วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh 64(687) มกราคม – เมษายน 2562
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

การสร้างอัตราส่วนทอง และ การเกิดอัตราส่วนทองจากการซ้อนทับกันของเหรียญ 25 สตางค์ และเหรียญ 5 บาท

A construction of Golden Ratio and the Existence of The Golden Ratio from Overlapping of 25 Satang and 5 Bath Coins

อรรณพ แก้วขาว และ ลลิตา ตันวงค์ษา
Annop Kaewkhao[1] and Lalita Tanwongsa[2]

[1,2]Department of Mathematics, Faculty of Science,
Burapha University, ChonBuri 20131

Email: [1]tor_idin@buu.ac.th

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการแบ่งและการสร้างอัตราส่วนทองหลาย ๆ วิธี รวมถึงนำเสนอการเกิดอัตราส่วนทองที่พบเห็นได้จากการซ้อนทับของเหรียญ 25 สตางค์ และเหรียญ 5 บาท

คำสำคัญ: อัตราส่วนทอง ภาคตัดทอง

ABSTRACT

In this article, we present several methods in constructing the golden ratio. Moreover, the existence of the golden ratio that is found from overlapping of 25 satang and 5 baht coins is shown.

Keywords: Golden ratio, Golden section

1. บทนำ

อัตราส่วนทอง เป็นค่าคงตัวค่าหนึ่งที่ปรากฏในธรรมชาติสามารถพบเห็นได้ทั่วไป แม้แต่ในร่างกายมนุษย์ เช่น ระยะจากศีรษะถึงพื้นต่อระยะจากสะดือถึงพื้น ระยะจากไหล่ถึงปลายนิ้วมือต่อระยะจากข้อศอกถึงปลายนิ้วมือ หรือระยะจากสะโพกถึงพื้นต่อระยะจากหัวเข่าถึงพื้น ในธรรมชาติ เช่น อัตราส่วนเส้นผ่านศูนย์กลางของวงขดเกลียวของเมล็ดดอกทานตะวันแต่ละวงเทียบกับวงถัดไป ในงานสถาปัตยกรรม เช่น สัดส่วนบนวิหารพาร์เธนอน ไม่เว้นแต่ภาพวาดโมนาลิซ่าของดาวินชีอันโด่งดังก็ล้วนแล้วแต่แฝงด้วยอัตราส่วนทอง นอกจากนี้ยังพบอัตราส่วนทองในทางคณิตศาสตร์ เช่น ความสัมพันธ์ในลำดับฟีโบนักชี รวมไปถึงงานออกแบบต่างๆ ในปัจจุบันนักออกแบบบางท่านยังคงนำอัตราส่วนทองไปช่วยออกแบบ ซึ่งเชื่อว่าจะทำให้งานออกแบบนั้นดูโดดเด่นยาวนาน

เมื่อกำหนดให้ P เป็นจุดบนส่วนของเส้นตรง AB ดังรูปที่ 1.1

รูปที่ 1.1 จุดแบ่งบนส่วนของเส้นตรง

เราจะกล่าวว่า P แบ่งส่วนของเส้นตรง AB ออกเป็น “อัตราส่วนทอง” (Golden ratio) หรือ “ภาคตัดทอง” (Golden section) ก็ต่อเมื่อ $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AP}} = \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}$

นั่นคือ $(\mathrm{AP})^2 = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{PB}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}(\mathrm{AP})^2 &= \mathrm{AB} \cdot \mathrm{PB} \\ (\mathrm{AP})^2 &= (\mathrm{AP} + \mathrm{PB}) \cdot \mathrm{PB} \\ (\mathrm{AP})^2 - (\mathrm{PB})^2 - \mathrm{AP} \cdot \mathrm{PB} &= 0 \\ \left(\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\right)^2 - \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}} - 1 &= 0\end{aligned}$$

จะได้ว่า อัตราส่วนทอง คือ $\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

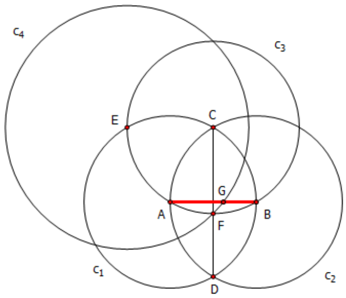
นักคณิตศาสตร์ผู้หลงใหลในเรขาคณิตตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบันให้ความสนใจกับอัตราส่วนทอง ใน 3 ลักษณะ คือ 1). การแบ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ออกเป็นอัตราส่วนทอง 2). การสร้างอัตราส่วนทอง และ 3). การค้นหาการมีอยู่ของอัตราส่วนทอง ในบทความนี้จะนำเสนอการแบ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนด การสร้าง รวมถึงการปรากฏของอัตราส่วนทองจากการซ้อนทับของเหรียญ 25 สตางค์ และเหรียญ 5 บาท โดยที่ขอบของเหรียญสัมผัสกัน

