$ จงหาค่าของ a และ b (2 คะแนน)

$$(5, -4)$$

2. ค่าของ $\frac{i^7 + i^8 + i^{12}}{2 - i^{10} + i^9 + i^{13}}$ มีค่าเท่าใด (2 คะแนน)

$$\frac{4}{13} - \frac{7}{13}i$$

3. ตัวผกผันการคูณของ $\sqrt{3} - 2i$ มีค่าเท่าใด (2 คะแนน)

$$\frac{\sqrt{3}}{7} - \frac{2}{7}i$$

4. ส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อน $\frac{4+3i}{2-2i}$ มีค่าเท่าใด (2 คะแนน)

$$\frac{1}{4}$$

5. ถ้า (x, y) เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ $(x, y)(3, 4) = (20, 15)$ แล้วจำนวนเชิงซ้อน (x, y) มีค่าเท่าใด

(2 คะแนน)

$$\left(\frac{24}{25}, -\frac{7}{5}\right)$$

6. จงเขียน $z = -4 - 4i$ ในรูปเชิงขั้ว (3 คะแนน)

$$4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)$$

7. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ ในรูป $a+bi$ (3 คะแนน)

$$z = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right] \cdot \left[4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right] = 4 + 4\sqrt{3}i$$

8. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ ในรูป $a + bi$ (3 คะแนน)

$$z = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$$

9. จงหาค่า r และ θ ที่เป็นไปได้ ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง (3 คะแนน)

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = 1 - \sqrt{3}i \quad \text{เมื่อ } 2\pi \leq \theta < 6\pi$$

$$r = 2, \theta = \frac{11\pi}{3} \text{ หรือ } \frac{17\pi}{3}$$

10. จงหารากที่ 3 ของ $-2\sqrt{3} + 2i$ (4 คะแนน)

$$\begin{aligned} &\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{5\pi}{18} + i\sin\frac{5\pi}{18}\right) \\ &\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{17\pi}{18} + i\sin\frac{17\pi}{18}\right) \\ &\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{29\pi}{18} + i\sin\frac{29\pi}{18}\right) \end{aligned}$$

11. ถ้า $z = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ แล้ว $(z^{-1})^4$ มีค่าเท่าใด (4 คะแนน)

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ตาราง 20

แสดงคะแนนความก้าวหน้าของนักเรียนแต่ละคน

กลุ่มที่ 1 ชื่อกลุ่ม A

ที่	ชื่อ-สกุล	ห้อง	คะแนน ฐาน 1	คะแนน ฐาน 2	คะแนน ฐาน เฉลี่ย	คะแนน หลัง กิจกรรม	คะแนน ความ ก้าวหน้า
	คะแนนเต็ม		30	30	30	30	30
1	นายอัสสัมภ์ มีชัย	5/1	24	19	21.5	29	20
2	นางสาวรัชชา รักธรรม	5/1	12	13	12.5	24	30
3	นางสาววราภรณ์ หวังมาน	5/1	12	13	12.5	24	30
4	นายอานนท์ ขอระมิน	5/1	9	18	13.5	23	20

ที่	ชื่อ-สกุล	ห้อง	คะแนน ฐาน 1	คะแนน ฐาน 2	คะแนน ฐาน เฉลี่ย	คะแนน หลัง กิจกรรม	คะแนน ความ ก้าวหน้า
5	นางสาวชนัดดา วงศ์การิม	5/2	17	19	18	27	20
6	นายพงษ์ระวี มุขัมหมัดสะมัน	5/2	6	4	5	15	20
คะแนนความก้าวหน้าเฉลี่ยของกลุ่ม							23.3

กลุ่มที่ 2 ชื่อกลุ่ม B

ที่	ชื่อ-สกุล	ห้อง	คะแนน ฐาน 1	คะแนน ฐาน 2	คะแนน ฐาน เฉลี่ย	คะแนน หลัง กิจกรรม	คะแนน ความ ก้าวหน้า
	คะแนนเต็ม		30	30	30	30	30
1	นางสาวไอลดา โต๊ะมิ	5/1	22	22	22	27	20
2	นางสาวอัลฮูดา มะนูรีม	5/1	16	17	16.5	29	30
3	นายณดิม จันทรสว่าง	5/1	17	17	17	20	20
4	นายสุทัศน์ ใจปราณี	5/1	15	10	12.5	23	30
5	นายอาทิตย์ ฤทธิ์สอาด	5/2	20	15	17.5	15	10
6	นายนิรศ จิตรอาจ	5/2	7	8	7.5	12	20
คะแนนความก้าวหน้าเฉลี่ยของกลุ่ม							21.6

กลุ่มที่ 3 ชื่อกลุ่ม C

ที่	ชื่อ-สกุล	ห้อง	คะแนน ฐาน 1	คะแนน ฐาน 2	คะแนน ฐาน เฉลี่ย	คะแนน หลัง กิจกรรม	คะแนน ความ ก้าวหน้า
	คะแนนเต็ม		30	30	30	30	30
1	นางสาวไอลดา เกลยดี	5/1	15	18	16.5	24	20
2	นายศักดิ์สิทธิ์ หะยิยะห์ยา	5/1	20	18	19	25	20
3	นางสาวฮูดา หะชาเล็ม	5/2	13	14	13.5	23	20
4	นางสาวพระดา นะมิ	5/2	18	14	16	19	20

ที่	ชื่อ-สกุล	ห้อง	คะแนน ฐาน 1	คะแนน ฐาน 2	คะแนน ฐาน เฉลี่ย	คะแนน หลัง กิจกรรม	คะแนน ความ ก้าวหน้า
5	นางสาวนัชชา หมักป้อมตัว	5/2	9	9	9	17	20
6	นางสาวนันทรัตน์ หวังมี	5/1	28	22	25	28	20
คะแนนความก้าวหน้าเฉลี่ยของกลุ่ม							20

กลุ่มที่ 4 ชื่อกลุ่ม D

ที่	ชื่อ-สกุล	ห้อง	คะแนน ฐาน 1	คะแนน ฐาน 2	คะแนน ฐาน เฉลี่ย	คะแนน หลัง กิจกรรม	คะแนน ความ ก้าวหน้า
	คะแนนเต็ม		30	30	30	30	30
1	นางสาวศุภวรรณ เยนา	5/1	25	22	23.5	30	30
2	นางสาวสิรินาท บู่ทอง	5/1	17	18	17.5	26	20
3	นายสาริน เชาวสุธีรนนท์	5/1	16	24	20	26	20
4	นางสาวมารีนา ไกรจิต	5/1	8	14	11	24	30
5	นางสาวหนึ่งฤทัย เฉชะคุ้ม	5/1	13	10	11.5	18	20
6	นายพงษ์ดนัย มุหะหมัด	5/1	15	16	15.5	23	20
คะแนนความก้าวหน้าเฉลี่ยของกลุ่ม							23.3

กลุ่มที่ 5 ชื่อกลุ่ม E

ที่	ชื่อ-สกุล	ห้อง	คะแนน ฐาน 1	คะแนน ฐาน 2	คะแนน ฐาน เฉลี่ย	คะแนน หลัง กิจกรรม	คะแนน ความ ก้าวหน้า
	คะแนนเต็ม		30	30	30	30	30
1	นางสาวยูไรรียะห์ หมานเส้น	5/2	19	17	18	28	20
2	นางสาวนริศรา มุฮัมมัดดาเฮด	5/2	19	18	18.5	20	20
3	นางสาวสุกัญญา พาพานิช	5/1	22	19	20.5	24	20
4	นางสาวโซเฟีย เจ๊ะเต็ง	5/2	10	5	7.5	19	30
5	นางสาวนัทธมน ประเสริฐอาภา	5/2	9	9	9	17	20

ที่	ชื่อ-สกุล	ห้อง	คะแนน ฐาน 1	คะแนน ฐาน 2	คะแนน ฐาน เฉลี่ย	คะแนน หลัง กิจกรรม	คะแนน ความ ก้าวหน้า
6	นายชนนพร รอดป้อม	5/2	13	14	13.5	14	20
คะแนนความก้าวหน้าเฉลี่ยของกลุ่ม							21.6

