วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh xx(xxx) xxxxx – xxxxx xxxx
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

ปัญหาเรขาคณิตกับเกมวางเหรียญ ตอนที่ 2
Some Geometric Problems Related to Faustian Round Table Coin Game (2)

กีรติ ศรีอมร
Kirati Sriamorn

Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science,
Chulalongkorn University, Patumwan, Bangkok, 10330, Thailand

Email: Kirati.S@chula.ac.th

ในตอนที่แล้ว เราได้แนะนำเกี่ยวกับเกมวางเหรียญบนโต๊ะกลม และได้กล่าวถึงปัญหาสามปัญหาที่เกี่ยวข้อง คือ

(ก) เราสามารถวางเหรียญลงไปบนโต๊ะที่กำหนดมาให้ ได้มากที่สุดเป็นจำนวนกี่เหรียญ

(ข) เหรียญเหรียญหนึ่งสามารถวางติดกับเหรียญอื่นพร้อม ๆ กันได้มากที่สุดกี่เหรียญ

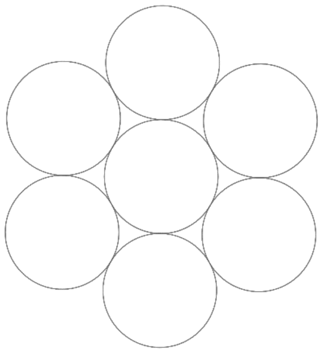
(ค) ถ้าเราต้องการที่จะวางเหรียญ เพื่อกีดกันไม่ให้คนอื่นมาวางเหรียญติดกับเหรียญตรงกลางที่กำหนดมาให้ได้ เราจะต้องใช้เหรียญมาวางกันอย่างน้อยที่สุดกี่เหรียญ

โดยคำถามแรก ได้นำไปสู่การให้บทนิยามทางคณิตศาสตร์ของคำว่า “บรรจุ” ซึ่งนักคณิตศาสตร์หลายท่านได้ทำการศึกษาค้นคว้าปัญหาเกี่ยวกับการบรรจุในรูปแบบต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็น การบรรจุรูปวงกลมที่มีขนาดเท่า ๆ กันหลายรูปลงในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปหนึ่ง การบรรจุรูปวงกลมที่มีขนาดแตกต่างกันหลายรูปลงในวงกลมอีกวงหนึ่ง หรือแม้แต่ในสามมิติ ก็มีการศึกษาเกี่ยวกับการบรรจุลูกบอลหลาย ๆ ลูกลงในกล่องรูปทรงต่าง ๆ เป็นต้น

ตอนนี้ เราจะมาพิจารณาอีกสองปัญหาที่เหลือ ซึ่งสองปัญหานี้ จะนำไปสู่การนิยามจำนวนที่เรียกว่า “จำนวนนิวตัน” (Newton number) และ “จำนวนตัวบล็อก” (blocking number) ตามลำดับ

1. จำนวนของนิวตัน

หนึ่งในปัญหาที่เราสนใจเกี่ยวกับเกมวางเหรียญก็คือ “เหรียญเหรียญหนึ่งสามารถวางติดกับเหรียญเหรียญอื่นพร้อม ๆ กันได้มากที่สุดกี่เหรียญ” ซึ่งเราสามารถตอบปัญหานี้ได้ โดยใช้เพียงความรู้เรขาคณิตเบื้องต้นเท่านั้น จากรูปที่ 1.1 จะเห็นได้ว่า เหรียญเหรียญหนึ่งจะสามารถวางติดกับเหรียญเหรียญอื่นได้หกเหรียญพอดี โดยทั้งหกเหรียญวางแนบติดกันโดยไม่มีช่องว่างให้ขยับเขยื้อนได้ (ยกเว้นเสียแต่ว่าจะขยับไปพร้อม ๆ กันทั้งหมด)



รูปที่ 1.1 เหรียญเหรียญหนึ่งสามารถวางให้สัมผัสกับเหรียญเหรียญอื่นได้เพียง 6 เหรียญเท่านั้น