เพื่อความสะดวกของการเขียนบทความนี้ ผู้เขียนจะใช้สัญลักษณ์ AB เพียงสัญลักษณ์เดียวในการกล่าวถึงส่วนของเส้นตรง AB ($\overline{\mathrm{AB}}$) เส้นตรง AB ($\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$) รวมถึงขนาดของ AB ($|\mathrm{AB}|$) โดยให้ผู้อ่านพิจารณาตามแต่ละบริบทนั้น ๆ

2. การแบ่งส่วนของเส้นตรง

การแบ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดออกเป็นอัตราส่วนทองนั้นจะให้ความสำคัญกับวิธีการแบบเรขาคณิตดั้งเดิม นั่นคือการใช้เพียงสันตรงและวงเวียนเท่านั้น ซึ่งในหัวข้อนี้จะนำเสนอวิธีการของ Hofstetter 3 วิธี พร้อมพิสูจน์ให้เห็นว่าวิธีการในแต่ละขั้นตอนเหล่านี้ทำให้สามารถแบ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดออกเป็นอัตราส่วนทอง

<u>วิธีที่ 1</u> ในปี ค.ศ. 2003 Hofstetter [3] ได้แสดง ขั้นตอนในการแบ่งส่วนของเส้นตรง AB ที่กำหนดออกเป็นอัตราส่วนทอง ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 การแบ่งส่วนของเส้นตรงวิธีที่ 1

ขั้นที่ 1 สร้างวงกลม C_1 จุดศูนย์กลาง A รัศมี AB

ขั้นที่ 2 สร้างวงกลม C_2 จุดศูนย์กลาง B รัศมี BA ตัดวงกลม C_1 ที่จุด C และ D

ขั้นที่ 3 สร้างวงกลม C_3 จุดศูนย์กลาง C รัศมี CA ตัดวงกลม C_1 ที่จุด E

ขั้นที่ 4 ลากส่วนของเส้นตรง CD ตัดวงกลม C_3 ที่จุด F

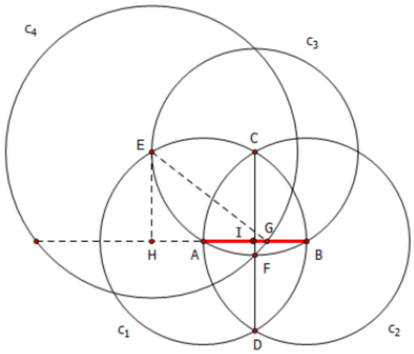
ขั้นที่ 5 สร้างวงกลม C_4 จุดศูนย์กลาง E รัศมี EF ตัด AB ที่จุด G

จะได้ว่า จุด G แบ่งส่วนของเส้นตรง AB ออกเป็นอัตราส่วนทอง

บทพิสูจน์ โดยไม่เสียนัยทั่วไปให้ $\mathrm{AB} = 1$

ให้ I เป็นจุดตัดของส่วนของเส้นตรง AB และ CD ดังรูปที่ 2.2

พิจารณา ΔAIC โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ $CI = \frac{\sqrt{3}}{2}$



รูปที่ 2.2 ประกอบการพิสูจน์การแบ่งวิธีที่ 1

เนื่องจาก $CD = 2CI$ ดังนั้น $CD = \sqrt{3}$

พิจารณา ΔECF เนื่องจาก C เป็นจุดศูนย์กลางวงกลม จะได้ $CF = EC = 1$

และ ΔECF เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ $EF = \sqrt{2}$

เนื่องจาก $EG = EF$ ดังนั้น $EG = \sqrt{2}$

ให้ H เป็นจุดบน AB ที่ทำให้ EH ตั้งฉากกับ AB

เนื่องจาก $AB = 1 = EC$ จะได้ $HA = \frac{1}{2}$

พิจารณา ΔEHG โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะได้ $HG = \frac{\sqrt{5}}{2}$

