วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh 64(697) มกราคม – เมษายน 2562
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

สมการไดโอเฟนไทน์ $8^x + 61^y = z^2$ และ $8^x + 67^y = z^2$

On the Diophantine Equations $8^x + 61^y = z^2$ and $8^x + 67^y = z^2$

นนธิยา มากะเต กุลประภา ศรีหมุด อภิญญา วะรงค์ และ วิลาวัลย์ ทรัพย์เจริญ
Nonthiya Makate[1] Kulprapa Srimud [2] Apinya Warong[3] and Wilawan Supjaroen[4]

[1,2,3,4]Department of Mathematics and Computer Science,
Faculty of Science and Technology,
Rajamangala University of Technology Thanyaburi,
Pathum Thani 12110, Thailand

Email: [1]nonthiya_m@rmutt.ac.th [2]kulprapa_s@ rmutt.ac.th [3]apinwa44@gmail.com
[4]wilawan_supjaroen@hotmail.com

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาผลเฉลย (x, y, z) เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอเฟนไทน์ $8^x + 61^y = z^2$ และ $8^x + 67^y = z^2$ โดยพบว่าสมการทั้งสองมีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, y, z) = (1,0,3)$

คำสำคัญ: สมการไดโอเฟนไทน์ ข้อคาดการณ์ของคาตาลาน

ABSTRACT

In this paper, we study solutions (x, y, z) where x, y and z are non - negative integers of Diophantine equations $8^x + 61^y = z^2$ and $8^x + 67^y = z^2$. We find that both of them have a unique solution, that is $(x, y, z) = (1,0,3)$.

Keywords: Diophantine equation, Catalan’s conjecture

1. บทนำ

สมการไดโอเฟนไทน์ เป็นสมการที่ได้ศึกษากันอย่างมากมาย และศึกษาในหลายรูปแบบ รูปแบบหนึ่งที่ได้ศึกษากันอย่างกว้างขวางคือ สมการที่อยู่ในรูป $a^x + b^y = z^2$ เช่น

ในปี ค.ศ. 2011 Suvarnamani [9] ได้ศึกษาผลเฉลยของสมการไดโอเฟนไทน์ $2^x + p^y = z^2$ เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและ p เป็นจำนวนเฉพาะ

ในปี ค.ศ. 2012 Chotchaisthit [1] ได้ศึกษาผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอเฟนไทน์ $4^x + p^y = z^2$ โดยที่ p เป็นจำนวนเฉพาะ และในปีเดียวกัน Sroysang [4] ได้พิสูจน์ว่า $(x, y, z) = (1,0,3)$ เป็นผลเฉลยเดียวที่ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอเฟนไทน์ $8^x + 19^y = z^2$

ในปี ค.ศ. 2013 Sroysang [5], [7] ได้แสดงว่าสมการไดโอเฟนไทน์ $2^x + 3^y = z^2$ มีเพียงสามผลเฉลยคือ $(0,1,2), (3,0,3)$ และ $(4,2,5)$ และได้ศึกษาสมการไดโอเฟนไทน์ $7^x + 8^y = z^2$ โดยที่ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และพบว่าสมการดังกล่าวมีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว นั่นคือ $(x, y, z) = (0,1,3)$

ในปี ค.ศ. 2014 Sroysang [8], [6] ได้แสดงให้เห็นว่า $(1,0,3)$ เป็นผลเฉลยเดียวของสมการไดโอเฟนไทน์ $8^x + 13^y = z^2$ และ $8^x + 59^y = z^2$ เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาสมการไดโอเฟนไทน์ ที่อยู่ในรูป $8^x + p^y = z^2$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะอีกสองจำนวนที่อยู่ถัดจาก 59 นั่นคือ สมการ $8^x + 61^y = z^2$ และ $8^x + 67^y = z^2$

2. ผลลัพธ์หลัก

ทฤษฎีบท 2.1 [3] (ข้อคาดการณ์ของคาตาลาน)
สำหรับ a, b, x และ y ที่เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $\min\{a, b, x, y\} > 1$
สมการไดโอเฟนไทน์ $a^x - b^y = 1$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียวคือ $(a, b, x, y) = (3,2,2,3)$

ทฤษฎีบท 2.2 [4] สำหรับ x และ z ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ
สมการไดโอเฟนไทน์ $8^x + 1 = z^2$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $(x, z) = (1,3)$

ทฤษฎีบท 2.3 [2] สำหรับ x และ z ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ
สมการไดโอเฟนไทน์ $1 + p^x = z^2$ โดยที่ p เป็นจำนวนเฉพาะที่เป็นจำนวนคี่ จะมีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียวคือ $(p, x, z) = (3,1,2)$

บทแทรก 2.4 สมการไดโอเฟนไทน์ $1 + 61^x = z^2$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

บทพิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 2.3 เนื่องจาก 61 เป็นจำนวนเฉพาะคี่ และ $61 \neq 3$ □

บทแทรก 2.5 สมการไดโอเฟนไทน์ $1 + 67^x = z^2$ ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

บทพิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 2.3 เนื่องจาก 67 เป็นจำนวนเฉพาะคี่ และ $67 \neq 3$ □

ทฤษฎีบท 2.6 สำหรับ x, y และ z ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ
สมการไดโอเฟนไทน์ $8^x + 61^y = z^2$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียวคือ $(x, y, z) = (1,0,3)$

บทพิสูจน์ ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบที่ทำให้ $8^x + 61^y = z^2$ (1)

สมมติให้ $x = 0$ จะได้ $1 + 61^y = z^2$ (2)

โดยบทแทรก 2.4 จะได้ว่า (2) ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

สมมติให้ $x \geq 1$ เราจะพิจารณา y เป็น 2 กรณีดังต่อไปนี้

<u>กรณี 1</u> ถ้า y เป็นจำนวนคี่ แล้วจะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ r ที่ทำให้ $y = 2r + 1$

จาก (1) จะได้ $8^x + 61^{2r+1} = z^2$ นั่นคือ $8^x + 61(3721)^r = z^2$

เนื่องจาก $8^x + 61^y$ เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า z^2 เป็นจำนวนคี่ นั่นคือ z เป็นจำนวนคี่

ให้ $z = 2q + 1$ เมื่อ q เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ทำให้ได้ $z^2 = 4q(q + 1) + 1$ (3)

จะได้ว่า $z^2 \equiv 1 \pmod 8$

เนื่องจาก $3721 \equiv 1 \pmod 8$ จะได้ $3721^r \equiv 1 \pmod 8$

เนื่องจาก $61 \equiv 5 \pmod 8$ ทำให้ได้ $61(3721^r) \equiv 5 \pmod 8$

ดังนั้น $8^x + 61(3721^r) \equiv 5 \pmod 8$ นั่นคือ $z^2 \equiv 5 \pmod 8$ เกิดข้อขัดแย้ง

<u>กรณี 2</u> ถ้า y เป็นจำนวนคู่

<u>กรณีย่อย 2.1</u> $y = 0$

จาก (1) จะได้ $8^x + 1 = z^2$ (4)

โดยทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า (4) มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียวคือ $(x, z) = (1,3)$

นั่นคือ (1) มีผลเฉลยคือ $(x, y, z) = (1,0,3)$

<u>กรณีย่อย 2.2</u> $y > 1$

ให้ $y = 2s$ เมื่อ s เป็นจำนวนนับ

จะได้ว่า (1) สามารถเขียนเป็น $8^x + 61^{2s} = z^2$

นั่นคือ $2^{3x} = (z - 61^s)(z + 61^s)$ (5)

ให้ u เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ที่ทำให้ $2^u = z - 61^s$ และ $2^{3x-u} = z + 61^s$

โดยที่ $3x > 2u$

เราพิจารณา $2^{3x-u} - 2^u = (z + 61^s) - (z - 61^s) = 2(61^s)$

เราจะได้ $2^u(2^{3x-2u} - 1) = 2(61^s)$ (6)

จาก (6) จะเป็นไปได้เพียง 1 กรณี นั่นคือ $2^u = 2$ และ $2^{3x-2u} - 1 = 61^s$ (7)

นั่นคือจะได้ $u = 1$ ทำให้ได้ว่า $2^{3x-2} - 1 = 61^s$ (8)

ถ้า $s = 1$ จะได้ $2^{3x-2} = 62$ ซึ่งกรณีนี้เป็นไปไม่ได้

ดังนั้น $s > 1$ จะได้ว่า $61^s > 61$

นั่นคือ $61^s + 1 > 62 > 32$

จาก (8) เราจะได้ $2^{3x-2} = 61^s + 1 > 2^5$ ดังนั้น $3x - 2 > 5$

ซึ่งจะได้ว่า $\min\{2, 61, 3x - 2, s\} > 1$ และโดยทฤษฎีบท 2.1 จะได้ว่า

สมการ $2^{3x-2} - 61^s = 1$ ไม่มีผลเฉลย

นั่นคือ $(x, y, z) = (1,0,3)$ เป็นเพียงผลเฉลยเดียวของสมการไดโอเฟนไทน์ $8^x{+}61^y = z^2$ โดยที่ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ☐

ทฤษฎีบท 2.7 สำหรับ x, y และ z ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

สมการไดโอเฟนไทน์ $8^x{+}67^y = z^2$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียวคือ $(x, y, z) = (1,0,3)$

บทพิสูจน์ ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ที่ทำให้ $8^x{+}67^y = z^2$ (9)

สมมติให้ $x = 0$ จะได้ $1{+}67^y = z^2$ (10)

โดยบทแทรก 2.5 จะได้ว่า (10) ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

สมมติให้ $x \geq 1$

เนื่องจาก $8^x{+}67^y$ เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า z^2 เป็นจำนวนคี่ นั่นคือ z เป็นจำนวนคี่

ให้ $z = 2t + 1$ เมื่อ t เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

จะได้ว่า

$$8^x{+}67^y = (2t + 1)^2$$
$$8^x{+}67^y = 4(t^2 + t) + 1$$
$$67^y - 1 = 4(t^2 + t) - 8^x$$
$$67^y - 1 = 4[(t^2 + t) - 2 \cdot 8^{x-1}]$$