ย้อนกลับไปเมื่อปี 1694 Gregory และ Newton ได้ถกเถียงกันถึงปัญหาเกี่ยวกับการสัมผัสกันของทรงกลม โดยปัญหานี้เป็นที่รู้จักกันในชื่อ “ปัญหาทรงกลม 13 รูป” ซึ่ง Newton เชื่อว่าทรงกลมรูปหนึ่งสามารถสัมผัสกับทรงกลมรูปอื่นที่มีขนาดเท่ากันได้มากที่สุด 12 รูป ในขณะที่ Gregory เชื่อว่าน่าจะสัมผัสได้ 13 รูป เพราะ Gregory สังเกตว่าถ้าใช้ทรงกลมเพียง 12 รูปมาสัมผัส ก็จะยังคงมีช่องว่างหลงเหลือให้เราขยับเขยื้อนทรงกลมแต่ละรูปได้ ซึ่งทาง Gregory เชื่อว่าอาจจะเป็นไปได้ที่เราจะขยับเขยื้อนทรงกลมทั้ง 12 รูปนี้ให้เกิดบริเวณช่องว่างที่จะใส่ทรงกลมรูปที่ 13 เข้าไปได้

เป็นระยะเวลานานถึง 200 กว่าปี ที่นักคณิตศาสตร์พยายามค้นหาคำตอบของปัญหา “ทรงกลม 13 รูป” โดยนักคณิตศาสตร์ท่านหนึ่งที่หลาย ๆ บทความได้อ้างชื่อว่าเป็นผู้แก้ปัญหานี้ได้เป็นคนแรกก็คือ Hoppe แต่แท้จริงแล้วการพิสูจน์ของเขาไม่สมบูรณ์ จนกระทั่งในปี 1953 Schütte และ Van der Waerden ได้ใช้แนวคิดเกี่ยวกับทฤษฎีกราฟแก้ปัญหานี้ได้เป็นคนแรก โดยคำตอบที่ได้คือ 12 ซึ่ง

ตรงกับจำนวนที่ Newton เชื่อมั่นนั่นเอง และสามปีต่อมา Leech ได้ตีพิมพ์บทความที่มีความยาวเพียงสองหน้าเกี่ยวกับการพิสูจน์ข้อสรุปดังกล่าว แต่เป็นที่น่าเสียดายว่า บทพิสูจน์นี้มีรายละเอียดเกี่ยวกับการคำนวณอีกหลายขั้นตอนที่ต้องเติมเต็ม หลังจากนั้น ยังคงมีนักคณิตศาสตร์อีกหลายท่านที่ได้ให้บทพิสูจน์ใหม่ ๆ ของปัญหานี้ อาทิ Böröczky, Anstreicher, Ericson, Zinoviev, Hsiang และ Musin

ต่อไป เรามาพิจารณาการสัมผัสของรูปทรงนูน n มิติใด ๆ

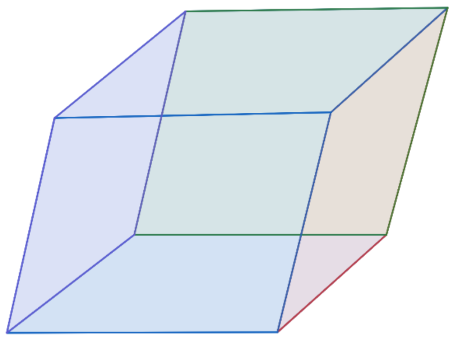
บทนิยาม 1.1 ให้ K และ K' เป็นรูปทรงนูน n มิติ เราจะกล่าวว่า K สัมผัสกันกับ K' ถ้า $K \cap K' \neq \emptyset$ แต่ $Int(K) \cap Int(K') = \emptyset$

ให้ K เป็นรูปทรงนูน n มิติใด ๆ เราจะใช้ $\alpha(K)$ แทนจำนวนที่มากที่สุดที่เป็นไปได้ของสำเนาแบบเลื่อนของ K ที่สามารถสัมผัสกับ K พร้อม ๆ กันได้ (โดยภายในของสำเนาสองอันใด ๆ ต้องไม่ซ้อนทับกัน) โดยเราจะเรียก $\alpha(K)$ ว่า*จำนวนนิวตัน* (Newton number) *หรือจำนวนตัวสัมผัส* (kissing number) ของ K ตัวอย่างเช่น จำนวนนิวตันของวงกลมเท่ากับ 6 และจำนวนนิวตันของทรงกลมเท่ากับ 12

ในกรณีสองมิติ Grünbaum ได้ข้อสรุปว่า สำหรับรูปทรงนูนสองมิติ K ใด ๆ

$$\alpha(K) = \begin{cases} 8, & \text{เมื่อ } K \text{ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน} \\ 6, & \text{กรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

ส่วนในกรณีที่มากกว่าสองมิติขึ้นไป ในปี 1957 Hadwiger ได้พิสูจน์ว่า ในกรณีที่ K เป็นรูปทรงนูน n มิติใด ๆ จะต้องมี $\alpha(K) \leq 3^n - 1$ เสมอ ซึ่งอสมการนี้จะเป็นสมการก็ต่อเมื่อ K เป็นทรงลูกบาศก์หน้าขนาน (parallelotope)