กลุ่มที่ 6 ชื่อกลุ่ม F

ที่	ชื่อ-สกุล	ห้อง	คะแนน ฐาน 1	คะแนน ฐาน 2	คะแนน ฐาน เฉลี่ย	คะแนน หลัง กิจกรรม	คะแนน ความ ก้าวหน้า
	คะแนนเต็ม		30	30	30	30	30
1	นายวิอาม ตานีพันธ์	5/1	17	21	19	29	20
2	นางสาวเนตรชนก ชนะชัย	5/2	19	15	17	29	30
3	นางสาวณัฏฐิณี มานโสม	5/2	16	19	17.5	24	20
4	นางสาวรวริมล มุขอ	5/2	10	13	11.5	18	20
5	นางสาววีระยา มังวอ	5/2	19	19	19	26	20
6	นายอรุทธิ์ มีสุวรรณ	5/2	7	8	7.5	7	10
คะแนนความก้าวหน้าเฉลี่ยของกลุ่ม							20

กลุ่มที่ 7 ชื่อกลุ่ม G

ที่	ชื่อ-สกุล	ห้อง	คะแนน ฐาน 1	คะแนน ฐาน 2	คะแนน ฐาน เฉลี่ย	คะแนน หลัง กิจกรรม	คะแนน ความ ก้าวหน้า
	คะแนนเต็ม		30	30	30	30	30
1	นางสาวรังสิยา ขำมิน	5/1	24	23	23.5	30	30
2	นางสาวนุชาตา ครองศิริกุล	5/1	22	18	20	27	20
3	นางสาวสุกัญญา ปะอิกุล	5/1	11	12	11.5	22	30
4	นางสาววัชรภรณ์ เถาะมะ	5/2	14	13	13.5	26	30
5	นางสาวสุภาวดี สุขเจริญ	5/2	13	14	13.5	21	20
6	นายปรีวัตร กิจนิตยชีวี	5/2	8	10	9	3	10

ที่	ชื่อ-สกุล	ห้อง	คะแนน ฐาน 1	คะแนน ฐาน 2	คะแนน ฐาน เฉลี่ย	คะแนน หลัง กิจกรรม	คะแนน ความ ก้าวหน้า
คะแนนความก้าวหน้าเฉลี่ยของกลุ่ม							23.3

กลุ่มที่ 8 ชื่อกลุ่ม H

ที่	ชื่อ-สกุล	ห้อง	คะแนน ฐาน 1	คะแนน ฐาน 2	คะแนน ฐาน เฉลี่ย	คะแนน หลัง กิจกรรม	คะแนน ความ ก้าวหน้า
	คะแนนเต็ม		30	30	30	30	30
1	นางสาวภาณุภา ชันธชัย	5/1	17	16	16.5	28	30
2	นางสาวกันยารัตน์ พวงมณี	5/2	20	12	16	29	30
3	นางสาวสุพัตรา สมาเค๊ะ	5/2	12	15	13.5	26	30
4	นางสาววีณา วันหมัด	5/1	18	14	16	28	30
5	นายฟาคีล เรืองปราชญ์	5/1	11	12	11.5	20	20
6	นายสรวิษฐ์ หวังเจริญ	5/2	9	11	10	14	20
คะแนนความก้าวหน้าเฉลี่ยของกลุ่ม							26.6

กลุ่มที่ 9 ชื่อกลุ่ม I

ที่	ชื่อ-สกุล	ห้อง	คะแนน ฐาน 1	คะแนน ฐาน 2	คะแนน ฐาน เฉลี่ย	คะแนน หลัง กิจกรรม	คะแนน ความ ก้าวหน้า
	คะแนนเต็ม		30	30	30	30	30
1	นางสาวปกิตตา เชนา	5/1	21	22	21.5	30	30
2	นางสาวกิตติยา ขุนวิเศษ	5/2	18	16	17	19	20
3	นายอารี แฉล้มวาริ	5/1	20	20	20	23	20
4	นางสาวกนกวรรณ มะหมัด	5/2	14	12	13	20	20
5	นายวสิน มาลีเมาะ	5/2	13	14	13.5	22	20
6	นายอานัส เสือสมิง	5/2	8	10	9	6	10
คะแนนความก้าวหน้าเฉลี่ยของกลุ่ม							20

กลุ่มที่ 10 ชื่อกลุ่ม J

ที่	ชื่อ-สกุล	ห้อง	คะแนน ฐาน 1	คะแนน ฐาน 2	คะแนน ฐาน เฉลี่ย	คะแนน หลัง กิจกรรม	คะแนน ความ ก้าวหน้า
	คะแนนเต็ม		30	30	30	30	30
1	นางสาววิริยจ กงสวัสดิ์	5/1	19	17	18	25	20
2	นางสาวสุกัญญา กะโห้ทอง	5/2	13	19	16	22	20
3	นางสาวสุภานันท์ วิสุทธิแพทย์	5/2	7	14	10.5	25	30
4	นางสาวนุสา มูเนาวเราะฮ์	5/2	10	10	10	21	30
5	นายการ์นต์ หวังสะละฮ์	5/1	11	17	14	21	20
6	ธีรพงศ์ หมดตาเฮด	5/2	11	13	12	14	20
คะแนนความก้าวหน้าเฉลี่ยของกลุ่ม							23.3

กลุ่มที่ 11 ชื่อกลุ่ม K

ที่	ชื่อ-สกุล	ห้อง	คะแนน ฐาน 1	คะแนน ฐาน 2	คะแนน ฐาน เฉลี่ย	คะแนน หลัง กิจกรรม	คะแนน ความ ก้าวหน้า
	คะแนนเต็ม		30	30	30	30	30
1	ธัญลักษณ์ มาลัยทัศน์	5/1	20	28	24	29	20
2	นางสาวสุกัญญา คดหอย	5/1	14	24	19	27	20
3	นางสาวอรอนงค์ อาดัม	5/2	9	15	12	25	30
4	นางสาวนุรีน แวคาแก	5/1	13	16	14.5	27	30
5	นายมรกต มาลี	5/1	22	18	20	25	20
6	นายวณัฏ น้อยนงเยาว์	5/2	13	10	11.5	25	30
7	นางสาวดانا โมหะหมัดรักษาผล	5/1	23	25	24	29	20
คะแนนความก้าวหน้าเฉลี่ยของกลุ่ม							24.2

กลุ่มที่ 12 ชื่อกลุ่ม L

ที่	ชื่อ-สกุล	ห้อง	คะแนน ฐาน 1	คะแนน ฐาน 2	คะแนน ฐาน เฉลี่ย	คะแนน หลัง กิจกรรม	คะแนน ความ ก้าวหน้า
	คะแนนเต็ม		30	30	30	30	30
1	นางสาววิภา พวงมณี	5/1	26	19	22.5	30	30
2	นางสาวลลิตา หมักอาดำ	5/2	21	23	22	25	20
3	นางสาวอัญชลี ศรีพ่วง	5/2	17	14	15.5	22	20
4	นางสาวสุดาวรรณ มีมุขอ	5/2	18	14	16	21	20
5	นายปรัชญา เชาวสุธีรนนท์	5/1	18	22	20	23	20
6	นายกุลพัชร สัมครกุล	5/2	7	13	10	8	10
คะแนนความก้าวหน้าเฉลี่ยของกลุ่ม							20

กลุ่มที่ 13 ชื่อกลุ่ม M

ที่	ชื่อ-สกุล	ห้อง	คะแนน ฐาน 1	คะแนน ฐาน 2	คะแนน ฐาน เฉลี่ย	คะแนน หลัง กิจกรรม	คะแนน ความ ก้าวหน้า
	คะแนนเต็ม		30	30	30	30	30
1	นางสาวพนิต เพียรมานะ	5/1	20	21	20.5	30	30
2	นางสาวนุสบา ศรีเพ็ชร	5/1	19	22	20.5	24	20
3	นางสาวเอิยะซาน วงษ์สันต์	5/1	20	20	20	29	20
4	นายรอฟีกัน วัสละ๊ะ	5/1	19	15	17	26	20
5	นายรัชต์ อัครารีย์	5/1	16	16	16	26	20
6	นายอนุสรณ์ วงศ์เคอริ	5/2	10	6	8	13	20
คะแนนความก้าวหน้าเฉลี่ยของกลุ่ม							21.6