จะได้ $AG = HG - HA = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

นั่นคือ $\frac{AG}{BG} = \frac{AG}{AB-AG} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \div \left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \div \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\square$

<u>วิธีที่ 2</u> ในปี ค.ศ. 2004 Hofstetter [4] ได้แสดงขั้นตอนอีกวิธีหนึ่งในการแบ่งส่วนของเส้นตรง AB ที่กำหนดออกเป็นอัตราส่วนทอง ดังรูปที่ 2.3

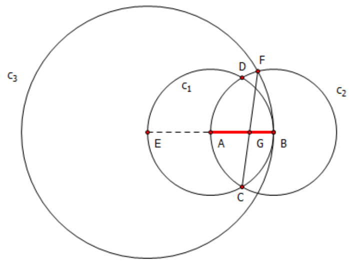
ขั้นที่ 1 สร้างวงกลม C_1 จุดศูนย์กลาง A รัศมี AB

ขั้นที่ 2 สร้างวงกลม C_2 จุดศูนย์กลาง B รัศมี BA ตัดวงกลม C_1 ที่จุด C และ D

ขั้นที่ 3 ต่อส่วนของเส้นตรง AB พบวงกลม C_1 ที่จุด E

ขั้นที่ 4 สร้างวงกลม C_3 จุดศูนย์กลาง E รัศมี EB ตัดวงกลม C_2 ที่จุด F

ขั้นที่ 5 ลากส่วนของเส้นตรง CF ตัดเส้นตรง AB ที่จุด G

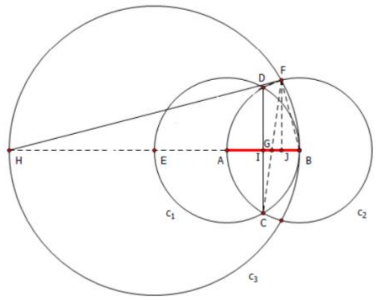


รูปที่ 2.3 การแบ่งส่วนของเส้นตรงวิธีที่ 2

จะได้จุด G แบ่งส่วนของเส้นตรง AB ออกเป็นอัตราส่วนทอง

บทพิสูจน์ โดยไม่เสียนัยทั่วไปให้ $\mathrm{AB} = 1$

ต่อ BA ตัดวงกลม C_3 ที่จุด H ดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 ประกอบการพิสูจน์การแบ่งวิธีที่ 2

ให้ CD ตัด AB ที่จุด I และ J เป็นจุดบน IB ที่ทำให้ $\mathrm{JF} \perp \mathrm{IB}$

ดังนั้น $\Delta\mathrm{FBH} \sim \Delta\mathrm{JBF}$ จะได้ $\frac{\mathrm{FB}}{\mathrm{JB}} = \frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BF}}$ นั่นคือ $\mathrm{JB} = \frac{\mathrm{BF}^2}{\mathrm{BH}}$

จาก $\mathrm{AB} = 1$ ดังนั้น $\mathrm{BF} = 1$ และ $\mathrm{BH} = 4$

จะได้ $\mathrm{JB} = \frac{1}{4}$ ดังนั้น $\mathrm{IJ} = \frac{1}{4}$

พิจารณา $\Delta\mathrm{BJF}$ โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ $\mathrm{JF} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

พิจารณา $\Delta\mathrm{AIC}$ โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ $\mathrm{IC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

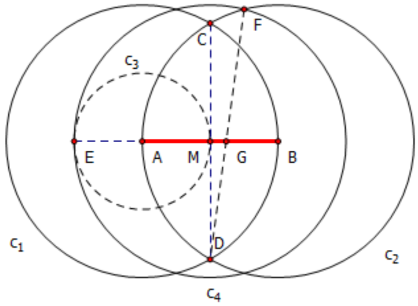
เนื่องจาก $\Delta\mathrm{IGC} \sim \Delta\mathrm{JGF}$ จะได้ $\frac{\mathrm{IG}}{\mathrm{GJ}} = \frac{\mathrm{IC}}{\mathrm{JF}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

ดังนั้น $\frac{\mathrm{IG}}{\mathrm{IJ}} = \frac{2}{2+\sqrt{5}}$ จะได้ $\mathrm{IG} = \frac{\sqrt{5}-2}{2}$

จะได้ $\mathrm{AG} = \mathrm{AI} + \mathrm{IG} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

ดังนั้น $\frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{BG}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\square$