ดังนั้น $67^y \equiv 1 \pmod 4$

เราจะแสดงว่า y เป็นจำนวนคู่

สมมติให้ y เป็นจำนวนคี่ แล้วจะมีจำนวนเต็ม k ที่ไม่เป็นลบที่ทำให้ $y = 2k + 1$

เนื่องจาก $67 \equiv 3 \pmod 4$ จะได้ว่า $67^2 \equiv 9 \pmod 4$

ทำให้ $67^2 \equiv 1 \pmod 4$ ดังนั้น $67^{2k} \equiv 1 \pmod 4$

จะได้ว่า $67^{2k+1} \equiv 3 \pmod 4$ นั่นคือ $67^y \equiv 3 \pmod 4$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

ทำให้ y เป็นจำนวนคู่ เราจะแบ่งพิจารณาออกเป็น 2 กรณี ต่อไปนี้

<u>กรณี 1</u> $y = 0$

จะได้ว่า $8^x + 1 = z^2$ (11)

โดยทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า (11) มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียวคือ $(x, z) = (1,3)$

นั่นคือ สมการ $8^x + 67^y = z^2$ มีผลเฉลยคือ $(x, y, z) = (1,0,3)$

<u>กรณี 2</u> $y > 1$

ให้ $y = 2m$ เมื่อ m เป็นจำนวนนับ

เราจะได้ (9) เขียนเป็น $8^x + 67^{2m} = z^2$

นั่นคือ $2^{3x} = (z - 67^m)(z + 67^m)$ (12)

ให้ u เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบที่ทำให้ $2^u = z - 67^m$ และ $2^{3x-u} = z + 67^m$ โดยที่ $3x > 2u$

เราพิจารณา $2^{3x-u} - 2^u = (z + 67^m) - (z - 67^m) = 2(67^m)$

เราจะได้ $2^u(2^{3x-2u} - 1) = 2(67^m)$ (13)

จาก (13) จะเป็นไปได้เพียง 1 กรณี นั่นคือ $2^u = 2$ และ $2^{3x-2u} - 1 = 67^m$

ทำให้ $u = 1$ ดังนั้น $2^{3x-2} = 67^m + 1$

ถ้า $m = 1$ จะได้ $2^{3x-2} = 68$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ทำให้ $m > 1$ และ $2^{3x-2} = 67^m + 1 > 67 + 1 > 64 = 2^6$

จะได้ว่า $3x - 2 > 6$

ทำให้ $\min\{2,67,3x - 2, m\} > 1$

โดยทฤษฎีบท 2.1 จะได้สมการ $2^{3x-2} - 67^m = 1$ ไม่มีผลเฉลย

นั่นคือ $(x, y, z) = (1,0,3)$ เป็นเพียงผลเฉลยเดียวของสมการไดโอเฟนไทน์ $8^x + 67^y = z^2$

โดยที่ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ □

3. สรุป

สำหรับในงานวิจัยนี้เราได้ศึกษาผลเฉลย (x, y, z) เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการไดโอเฟนไทน์ $8^x+61^y = z^2$ และ $8^x+67^y = z^2$ ซึ่งเราได้พบว่า $(x, y, z) = (1,0,3)$ เป็นผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียวของสมการไดโอเฟนไทน์ทั้งสอง

เอกสารอ้างอิง

[1] Chotchaisthit, S. (2012). On the Diophantine Equation $4^x+p^y = z^2$ where p is a Prime Number. *American Journal of Mathematics and Sciences,* 1 (1), p. 191 - 193.

[2] Khan, Md. A. A., Rashid, A. and Uddin, Md. S. (2016). Non-Negative Integer Solutions of Two Diophantine Equations $2^x+9^y = z^2$ and $5^x+9^y = z^2$. *Journal of Applied Mathematics and Physics,* 4 (4), p. 762 - 765.

[3] Mihailescu, P. (2004). Primary Cyclotomic Units and a Proof of Catalan's Conjecture. *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik,* 27, p. 167 - 195.

[4] Sroysang, B. (2012). More on the Diophantine Equation $8^x+19^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics,* 81 (4), p. 601 - 604.

[5] Sroysang, B. (2013). More on the Diophantine Equation $2^x+3^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics,* 84 (2), p. 133 - 137.

[6] Sroysang, B. (2014). More on the Diophantine Equation $8^x+59^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics,* 91 (1), p. 139 - 142.

[7] Sroysang, B. (2013). On the Diophantine Equation $7^x+8^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics,* 84 (1), p. 111 - 114.

[8] Sroysang, B. (2014). On the Diophantine Equation $8^x+13^y = z^2$. *International Journal of Pure and Applied Mathematics,* 90 (1), p. 69 - 72.

[9] Suvarnamani, A. (2011). Solutions of the Diophantine Equation $2^x+p^y = z^2$. *International Journal of Mathematical Sciences and Applications,* 1 (3), p. 1415-1419.