กลุ่มที่ 14 ชื่อกลุ่ม N

ที่	ชื่อ-สกุล	ห้อง	คะแนน ฐาน1	คะแนน ฐาน2	คะแนน ฐาน เฉลี่ย	คะแนน หลัง กิจกรรม	คะแนน ความ ก้าวหน้า
	คะแนนเต็ม		30	30	30	30	30
1	นางสาวอัสมา หลงกุนัน	5/1	18	20	19	29	20
2	นายวุฒิชัย บุญชม	5/1	24	24	24	27	20
3	นางสาวศัลยลา รัตนะ	5/2	13	14	13.5	25	30
4	นางสาวณิชากัทร ปรียากมล	5/2	8	17	12.5	19	20
5	นายบัญชา แกมนิล	5/1	10	18	14	21	20
6	นายพัฒนศิลป์ มุขอ	5/2	8	11	9.5	16	20
คะแนนความก้าวหน้าเฉลี่ยของกลุ่ม							21.6

แบบทดสอบก่อนเรียน

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

คำชี้แจง ข้อสอบมีทั้งหมด 20 ข้อ ทำลงในกระดาษคำตอบ จง ✕ ลงในช่องว่างที่ถูกต้อง
คะแนนเต็ม 20 คะแนน

1. พิจารณาข้อความต่อไปนี้ข้อใดถูกต้อง

ก. เอกลักษ์ณ์การคูณของจำนวนเชิงซ้อนใดๆ คือ 0

ข. ถ้า z_1, z_2, z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ แล้ว $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ ค. อินเวอร์สการบวกของจำนวนเชิงซ้อน $a+bi$ ใดๆ คือ $-a+bi$

ง. เอกลักษ์ณ์การบวกสำหรับจำนวนเชิงซ้อนใดๆ คือ 1

2. พิจารณาข้อความต่อไปนี้ข้อใดถูกต้อง เมื่อกำหนด $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ ก. $z_1 z_2 = (ac + bd) + (ad - bc)i$ ข. $z_2 z_1 = (ac + bd) - (ad + bc)i$ ค. $z_1 - (\overline{z_1}) = 0$ ง. $z_1 + (-z_1) = 0$ 3. ค่าของ $\frac{4(2i^{28} + i^{53})^2}{1-2i}$ มีค่าเท่าใดก. $-4+7i$ ข. $-4+9i$ ค. $-4-8i$ ง. $-4+8i$ 4. สังยุคของ $2i^{150} + i^{179}$ มีค่าเท่าใดก. $-1+i$ ข. $-2+i$ ค. $-2-i$ ง. $2+i$ 5. ถ้า $z = (3+2\sqrt{-5})(3-\sqrt{-5})$ แล้ว $\bar{z}$ มีค่าเท่าใดก. $19-3\sqrt{5}i$ ข. $19+3\sqrt{5}i$ ค. $17-2\sqrt{5}i$ ง. $18-2\sqrt{5}i$ 6. ตัวผกผันการคูณของ $-3+4i$ มีค่าเท่าใดก. $\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$ ข. $\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$ ค. $-\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$ ง. $-\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$

7. กำหนดให้ $z = i^9 + i^{10} + \dots + i^{126}$ แล้ว จงหา $2z^{-1}$

ก. -1

ข. -I

ค. -1-i

ง. -1+i

8. ถ้า $z^3 = i^{178} + 3i^{165}$ แล้ว $|z|$ มีค่าเท่าใด

ก. $10^{\frac{1}{2}}$

ข. $10^{\frac{1}{6}}$

ค. $10^{\frac{1}{3}}$

ง. $10^{\frac{2}{3}}$

9. ถ้า $z = -8i$ เขียนในรูปเชิงขั้วได้เท่ากับเท่าใด

ก. $8(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$

ข. $8(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$

ค. $8(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$

ง. $8(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$

10. ค่าของ $4(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$ เขียนในรูป $a+bi$ ได้เท่ากับเท่าใด

ก. $-2 - 2\sqrt{3}i$

ข. $-2 + 2\sqrt{3}i$

ค. $2 - 2\sqrt{3}i$

ง. $2 + 2\sqrt{3}i$

11. ถ้า $z = r(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ แล้ว r มีค่าเท่าใด

ก. $\sqrt{11}$

ข. $\sqrt{10}$

ค. $\sqrt{7}$

ง. $\sqrt{5}$

12. ค่าของ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{50}$ มีค่าเท่าใด

ก. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

ข. $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

ค. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

ง. $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

13. ให้ $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ จงหาส่วนจริงของ $\frac{1}{1+z^5}$

ก. $\frac{1}{2}$

ข. $\frac{3}{4}$

ค. $\frac{2}{3}$

ง. $\frac{4}{5}$

14. กำหนดให้ $z_1 = \sqrt{2} (\cos 85^\circ + i \sin 85^\circ)$ และ $z_2 = 2 (\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)$ แล้ว $\frac{z_1}{z_2}$

มีค่าเท่าใด

ก. $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

ข. $\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}i$

ค. $\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}i$

ง. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

15. เซตคำตอบในข้อใดเป็นรากที่ 4 ของ 16

ก. $\{2, -2, -2i, 2i\}$

ข. $\{2, -2\}$

ค. $\{-2i, 2i\}$

ง. $\{2, 2i\}$

16. $-1 + \sqrt{3}i$ เป็นรากที่ 3 ของจำนวนใด

ก. -1

ข. 1

ค. 8

ง. $8i$

17. กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ ถ้า $-1 + \sqrt{3}i$ เป็นรากที่ 5 ของ z แล้ว $\bar{z}z$ มีค่าเท่าใด

ก. 789

ข. 998

ค. 1036

ง. 1024

18. ให้ $x = 2 - 2\sqrt{3}i$ ค่าของ $x^3 - 2x^2 + 8x + 35$ คือข้อใด

ก. $-1 + \sqrt{3}i$

ข. 3

ค. $3 + \sqrt{3}i$

ง. $-3i$

19. รากที่สองของ $3 + 4\sqrt{-7}$ คือข้อใด

ก. $-7 + 2i, -7 - 2i$

ข. $7 + 2i, 7 - 2i$

ค. $\sqrt{7} + 2i, \sqrt{7} - 2i$

ง. $\sqrt{7} + 2i, -\sqrt{7} - 2i$

20. ถ้า $\bar{z}_1 = 2 - 3i$ และ $\bar{z}_1 \bar{z}_2 + 2\bar{z}_2 - 1 = 0$ แล้วอินเวอร์สการคูณของ z_2 คือข้อใด

ก. $2 - 3i$

ข. $2 + 3i$

ค. $4 - 3i$

ง. $4 + 3i$

แบบทดสอบหลังเรียน

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

คำชี้แจง ข้อสอบมีทั้งหมด 20 ข้อ ทำลงในกระดาษคำตอบ จง ✕ ลงในช่องว่างที่ถูกต้อง

คะแนนเต็ม 20 คะแนน

1. พิจารณาข้อความต่อไปนี้ข้อใดเป็นเท็จ

ก. $z_1 \cdot \bar{z}_1 = a^2 + b^2$

ข. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

ค. $\overline{z_1 + z_2} = 2(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$

ง. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

2. ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ $\bar{z}$ เป็นสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน z
ข้อความใดต่อไปนี้ผิด

ก. $|\bar{z}|^2 = \sqrt{z\bar{z}}$

ข. $\bar{zi} = \bar{z}(-i)$

ค. $\overline{z-i} = z+i$

ง. $\left| \overline{z+z} \right|^2 + \left| \overline{z-z} \right|^2 = 4z\bar{z}$