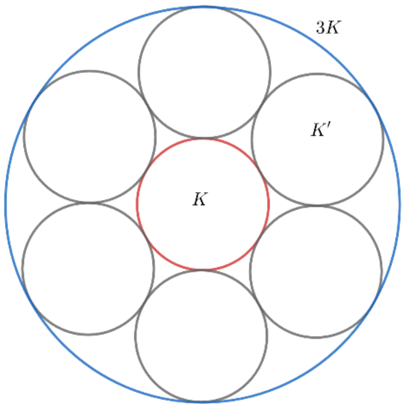


รูปที่ 1.2 ตัวอย่างของทรงลูกบาศก์หน้าขนานสามมิติ

แนวความคิดคร่าว ๆ ของ Hadwiger ในการพิสูจน์อสมการข้างต้นจะถูกแบ่งออกเป็นสองขั้นตอน โดยขั้นตอนแรก Hadwiger พิจารณากรณีที่ K เป็นรูปทรงนูนที่สมมาตรเทียบกับจุดศูนย์กลาง ซึ่งโดยไม่เสียนัยทั่วไป เราสามารถสมมติว่าจุดศูนย์กลางของ K อยู่ที่จุดกำเนิดได้ ในกรณีนี้เราสามารถแสดงได้ไม่ยากว่า ถ้า K' เป็นสำเนาแบบเลื่อนขนานของ K และ K' สัมผัสกับ K แล้ว $K' \subset 3K$ โดยในที่นี้ เรานิยาม $\lambda K = \{\lambda v | v \in K\}$ เมื่อ λ เป็นจำนวนจริงใด ๆ จากข้อเท็จจริงนี้ เราจะสามารถสรุปได้ว่า (พิจารณารูปที่ 1.3)

$$(\alpha(K) + 1)|K| \leq |3K| = 3^n|K|$$

เมื่อ $|K|$ แทนปริมาตรของ K ซึ่งก็จะได้ว่า $\alpha(K) \leq 3^n - 1$



รูปที่ 1.3 แสดงรูป K' ทุกรูปที่สัมผัสกับ K ซึ่งอยู่ใน $3K$

ขั้นตอนที่สอง ให้ K เป็นรูปทรงนูนใด ๆ เรานิยาม*เซตผลต่าง* (difference set) ของ K โดย

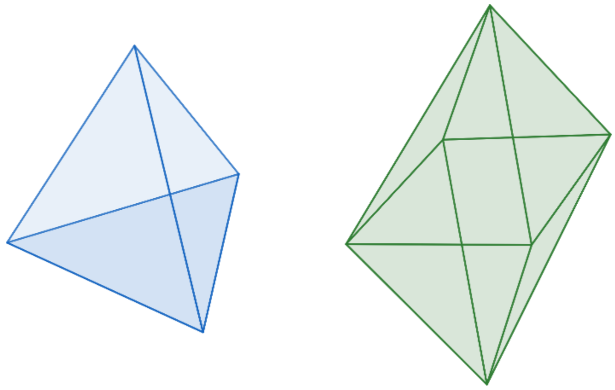
$$D(K) = \{u - v | u, v \in K\}$$

ซึ่งเนื่องจาก K เป็นรูปทรงนูน เราจะสามารถแสดงได้ไม่ยากว่า $D(K)$ จะต้องเป็นรูปทรงนูนที่สมมาตรเทียบกับจุดศูนย์กลาง (โดยมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด) นอกจากนี้ Hadwiger พิสูจน์ได้ว่า $\alpha(K) = \alpha(D(K))$ ดังนั้น เมื่อใช้ข้อสรุปจากขั้นตอนที่หนึ่ง เราก็จะได้ทันทีว่า $\alpha(D(K)) = \alpha(K) \leq 3^n - 1$ สำหรับการพิสูจน์กรณีที่เป็นสมการจะมีความยุ่งยากและซับซ้อนกว่ามาก

สำหรับขอบเขตล่างของ $\alpha(K)$ ในกรณีที่ K เป็นรูปทรงนูน n มิติใด ๆ Bourgain ได้แสดงว่าจะต้องมีค่าคงตัว c ซึ่งไม่ขึ้นอยู่กับมิติ n ที่ทำให้ $\alpha(K) \geq 3^{cn}$