<u>วิธีที่ 3</u> ปี ค.ศ. 2005 Hofstetter [5] ได้แสดงการแบ่งส่วนของเส้นตรง AB ที่กำหนดออกเป็นอัตราส่วนทองโดยการใช้วงเวียนและสันตรง ดังรูปที่ 2.5 โดยมีขั้นตอนดังนี้



รูปที่ 2.5 การแบ่งส่วนของเส้นตรงวิธีที่ 3

ขั้นที่ 1. สร้างวงกลม C_1 จุดศูนย์กลาง A รัศมี AB

ขั้นที่ 2. สร้างวงกลม C_2 จุดศูนย์กลาง B รัศมี BA ตัดวงกลม C_1 ที่จุด C และ D

ขั้นที่ 3. ให้ M เป็นจุดกึ่งกลางส่วนของเส้นตรง AB สร้างวงกลม C_3 จุดศูนย์กลาง A รัศมี AM ต่อ AM พบวงกลม C_3 ที่จุด E

ขั้นที่ 4. สร้างวงกลม C_4 จุดศูนย์กลาง M รัศมี ME ตัดวงกลม C_2 ที่จุด F

ขั้นที่ 5. ลากส่วนของเส้นตรง DF ตัดส่วนของเส้นตรง AB ที่จุด G

จะได้จุด G แบ่งส่วนของเส้นตรง AB ออกเป็นอัตราส่วนทอง

บทพิสูจน์ โดยไม่เสียนัยทั่วไปให้ $\mathrm{AB} = 4$

ให้ K เป็นจุดกึ่งกลางของ BM ดังรูป 2.6 เนื่องจาก $\mathrm{BF} = \mathrm{FM}$ จะได้ $\mathrm{FK} \perp \mathrm{AB}$

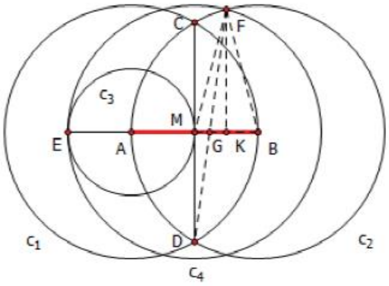
จาก $\mathrm{AB} = 4$ จะได้ $\mathrm{FM} = \mathrm{BF} = 4 \quad \mathrm{AM} = \mathrm{BM} = 2$ และ $\mathrm{KM} = \mathrm{BK} = 1$

พิจารณา $\Delta\mathrm{BKF}$ โดยทฤษฎีบทของพีทาโกรัส จะได้ $KF = \sqrt{15}$

พิจารณา $\Delta\mathrm{BMD}$ เนื่องจาก $\mathrm{BM} = 2$ และ $\mathrm{BD} = 4$ โดยทฤษฎีบทของพีทาโกรัส จะได้ $\mathrm{DM} = \sqrt{12}$

เนื่องจาก $\Delta\mathrm{GMD} \sim \Delta\mathrm{GKF}$ จะได้ $\frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{GK}} = \frac{\mathrm{DM}}{\mathrm{KF}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

ดังนั้น $\mathrm{GM} = \frac{2\mathrm{GK}}{\sqrt{5}}$ และ $\mathrm{GK} = \frac{\sqrt{5}\mathrm{GM}}{2}$



รูปที่ 2.6 ประกอบการพิสูจน์การแบ่งวิธีที่ 3

เนื่องจาก $\mathrm{GM} + \mathrm{GK} = \mathrm{KM} = 1$ จะได้ $\mathrm{GM} = 1 - \mathrm{GK}$ และ $\mathrm{GK} = 1 - \mathrm{GM}$

จะได้ $\mathrm{GM} = \frac{2}{\sqrt{5}+2}$ และ $GK = 5 - 2\sqrt{5}$

จาก $\mathrm{AG} = \mathrm{AM} + \mathrm{GM}$ และ $\mathrm{BG} = \mathrm{GK} + \mathrm{BK}$ ดังนั้น $\frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{BG}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ □

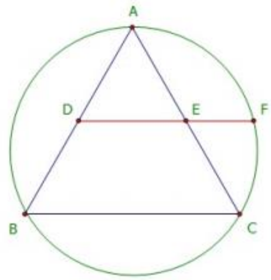
ยังมีนักเรขาคณิตอีกหลายท่านที่พยายามหาวิธีการแบ่งส่วนของเส้นตรงออกเป็นอัตราส่วนทอง ซึ่งผู้สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากวารสาร Forum Geometry ซึ่งเป็นวารสารที่นำเสนองานวิจัยทางด้านเรขาคณิต