3. ค่าของ $\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{95}$ มีค่าเท่าใด

ก. 1

ข. -1

ค. i

ง. -i

4. ตัวผกผันการบวกของ $\frac{4(2i^{28} + i^{53})^2}{1-2i}$ มีค่าเท่าใด

ก. $-4+7i$

ข. $-4+8i$

ค. $-4-8i$

ง. $-4+9i$

5. ถ้า $z = (2+4\sqrt{-3})(3-\sqrt{-3})$ แล้ว $\bar{z}$ มีค่าเท่าใด

ก. $18-10\sqrt{3}i$

ข. $6-10\sqrt{3}i$

ค. $19-10\sqrt{3}i$

ง. $19+3\sqrt{5}i$

6. อินเวอร์สสำหรับการคูณของ $(1+i)^3$ มีค่าเท่าใด

ก. $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

ข. $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$

ค. $\frac{-1}{4} + \frac{1}{4}i$

ง. $\frac{-1}{4} - \frac{1}{4}i$

7. ถ้า $z = (2 + 5i)(4 - 3i)$ แล้ว $|z|$ มีค่าเท่าใด

ก. $2\sqrt{27}$

ข. $5\sqrt{29}$

ค. $5\sqrt{47}$

ง. $\sqrt{51}$

8. ถ้า $z^3 = i^{186} + 3i^{169}$ แล้ว $|z|$ มีค่าเท่าใด

ก. $10^{\frac{1}{6}}$

ข. $10^{\frac{2}{3}}$

ค. $10^{\frac{1}{3}}$

ง. $10^{\frac{1}{2}}$

9. ค่าของ $16(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$ เขียนในรูป $a+bi$ ได้เท่ากับเท่าใด

ก. $-8 - 8\sqrt{3}i$

ข. $8 - 8\sqrt{3}i$

ค. $8 + 8\sqrt{3}i$

ง. $-8 + 8\sqrt{3}i$

10. ถ้า $z = r(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) = -1 + i$ แล้ว r มีค่าเท่าใด

ก. $\sqrt{13}$

ข. $\sqrt{11}$

ค. $\sqrt{2}$

ง. $\sqrt{6}$

11. กำหนดให้ $z_1 = 4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$ ค่า $z_1 z_2$ มีค่าเท่าใด

ก. -9

ข. 9

ค. -7

ง. -8

12. ค่าของ $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^8$ มีค่าเท่าใด

ก. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

ข. $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

ค. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

ง. $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

13. ให้ $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ จงหาส่วนจินตภาพของ $\frac{1}{1+z^5}$

ก. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

ข. $\frac{3}{4}$

ค. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

ง. $\frac{1}{2}$

14. กำหนดให้ $z_1 = \sqrt{2} (\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ)$ และ $z_2 = 2 (\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$ แล้ว $\frac{z_1}{z_2}$

มีค่าเท่าใด

ก. $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

ข. $\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}i$

ค. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

ง. $\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}i$

15. เซตคำตอบในข้อใดเป็นรากที่ 4 ของ 1

ก. $\{1, -1\}$

ข. $\{1, -1, -i, i\}$

ค. $\{-i, i\}$

ง. $\{1, i\}$

16. $-1 - \sqrt{3}i$ เป็นรากที่ 4 ของจำนวนใด

ก. $8 - 8\sqrt{3}i$

ข. $-8 + 8\sqrt{3}i$

ค. $8 + 8\sqrt{3}i$

ง. $-8 - 8\sqrt{3}i$

17. ผลคูณของรากที่ 4 ของ 81 มีค่าเท่าใด

ก. -81

ข. -89

ค. 1024

ง. 110

18. ให้ $x = 2 - 2\sqrt{3}i$ ค่าของ $x^3 - 2x^2 + 8x + 35$ คือข้อใด

ก. $-1 + \sqrt{3}i$

ข. $3 + \sqrt{3}i$

ค. 3

ง. $-3i$

19. รากที่สองของ $-15 - 8i$ คือข้อใด

ก. $-1 - 4i, -1 + 4i$

ข. $1 - 4i, -1 + 4i$

ค. $1 - 4i, -1 - 4i$

ง. $1 - 4i, 1 + 4i$

20. ถ้า $\overline{z_1} = 2 + 3i$ และ $\overline{z_1 z_2} + 2\overline{z_2} - 1 = 0$ แล้วอินเวอร์สการคูณของ z_2 คือข้อใด