การคำนวณค่าของ $\alpha(K)$ ในกรณีที่กำหนดรูปทรงนูน K มาให้รูปหนึ่งนั้น โดยทั่วไปแล้วเป็นปัญหาที่ยากมาก ๆ อย่างไรก็ตาม Zong ได้ค้นพบวิธีที่มีประสิทธิภาพในการคำนวณหา $\alpha(K)$ ใน

กรณีที่ K เป็นทรงสี่หน้า หรือทรงแปดหน้า โดย Zong ได้ข้อสรุปว่า ในสองกรณีนี้ ต่างก็มี $\alpha(K) = 18$



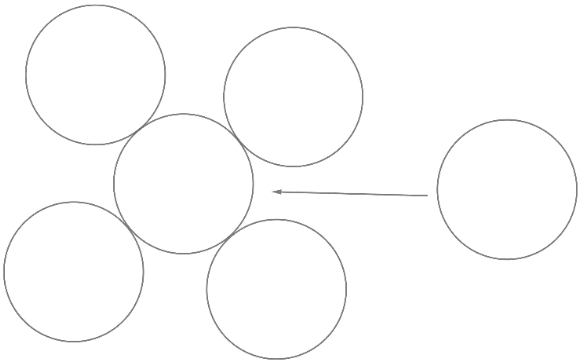
รูปที่ 1.4 ทรงสี่หน้า (ซ้าย) และทรงแปดหน้า (ขวา)

มีนักคณิตศาสตร์หลายท่านให้ความสนใจค่าของ $\alpha(K)$ ในกรณีที่ $K = B^n$ เป็นลูกบอล n มิติ รัศมีหนึ่งหน่วย เช่น ในกรณี $n = 2$ ลูกบอล B^2 คือวงกลมหนึ่งหน่วย และในกรณี $n = 3$ ลูกบอล B^3 คือทรงกลมหนึ่งหน่วย เป็นต้น ซึ่งจากที่กล่าวไปแล้วในตอนต้น เราทราบแล้วว่า $\alpha(B^2) = 6$ และ $\alpha(B^3) = 12$ สำหรับกรณีสี่มิติ Musin ได้ข้อสรุปว่า $\alpha(B^4) = 24$ นอกจากนี้ Levenstein, Odlyzko และ Sloane ได้พิสูจน์ว่า $\alpha(B^8) = 240$ และ $\alpha(B^{24}) = 196560$ สำหรับข้อสรุปเกี่ยวกับกรณีทั่ว ๆ ไป Wyner, Shannon และ Kabatjanski ได้ข้อสรุปว่า

$$2^{0.2075\ldots n(1+o(1))} \leq \alpha(B^n) \leq 2^{0.401\ldots n(1+o(1))}$$

2. จำนวนตัวบล็อก

ตอนนี้เราย้อนกลับไปที่คำถามสุดท้ายที่เราถามไว้ในตอนต้นอีกครั้ง นั่นก็คือ “ถ้าเราต้องการที่จะวางเหรียญเพื่อกีดกันไม่ให้คนอื่นมาวางเหรียญติดกับเหรียญตรงกลางที่กำหนดมาให้ได้ เราจะต้องใช้เหรียญมาวางกันอย่างน้อยที่สุดกี่เหรียญ” พิจารณาการวางตัวของเหรียญในรูปที่ 1.1 เราจะสามารถให้เหตุผลได้ไม่ยากว่า เหรียญสามเหรียญไม่เพียงพอที่จะทำการกีดกันเหรียญอื่นไม่ให้มาสัมผัสกับเหรียญตรงกลาง แต่จากรูปที่ 2.1 เราจะเห็นได้ว่า เหรียญสี่เหรียญเพียงพอที่จะใช้ในการวางกันเหรียญอื่นได้ ดังนั้น คำตอบของคำถามด้านหน้าก็คือ “4 เหรียญ” หรือกล่าวเป็นภาษาคณิตศาสตร์ได้ว่า “เราต้องใช้สำเนาแบบเลื่อนของ B^2 จำนวน 4 อันมาวางสัมผัสกับ B^2 เพื่อกันไม่ให้มีสำเนาแบบเลื่อนอันอื่น ๆ ของ B^2 มาสัมผัสกับ B^2 ได้”



รูปที่ 2.1 ต้องใช้เหรียญจำนวนสี่เหรียญเพื่อกันไม่ให้มีเหรียญอื่นมาวางติดกับเหรียญตรงกลางได้