ก. $2 - 3i$

ข. $2 + 3i$

ค. $4 + 3i$

ง. $4 - 3i$

ภาคผนวก ค
ภาพประกอบการจัดกิจกรรม

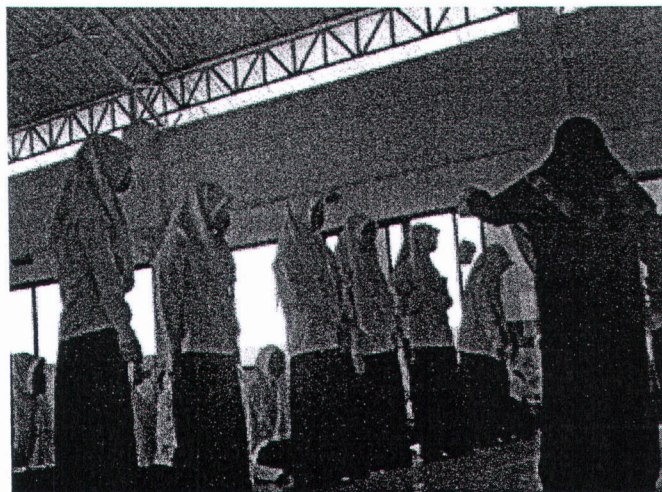
ประมวลภาพกิจกรรมการจัดการเรียนการสอน



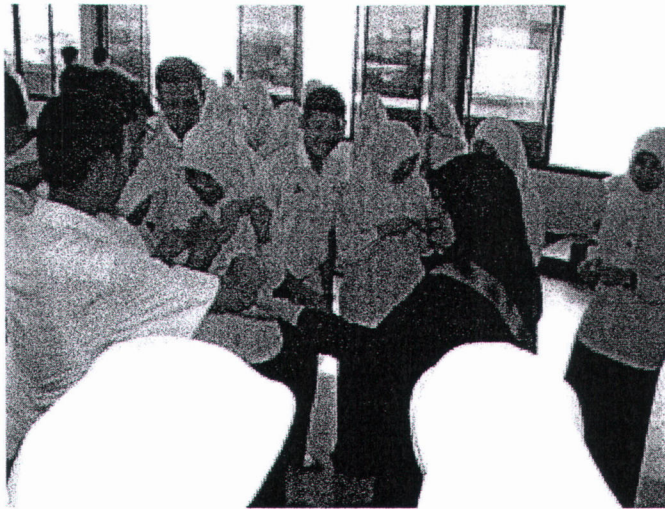
ชั้นเตรียมสื่อและอุปกรณ์



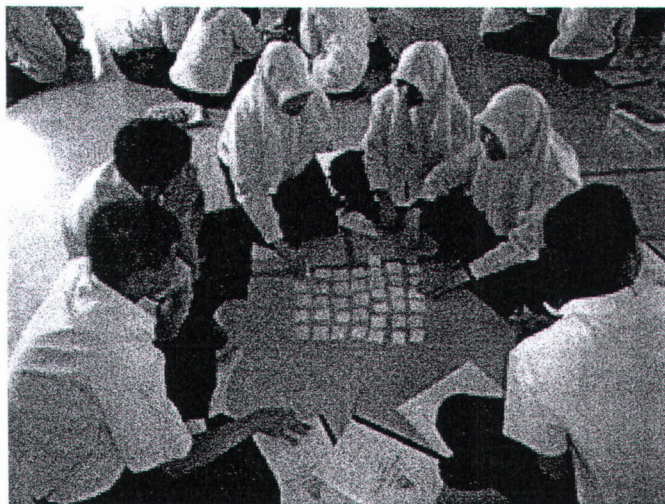
จัดกลุ่มทดสอบความสามารถ



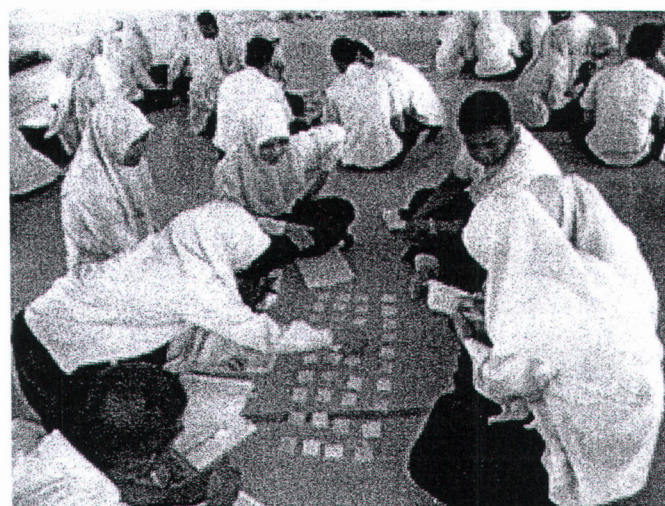
รับฟังข้อตกลงร่วมกัน



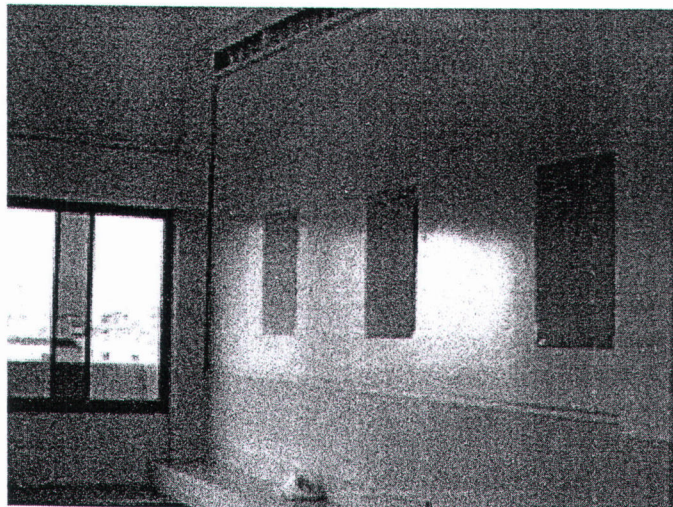
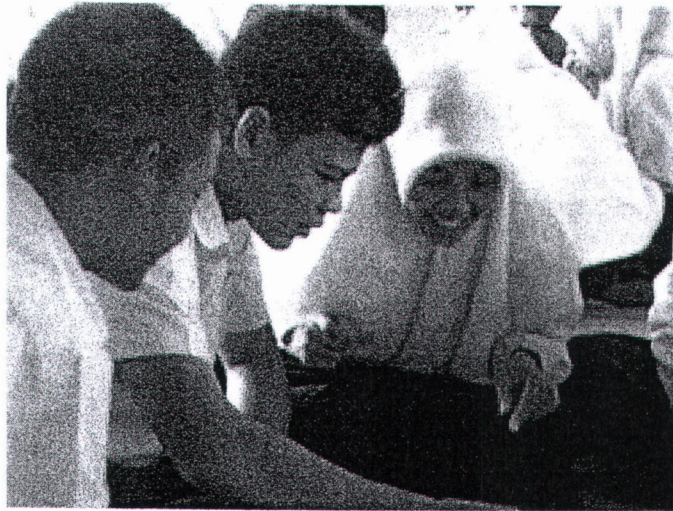
จับฉลากกลุ่มย่อย