ในกรณีทั่วไป เราจะใช้ $\tau(K)$ แทนจำนวนที่น้อยที่สุดของสำเนาแบบเลื่อนของ K ที่ต้องใช้ในการวางสัมผัสกับ K เพื่อกีดกันไม่ให้มีสำเนาแบบเลื่อนอันอื่น ๆ ของ K มาสัมผัสกับ K ได้ โดยเราจะเรียก $\tau(K)$ ว่า "*จำนวนตัวบล็อก*ของ K" ตัวอย่างเช่น $\tau(B^2) = 4$ เป็นต้น จากบทนิยาม เราจะเห็นได้ไม่ยากว่า $\tau(K) \leq \alpha(K)$ เสมอ

ต่อไป เราจะแนะนำอีกปัญหาหนึ่งซึ่งคล้ายคลึงกับปัญหาการบล็อกข้างต้น แต่ก่อนอื่น เราจะมานิยามคำว่า "การปิดทับ" กันก่อน

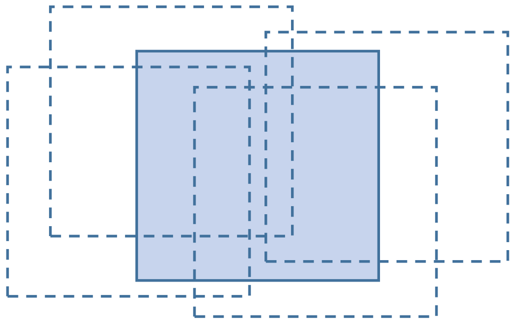
บทนิยาม 2.1 ให้ S เป็นสับเซตของ $\mathbb{R}^n$ และ $K_1, K_2, K_3, \ldots$ เป็นรูปทรงนูน n มิติ เราจะกล่าวว่า $\{K_i\}$ เป็น*การปิดทับ* (covering) ของ S ถ้า

$$S \subset \bigcup_{i \geq 1} K_i$$

และในกรณีที่ K_i ต่างก็เป็นสำเนาแบบเลื่อนขนานของรูปทรงนูน K รูปหนึ่ง เราจะกล่าวว่า $\{K_i\}$ เป็น*การปิดทับแบบเลื่อนขนาน* (translative covering) ของ S ด้วย K

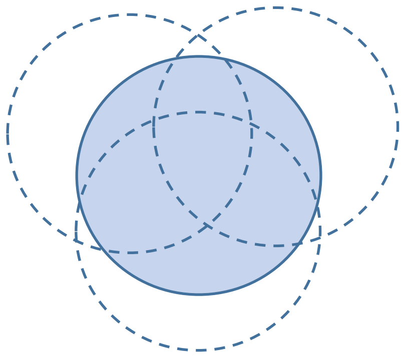
ตอนนี้ พิจารณาการปิดทับแบบเลื่อนขนานของรูปทรงนูน K ด้วย $Int(K)$ เราจะใช้ $\gamma(K)$ แทนจำนวนของสำเนาแบบเลื่อนขนานของ $Int(K)$ ที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้ที่จะต้องใช้ในการปิดทับ K และเราจะเรียก $\gamma(K)$ ว่า "*จำนวนตัวปิดทับ Hadwiger* ของ K"

พิจารณากรณีที่ $K = I^2$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เราจะเห็นได้ไม่ยากว่า ในกรณีนี้ สำเนาแบบเลื่อนขนานของ $Int(I^2)$ ไม่สามารถปิดทับจุดยอดของ I^2 พร้อมกันสองจุดขึ้นไปได้ ดังนั้น เราจะได้ว่า $\gamma(I^2) \geq 4$ นอกจากนี้ จากรูปที่ 2.2 เราจะเห็นได้ไม่ยากว่า เราสามารถใช้สำเนาแบบเลื่อนขนานของ $Int(I^2)$ เพียงสี่อันเพื่อปิดทับ I^2 ได้ ดังนั้น $\gamma(I^2) = 4$



รูปที่ 2.2 การปิดทับแบบเลื่อนขนานของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส I^2 ด้วย $Int(I^2)$

สำหรับกรณีที่ $K = B^2$ เป็นวงกลม เราจะพบว่าสำเนาของ $Int(B^2)$ ไม่สามารถปิดทับจุดปลายทั้งสองจุดบนเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม B^2 พร้อม ๆ กันได้ โดยข้อเท็จจริงนี้ เราจะได้ว่า $\gamma(B^2) = 3$



ตารางที่ 2.3 การปิดทับแบบเลื่อนขนานของรูปวงกลม B^2 ด้วย $Int(B^2)$

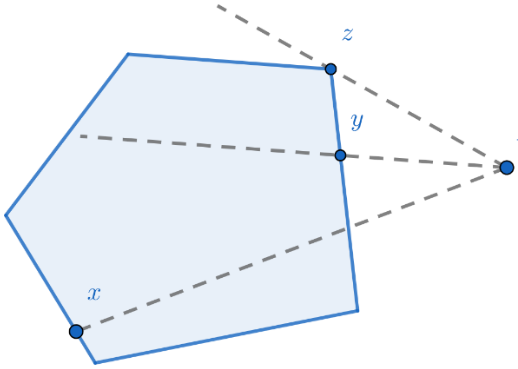
สำหรับกรณีทั่วไป ในปี 1955 Levi ได้พิสูจน์ว่า สำหรับรูปทรงนูนสองมิติ K ใด ๆ

$$\gamma(K) = \begin{cases} 4, & K \text{ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน} \\ 3, & \text{กรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

หลังจากมีข้อสรุปนี้ออกมาไม่นานนัก ในปี 1957 Hadwiger (รวมถึงในปี 1960 Gohberg และ Markus) ก็ได้ตั้งข้อคาดเดาว่า “สำหรับรูปทรงนูน n มิติ K ใด ๆ จะต้องมี $\gamma(K) \leq 2^n$ และอสมการนี้จะเป็นสมการก็ต่อเมื่อ K เป็นทรงลูกบาศก์หน้าขนาน”

ต่อไป เราจะแนะนำอีกรูปแบบหนึ่งของข้อคาดเดาของ Hadwiger ซึ่งถูกแนะนำโดย Boltjansky ในปี 1960

บทนิยาม 2.2 กำหนดให้ K เป็นรูปทรงนูน n มิติใด ๆ และ p เป็นจุดในปริภูมิ n มิติซึ่งไม่อยู่ใน K ให้ q เป็นจุดบนขอบของ K เราจะกล่าวว่า q *สามารถโดนจุด* p *ส่องสว่างได้* (หรือจุด p สามารถส่องสว่างจุด q ได้) ถ้าเส้นตรงที่ผ่าน p และ q ตัดกับ $Int(K)$ (นั่นคืออินเตอร์เซกกับ $Int(K)$ แล้วไม่เป็นเซตว่าง) แต่ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่าง p กับ q ไม่ตัดกับ $Int(K)$



รูปที่ 2.4 จุด p ส่องสว่างจุด y แต่ไม่ส่องสว่างจุด x และ z

เราจะใช้ $\iota(K)$ แทนจำนวนของจุดภายนอก K ที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้ที่สามารถใช้ในการส่องสว่างจุดขอบทุกจุดของ K ได้ และจะเรียก $\iota(K)$ ว่า "*จำนวนจุดส่องสว่าง*ของ K"

ถ้าดูผิวเผินจากบทนิยาม เราอาจจะรู้สึกว่า "จำนวนจุดส่องสว่าง" กับ "จำนวนตัวปิดทับ" ไม่น่าจะมีความเกี่ยวข้องอะไรกันมากนัก แต่ในความเป็นจริงแล้ว Boltjansky ได้ข้อสรุปที่น่าทึ่งว่า ในกรณีที่ K เป็นรูปทรงนูนใด ๆ แล้ว $\iota(K) = \gamma(K)$ ดังนั้น ถ้าเราใช้ "จำนวนจุดส่องสว่าง $\iota(K)$" แทน "จำนวนตัวปิดทับ $\gamma(K)$" เราก็จะได้ข้อคาดเดาอีกรูปแบบหนึ่งของข้อคาดเดาของ Hadwiger

ตอนนี้กลับมาที่ "จำนวนตัวบล็อก $\tau(K)$" ซึ่งเราได้นิยามไว้ในตอนต้นอีกครั้ง ที่จริงแล้วแนวความคิดของ "จำนวนตัวบล็อก" เกิดขึ้นในปี 1995 ซึ่ง Zong ได้นำไอเดียเกี่ยวกับตัวบล็อกมาใช้ในการศึกษาข้อคาดเดาของ Hadwiger