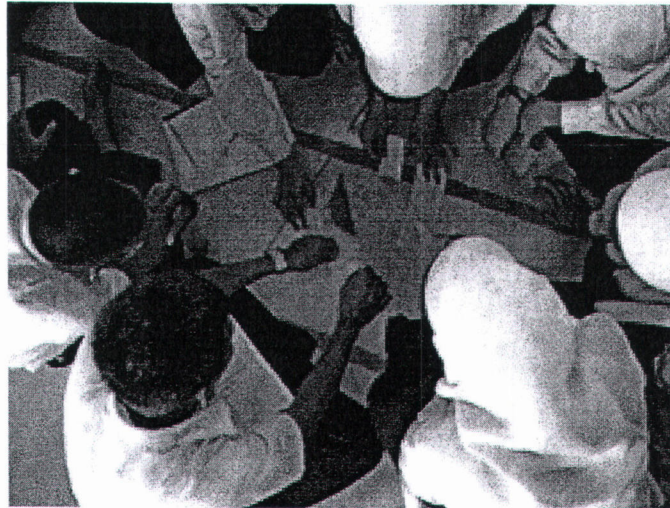
กิจกรรม pick and pair



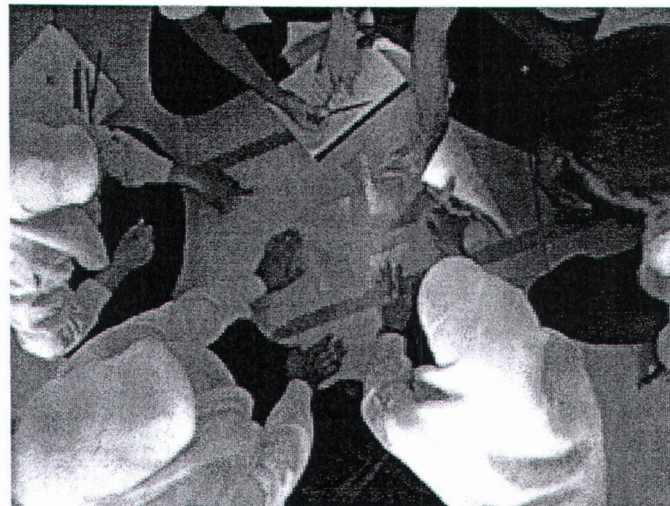
ร่วมกันแสดงความคิดเห็น



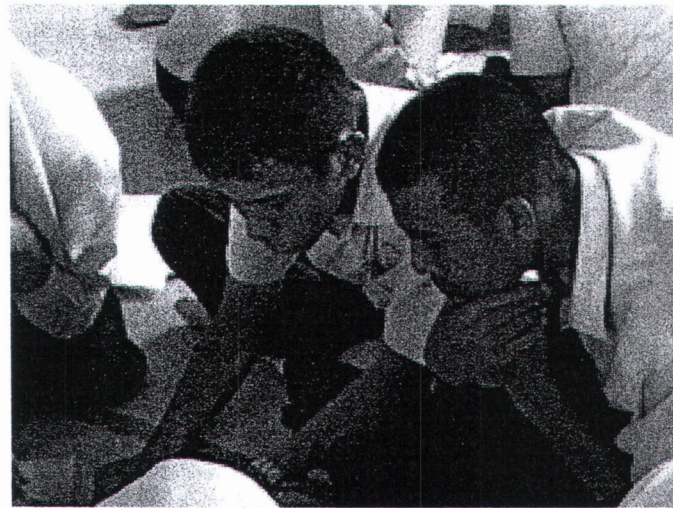
แผ่นป้ายสรุปเนื้อหาและสูตรต่าง ๆ

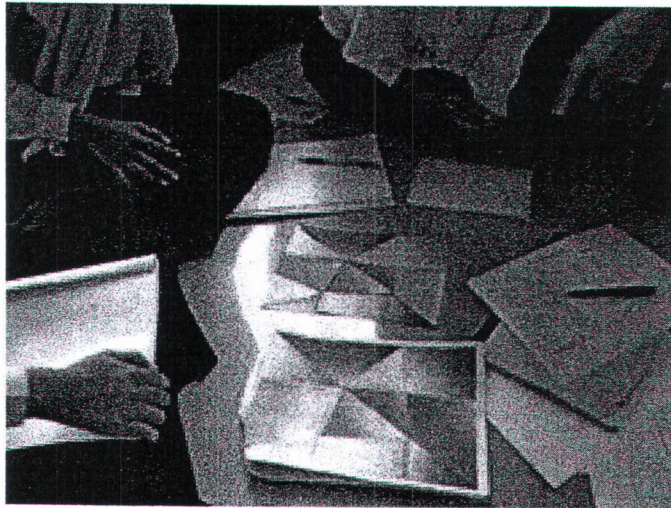
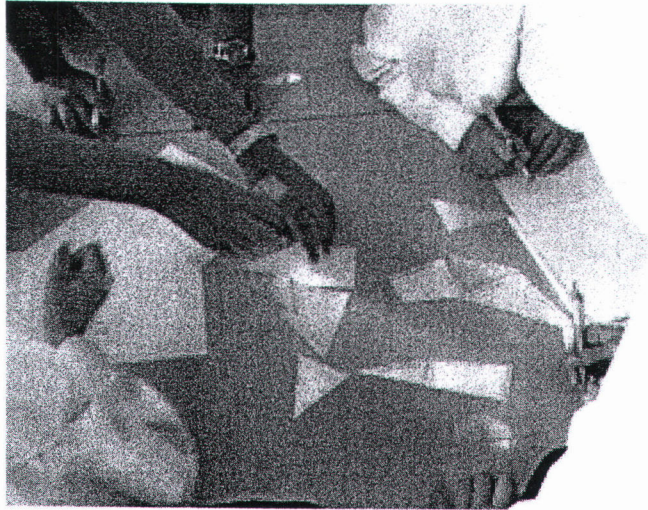


กิจกรรมเกมตัวต่อ

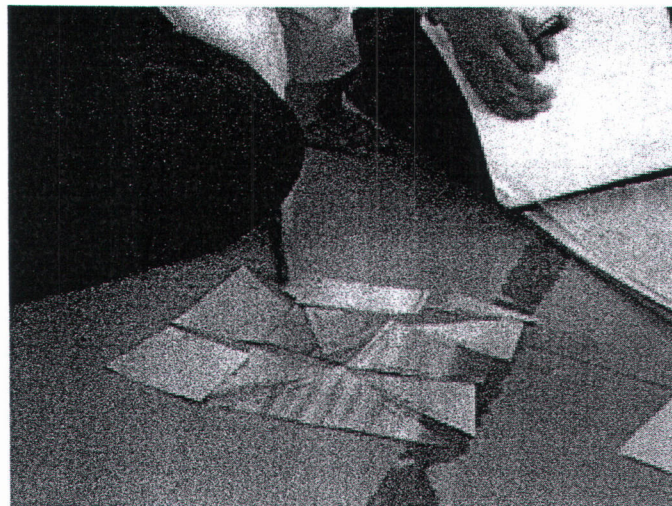
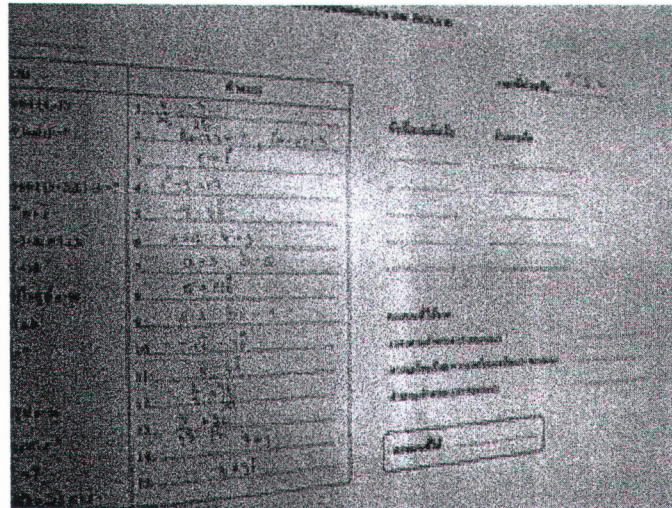