Zong ได้ใช้แนวความคิดคล้าย ๆ กับที่ใช้ในบทพิสูจน์ของ $\alpha(K) \leq 3^n - 1$ ในการศึกษาสมบัติของจำนวนตัวบล็อก $\tau(K)$ โดยเขาได้ค้นพบว่า $\tau(K) = \tau(D(K))$ (ซึ่งเราได้เคยกล่าวไปแล้วว่า เซตผลต่าง $D(K)$ จะต้องสมมาตรเทียบกับจุดศูนย์กลางเสมอ) หลังจากนั้น เขาได้ทำการศึกษา $\tau(K)$ ในกรณีที่ K เป็นรูปที่สมมาตรเทียบกับจุดศูนย์กลาง ซึ่งเขาได้ข้อสรุปว่า ถ้า C เป็นรูปทรงนูน n มิติซึ่งสมมาตรเทียบกับจุดศูนย์กลาง แล้ว $\gamma(C) \leq \tau(C)$ นอกจากนี้ สำหรับกรณีของรูปทรงนูนสองมิติ K ใด ๆ เขายังได้ด้วยว่า $\tau(K) = 4$ เสมอ

การคำนวณค่าของ $\tau(K)$ เมื่อกำหนดรูปทรงนูน K รูปหนึ่งมาให้นั้น โดยทั่วไปแล้วเป็นเรื่องที่ยากมาก ๆ อย่างไรก็ตาม สำหรับกรณีที่ $K = P$ เป็นทรงลูกบาศก์หน้าขนาน n มิติ Zong ได้แสดงว่า $\tau(P) = 2^n$ และในกรณีที่ K เป็นทรงสี่หน้า หรือรูปทรงแปดหน้า เขาได้ว่า $\tau(K) = 6$

กรณีที่ $K = B^n$ เป็นลูกบอล n มิติหนึ่งหน่วย เราได้กล่าวไปแล้วในตอนต้นว่า $\tau(B^2) = 4$ สำหรับกรณีที่ $n \geq 3$ Dalla, Larman, Mani-Levitska และ Zong ได้แสดงว่า $\tau(B^3) = 6$ และ $\tau(B^4) = 9$ นอกจากนี้ Zong ยังได้ข้อสรุปอีกว่า

$$\tau(B^n) \geq 2^{0.2075\ldots n(1+o(1))}$$

และเนื่องจาก เรามี $\tau(K) \leq \alpha(K)$ ดังนั้น

$$\alpha(B^n) \geq 2^{0.2075\ldots n(1+o(1))}$$

ซึ่งตรงกับข้อสรุปของ Wyner และ Shannon ที่กล่าวไว้ในหัวข้อที่แล้ว นอกจากนี้ ในปี 1996 Zong ยังค้นพบปรากฏการณ์ที่น่าประหลาดใจคือ เราสามารถหารูปทรงนูน n มิติ C ซึ่ง

$$\alpha(C) \geq 2^n > \alpha(B^n)$$

แต่ว่า

$$\tau(C) \leq 2n < 2^{0.2075\ldots n(1+o(1))} \leq \tau(B^n)$$

นั่นหมายความว่าจำนวนนิวตันของ C มากกว่าของ B^n แต่ว่าจำนวนตัวบล็อกของ C กลับน้อยกว่า B^n หรือพูดง่าย ๆ ก็คือ C สามารถสัมผัสกับตัวรอบข้างได้มากกว่า B^n แต่ว่าเวลาจะบล็อก กลับใช้จำนวนตัวที่น้อยกว่า ซึ่งเป็นข้อเท็จจริงที่ขัดกับความรู้สึกอย่างมาก

จากข้อสรุปต่าง ๆ ข้างต้น Zong ได้ตั้งข้อคาดเดาเกี่ยวกับจำนวนตัวบล็อกในกรณีทั่วไปไว้ว่า "สำหรับรูปทรงนูน n มิติ K ใด ๆ จะต้องสอดคล้อง $2n \leq \tau(K) \leq 2^n$"

เนื่องจาก Zong ได้แสดงแล้วว่า ในกรณีที่ $K = C$ เป็นรูปทรงนูนซึ่งสมมาตรเทียบกับจุดศูนย์กลาง จะต้องมี $\gamma(C) \leq \tau(C)$ เสมอ ดังนั้น ถ้าข้อคาดเดาของ Zong เป็นจริง เราก็จะได้ทันทีว่าข้อคาดเดาของ Hadwiger เป็นจริง สำหรับรูปทรงนูนที่สมมาตรเทียบกับจุดศูนย์กลางใด ๆ

3. สรุป

จากที่กล่าวมาทั้งหมด เราได้เห็นแล้วว่า ปัญหาง่าย ๆ อย่างเกมวางเหรียญสามารถนำเราไปสู่ข้อสรุปและทฤษฎีบททางเรขาคณิตที่น่าสนใจหลายอย่างด้วยกัน ซึ่งในบทความนี้ เราได้ศึกษาเกี่ยวกับบทนิยามของ "การบรรจุ" "การปิดทับ" "จำนวนนิวตันหรือจำนวนตัวสัมผัส" "จำนวนตัวบล็อก" และ "จำนวนจุดส่องสว่าง" รวมไปถึงข้อสรุปต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง อีกทั้งเรายังได้เห็นถึง