สมาชิกช่วยกันหาคำตอบ

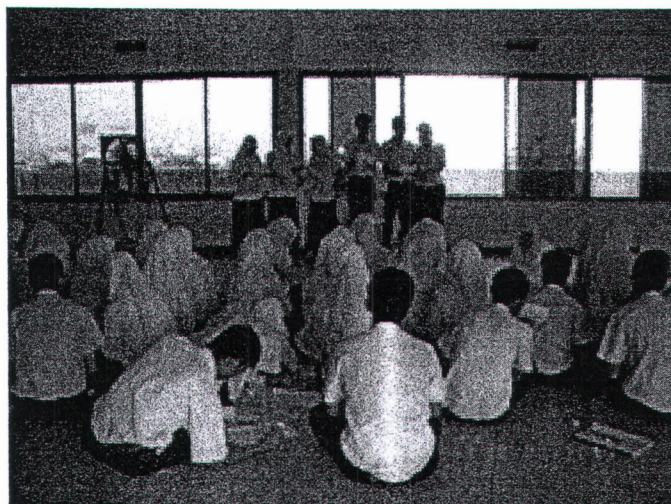




ผลสำเร็จกิจกรรมตัวต่อ



ผลสำเร็จกิจกรรมตัวต่อ

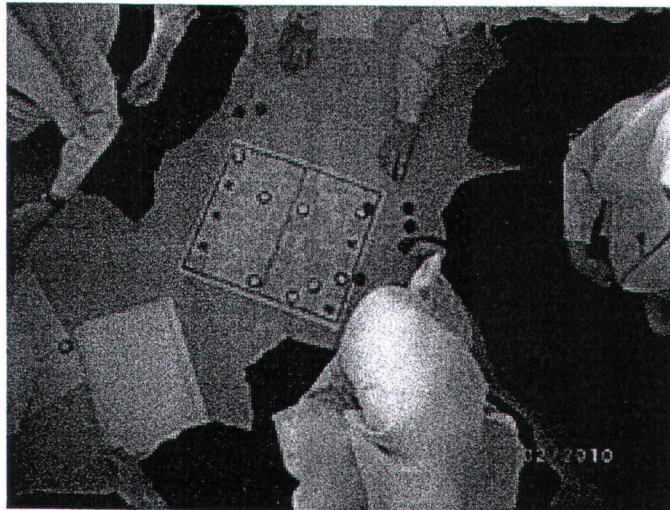


กิจกรรมบทกลอน/บทเพลงสอนคณิต

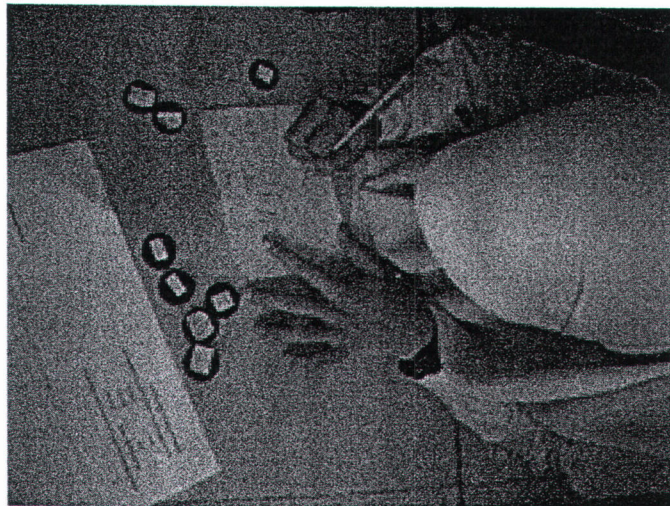


นำเสนอบทกลอนสอนคณิต

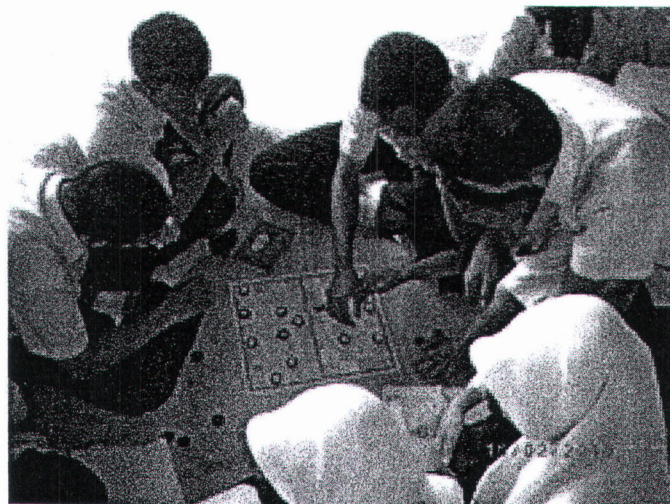




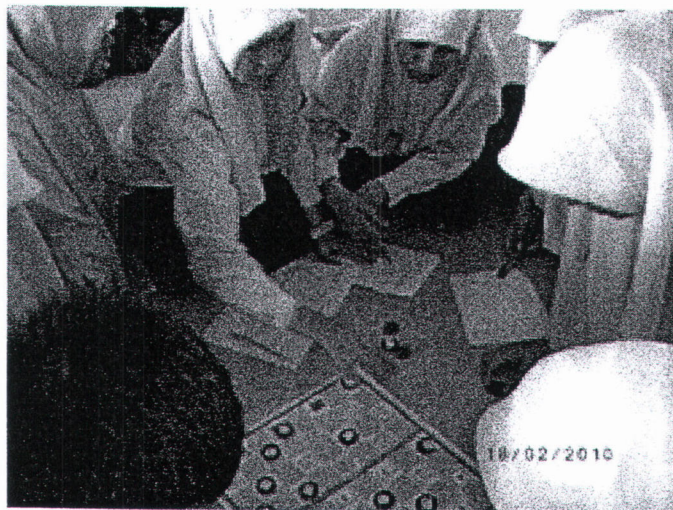
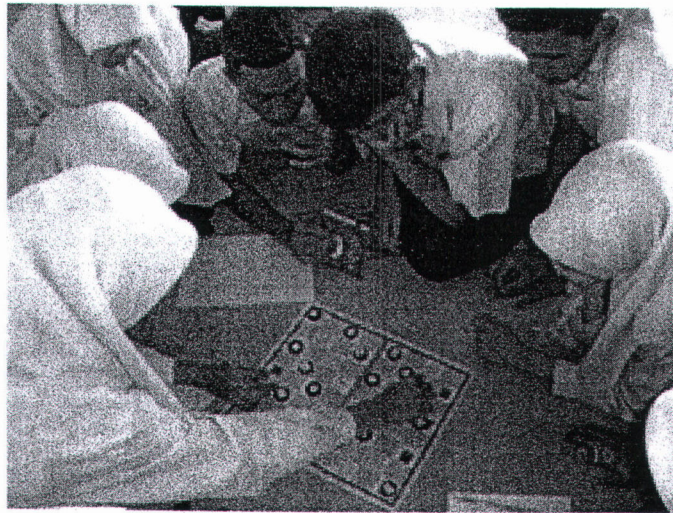
กิจกรรมเกมหมากฮอส



ช่วยกันหาคำตอบกิจกรรมหมากฮอส



กิจกรรมเกมหมากฮอส



บรรณานุกรม

- กระทรวงศึกษาธิการ. (2544). หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 (พิมพ์ครั้งที่ 2). กรุงเทพฯ: ผู้แต่ง.
- กรองกาญจน์ อรุณรัตน์. (2536). ชุดการเรียนรู้การสอน. เชียงใหม่: มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.
- กิดานันท์ มลิทอง. (2531). เทคโนโลยีร่วมสมัย. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- จินตนา เล็กถ้วน. (2541). ผลของการเรียนแบบร่วมมือที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่1. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ชม ภูมิภาค. (2524). เทคโนโลยีทางการสอนและการศึกษา (พิมพ์ครั้งที่ 2). กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.
- ชมนาถ เชื้อสุวรรณทวี. (2542). การสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.
- ชัยยงค์ พรหมวงศ์. (2520). ระบบสื่อการสอน. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ชัยยงค์ พรหมวงศ์. (2537). คุณค่าของชุดการเรียนรู้การสอน. ใน เอกสารชุดวิชาสื่อการสอนระดับประถมศึกษา (พิมพ์ครั้งที่ 2, หน่วยที่ 8). นนทบุรี: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช.
- ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล. (2539). การจัดกิจกรรมคณิตศาสตร์ในโรงเรียน. กรุงเทพฯ: โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒปทุมวัน.
- ชาติชาย ม่วงปฐุม. (2539). ผลของวิธีการเรียนแบบร่วมมือและระดับความสามารถทางคณิตศาสตร์ที่มีผลต่อการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับประถมศึกษา. วิทยานิพนธ์ครุศาสตรมหาบัณฑิต, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ชาญชัย อาจิณสมาจาร. (2533). การเรียนรู้แบบร่วมมือ. จันทรเกษมสาร, 2(1), 46-47.
- ชูศรี สนิทประชากร. (2534). การเรียนแบบร่วมมือ. จันทรเกษมสาร, 2(4), 48-49.

ไชยยศ เรืองสุวรรณ. (2526). เทคโนโลยีทางการศึกษา-หลักและแนวปฏิบัติ (พิมพ์ครั้งที่ 2).

กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ไทยวัฒนาพานิช.

ณัฐชานันท์ สงคราม. (2547). การพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของ
นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยใช้กิจกรรมประกอบเทคนิคการประเมินจาก
สภาพจริง. ปรินิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

ทิสนา แหมมณี. (2522). กลุ่มสัมพันธ์: ทฤษฎีและแนวปฏิบัติ. กรุงเทพฯ: บุรพาศิลป์-
การพิมพ์.

ทิสนา แหมมณี. (2547). ศาสตร์การสอนองค์ความรู้เพื่อการจัดกระบวนการเรียนรู้ที่มี
ประสิทธิภาพ (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ทิสนา แหมมณี. (2551). ศาสตร์การสอนองค์ความรู้เพื่อการจัดกระบวนการเรียนรู้ที่มี
ประสิทธิภาพ (พิมพ์ครั้งที่ 7). กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

นันทกัญญา เจริญเกียรติบรร. (2547). การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนระดับประกาศนียบัตร วิชาชีพชั้นปีที่ 2
โดยใช้การเรียนรู้แบบร่วมมือ. สารนิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัย-
ศรีนครินทรวิโรฒ.

บุญชม ศรีสะอาด. (2537). การพัฒนาการสอน. กรุงเทพฯ: สุวีริยาสาส์น.

บุญชม ศรีสะอาด. (2543). การวิจัยสำหรับครู. กรุงเทพฯ: สุวีริยาสาส์น.

ประพันธ์ศิริ สุเสารัจ. (2551). การพัฒนาการคิด. กรุงเทพฯ: 9119 เทคนิคพรินดีง.

ปิยะรัตน์ ขันการนาวิ. (2549). ผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาช่วงชั้นที่ 2 ที่
เรียนจากบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนด้วยโปรแกรม Power point เรื่องการใช้
และการดูแลรักษาคอมพิวเตอร์เบื้องต้น. วิทยานิพนธ์ศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต,
มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

พันทิพา ทับเที่ยง. (2550). การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน พฤติกรรมการ
ทำงานกลุ่ม และความคงทนในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยม
ศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดการเรียนแบบร่วมมือแบบแบ่งกลุ่มผลสัมฤทธิ์ (STAD)
กับการจัดการเรียนแบบร่วมมือแบบกลุ่มช่วยรายบุคคล (TAN). ปรินิพนธ์-
การศึกษามหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

ไพโรจน์ เบขุนทด. (2544). ผลการเรียนรู้แบบร่วมมือ 3 วิธีที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
วิชาคณิตศาสตร์และความร่วมมือในการทำงานกลุ่มของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา
ปีที่ 2. วิทยานิพนธ์ครุศาสตรมหาบัณฑิต, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช. (2533). ขั้นตอนในการสร้างชุดการเรียนรู้การสอน.