ปรากฏการณ์ทางเรขาคณิตบางอย่างที่น่าประหลาดใจ อย่างเช่น “การที่จำนวนตัวสัมผัสมีค่ามากกว่าไม่ได้หมายความว่าจำนวนตัวบล็อกจะต้องมากกว่า” และนี่ทำให้เราตระหนักได้ถึงความยากของการศึกษาปัญหาเหล่านี้ ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่า บทความนี้จะทำให้ผู้อ่านเห็นถึงความสวยงามของคณิตศาสตร์ และเป็นแรงบันดาลใจให้ผู้อ่านหันมาหลงรักในคณิตศาสตร์กันมากขึ้น

กิตติกรรมประกาศ

บทความนี้ขออุทิศแด่ศาสตราจารย์ Zong ผู้ซึ่งเป็นผู้ให้คำแนะนำและความช่วยเหลือแก่ข้าพเจ้าในแทบทุกด้าน ขณะที่ข้าพเจ้าศึกษาอยู่ ณ มหาวิทยาลัยปักกิ่ง

เอกสารอ้างอิง

[1] Brass, P., Moser, W. and Pach, J. (2005) *Research Problems in Discrete Geometry.* New York: Springer-Verlag.

[2] Boltjansky, V. G., Martini, H., and Soltan, P. (1997). *Excursions into Combinatorial Geometry.* Berlin: Springer.

[3] Böröczky, Jr. K. (2004). *Finite Packing and Covering.* Cambridge: Cambridge University Press.

[4] Dalla, L., Larman, D. G., Mani-Levitska, P. and Zong, C. M. (2000). *The Blocking Numbers of Convex Bodies.* Discrete Comput. Geom., 24: 267 - 277.

[5] Eckard, S. (2011). *The Best-Known Packings of Equal Circles in a Square.* Retrieved November 20, 2018, from http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/packing/csq/csq.html.

[6] Eckard, S. (2014). *The Best-Known Packings of Equal Circles in a Circle.* Retrieved November 20, 2018, from http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/packing/ccinew/cci.html

[7] Gohberg, I. Ts. and Markus, A. S. (1960). *A certain problem about the covering of convex sets with homothetic ones*. Izvestiya Moldavskogo Filiala Akademii Nauk SSSR (In Russian).

[8] Grünbaum, B. (1963). *Borsuk's Problem and Related Questions.* Proc. Symp. Pure Math., 7: 271 - 283.

[9] Levenshtein, V. I. (1979). *On Bounds for Packings in n-dimensional Euclidean Space.* Dokl. Akad. Nauk SSSR 245, 6: 1299 - 1303 (in Russian).

[10] Levi, F. W. (1955). *Überdeckung eines Eibereiches durch Parallelverschiebungen seines offenen Kerns.* Archiv der Mathematik, 6 (5): 369 - 370.

[11] Musin, O. R. (2008). *The Kissing Number in Four Dimensions.* Ann. Math. (2) 168: 1 - 32.

[12] Shannon, C. E. (1959). *Probability of Error for Optimal Codes in a Gaussian Channel.* Bell System Tech. J., 38: 611 - 656.

[13] Odlyzko, A. M. and Sloane, N. J. A. (1979). *New Bounds on the Number of Unit Spheres that can touch a Unit Sphere in n dimensions.* J. Comb. Theory Ser. A, 26: 210 - 214.

[14] Wyner, J. M. (1965). *Capabilities of Bounded Discrepancy Decoding.* Bell System Tech. J., 44: 1061 - 1122.

[15] Yu, L. and Zong, C. M. (2009). *On the Blocking Number and the Covering Number of a Convex Body.* Adv. Geom., 9: 13 - 29.

[16] Zong, C. M. (1996). *Strange Phenomena in Convex and Discrete Geometry.* New York: Springer.

[17] Zong, C. M. (1999). *Sphere Packings.* New York: Springer.

[18] Zong, C. M. (2006). *What is Known about Unit Cubes.* Bull. Amer. Math. Soc., 39: 533 - 555.

[19] Zong, C. M. (2006). *The Cube: A Window to Convex and Discrete Geometry.* Cambridge: Cambridge University Press.

[20] Zong, C. M. (2008). *The Kissing Numbers, Blocking Numbers and Covering Numbers of a Convex Body.* Contemp. Math., 453: 529 - 548.