ใน เอกสารการสอนชุดกิจกรรมการสอนคณิตศาสตร์ (หน่วยที่ 8). นนทบุรี: ผู้แต่ง.
มารีณา รื่นสุข. (2548). ผลของการเรียนแบบร่วมมือควบคู่กับการใช้สัญญาเงื่อนไขเป็น
กลุ่มที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของ นักเรียนชั้น
ประถมศึกษาปีที่ 5. ปรียญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยศรี-
นครินทรวิโรฒ.

มาเลียม พินิจรอบ. (2549). ผลการจัดกิจกรรมคณิตศาสตร์ด้วยกระบวนการกลุ่มที่มีต่อ
ทักษะการแก้ปัญหา เรื่องอัตราส่วนและร้อยละของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2.
ปรียญณาการศึกษามหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

มยุรี บุญเยี่ยม. (2545). การพัฒนาชุดการเรียนรู้เรื่องความน่าจะเป็นโดยใช้วิธีการแก้ปัญหา
เพื่อส่งเสริมความตระหนักในการรู้คิดของนักศึกษาระดับ ประกาศนียบัตร
วิชาชีพชั้นสูง 2545 สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล. ปรียญานิพนธ์การศึกษามหา-
บัณฑิต, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

มยุรี สาลิวงศ์. (2535). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และความภูมิใจ
ในตนเองของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่ได้รับการสอนโดยใช้ กิจกรรม
การเรียนรู้แบบร่วมมือแบบ STAD กับกิจกรรมการเรียนรู้ตามคู่มือครู ของ สสวท..
ปรียญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ. (2538). เทคนิคการวิจัยทางการศึกษา (พิมพ์ครั้งที่ 3).
กรุงเทพฯ: สุวีริยาสาส์น.

วาสนา ขาวหา. (2525). เทคโนโลยีทางการศึกษา. กรุงเทพฯ: อักษรสยามการพิมพ์.

- วิไลวรรณ เอื้อสุวรรณ. (2532). การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง โจทย์ปัญหาการบวก การลบ การคูณ การหาร ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนอนุสรณ์ อำเภอเมือง จังหวัดสมุทรปราการ ที่มีระดับความสามารถทางการเรียนแตกต่างกัน โดยวิธีการสอนแบบวรรณิ และวิธีสอนของ สสวท. ปรินูญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- สมเดช บุญประจักษ์. (2540). การพัฒนาศักยภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการจัดการเรียนแบบร่วมมือ. ปรินูญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- สาคร ธรรมศักดิ์. (2541). ผลการสอนตามแนวคอนสตรัคติวิซิมแบบร่วมมือที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการและความสามารถในการคิดแก้ปัญหาสิ่งแวดล้อมของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. ปรินูญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- โสภณ บำรุงสงฆ์ และสมหวัง ไตรตันวงศ์. (2520). เทคนิคและวิธีสอนคณิตศาสตร์แนวใหม่. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ไทยวัฒนาพานิช.
- สุชา จันทรเณม. (2541). จิตวิทยาทั่วไป (พิมพ์ครั้งที่ 11). กรุงเทพฯ: ไทยวัฒนาพานิช.
- สุรศักดิ์ หลาบมาลา. (2531). การเรียนการสอนแบบร่วมมือ. วิทยาจารย์, 86(2), 4-8.
- สุนันท์ ปัทมาคม. (2523). ชุดการสอน (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สุจิตรา นุ่มสุวรรณ. (2547). การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยการใช้ชุดสื่อประสมกับการสอนปกติ. วิทยานิพนธ์ศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยรามคำแหง.
- สุวิทย์ มูลคำ และอรทัย มูลคำ. (2545). 19 วิธีจัดการเรียนรู้เพื่อพัฒนาความรู้และทักษะ. กรุงเทพฯ: บริษัทดวงกมลสมัย.
- สุวิมล ติรกานนท์. (2546). การใช้สถิติในงานวิจัยทางสังคมศาสตร์: แนวทางสู่การปฏิบัติ. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

- สุนีย์ เหมะประสิทธิ์. (2533). *การพัฒนาชุดการเรียนรู้การสอนเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องในการแก้โจทย์ปัญหา*. ปรินญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ, สำนักนายกรัฐมนตรี. (2540). *ทฤษฎีการเรียนรู้แบบมีส่วนร่วม*. กรุงเทพฯ: ผู้แต่ง.
- เสาวณีย์ สิกขาบัณฑิต. (2528). *เทคโนโลยีทางการศึกษา*. กรุงเทพฯ: สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า.
- อารี พันธุ์ณี. (2535). *จิตวิทยาการเรียนการสอน*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์บริษัทเลฟ.
- อารี สันหลวี. (2542). การเรียนแบบร่วมมือ (cooperative learning). *โฟรเบล*, 5(5), 13-19.
- อุดมศักดิ์ พลอยบุตร. (2546). การนิเทศภายในโรงเรียนภาคปฏิบัติที่มีประสิทธิภาพ. *สารพัฒนาหลักสูตร*, 6(8), 8-13.
- Adam, S. (1977). *Teaching mathematics*. New York: Harper & Row.
- Anderson, K. R., & Pingry R. E. (1973). *Problem solving in mathematics in the learning of mathematics: it theory and practice*. Washington, DC: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Artzt, A. F., & Chaire M. N. (1990). Cooperative learning. *The Mathematics Teacher*, 83(6), 448-449.
- Bourne, L. E., Ekstrand, B. R., & Dominowski, R. L. (1971). *The psychology of thinking*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Davidson, N. (1990). *Teaching and learning mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Duan, J. E. (1973). *Individualized instructional-programs and materials*. Englewood Cliffs, NJ: Education Technology.
- Good, Carter V. (1973). *Dictionary of education* (3rd ed.). New York: McGraw-Hill.

- Johnson, D. W., & Johnson, A. (1994). *Circle of learning: Cooperation in the classroom*. Washington, DC: Association for Supervision and Curriculum Development.
- Johnson, D.W., & Johnson, A. (1989). *Cooperation and competition: Theory and research*. Edina, ME: Internation Book.
- Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (1975). *Learning together and alone*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Kapfer, P. G., & Mirian B. K. (1972). *Learning package in american education*. Englewood Cliffs, NJ: Education Technology.
- Madden, N. A., & Slavin, R. E. (1983). Mainstreaming students with mild handicaps, academic and social outcome: *Review of Educational Research Winter, 53*, 519-569.
- Nichols, J. D., & Miller, R. B. (1994). Cooperative learning and student motivation. *Contemporary Educational Psychology, 19*(2), 167-178.
- Sherman, L. W., & Thomas, M. (1986). Mathematics achievement in cooperative goal-structured high school classrooms. *Journal of Educational Research, 70*(3), 169-172.
- Polya, G. (1957). *How to solve it*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Slavin, R. E. (1995). *Cooperative learning*. Boston, MA: Allyn & Bacon.
- Slavin, R. E. (1987). Cooperative learning and cooperative schools. *Educational Leadership, 45*(3), 7-13.
- Torrance, E. P. (1962). *Guiding creative talent*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

ประวัติผู้วิจัย



ชื่อ ชื่อสกุล

นางกุลวดี สร้อยวารี

วัน เดือน ปี เกิด

20 พฤศจิกายน 2520

สถานที่เกิด

กรุงเทพมหานคร

วุฒิการศึกษา

สำเร็จการศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

จากโรงเรียนมัธยมวัดบึงทองหลาง ปีการศึกษา 2537

สำเร็จปริญญาตรีศึกษาศาสตร์บัณฑิต (วท.บ.)

จากมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี

ปีการศึกษา 2542

ตำแหน่งหน้าที่

การทำงานปัจจุบัน

อาจารย์ โรงเรียนอิสลามสันติชน

สังกัดสำนักบริหารงานคณะกรรมการส่งเสริมการศึกษาเอกชน

กรุงเทพมหานคร