3. การสร้าง

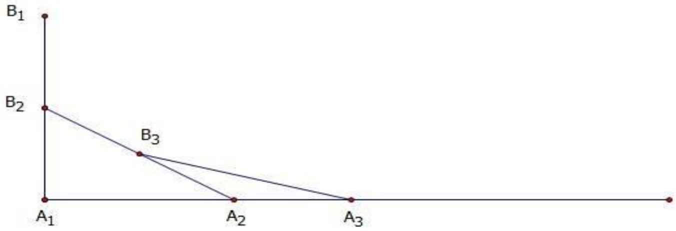
หัวข้อนี้จะนำเสนอการสร้างอัตราส่วนทองในบางลักษณะซึ่งจะละการพิสูจน์ไว้ ซึ่งเป็นการสร้างอัตราส่วนทองแบบดั้งเดิมนั่นคือจะสนใจการสร้างโดยใช้เพียงสันตรง และวงเวียนเท่านั้นผู้สนใจสามารถศึกษาได้ตามรายการเอกสารอ้างอิง ซึ่งผู้อ่านควรสังเกตว่าการสร้างอัตราส่วนทองนั้นไม่จำเป็นต้องกำหนดส่วนของเส้นตรงมาก่อน

ในปี ค.ศ. 2002 Hofstetter [2] ได้นำเสนอการสร้างอัตราส่วนทอง ดังนี้ กำหนดให้ $\Delta\mathrm{ABC}$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จุด D และ E เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AB และ AC ตามลำดับ ลากส่วนเส้นตรง DE ตัดวงกลมล้อมรอบ $\Delta\mathrm{ABC}$ ที่จุด F และ G ดังรูปที่ 3.1 จะได้ว่า จุด E แบ่ง DF ออกเป็นอัตราส่วนทอง

ในปี ค.ศ. 2011 Niemeyer [7] ได้นำเสนอการสร้างอัตราส่วนทองโดยใช้ส่วนของเส้นตรงสามเส้นดังนี้ กำหนดส่วนของเส้นตรง $\mathrm{A_1B_1}, \mathrm{A_2B_2}, \mathrm{A_3B_3}$ มีความยาวเท่ากัน วาง $\mathrm{A_1B_1}$ โดยปลาย $\mathrm{A_1}$ ตั้งฉากกับแนวราบ จากนั้นวาง $\mathrm{A_2B_2}$ โดยให้ปลาย $\mathrm{B_2}$ อยู่ที่จุดกึ่งกลางของ $\mathrm{A_1B_1}$ และ วาง $\mathrm{A_3B_3}$ โดยให้ปลาย $\mathrm{B_3}$ อยู่ที่จุดกึ่งกลางของ $\mathrm{A_2B_2}$ ดังรูปที่ 3.2 จะได้ว่า $\mathrm{A_2}$ แบ่ง $\mathrm{A_1A_3}$ ออกเป็นอัตราส่วนทอง

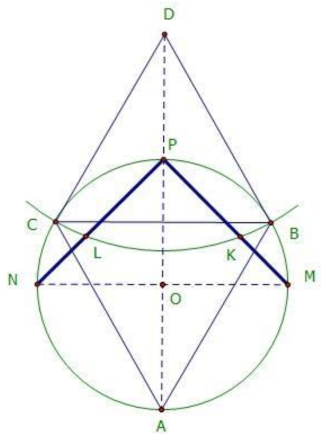


รูปที่ 3.1 การสร้างอัตราส่วนทองของ Hofstetter [2]



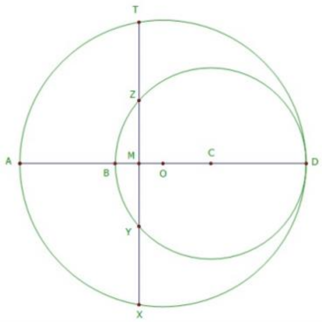
รูปที่ 3.2 การสร้างอัตราส่วนทองของ Niemeyer [7]

ในปี ค.ศ. 2015 Hung [6] นำเสนอการสร้างอัตราส่วนทองจากวงกลมล้อมรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า โดย กำหนด ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามี MN เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางวงกลมล้อม ΔABC ที่ขนานกับ BC ต่อ AD ตั้งฉากกับ MN ตัดวงกลมล้อมที่จุด P ซึ่ง $AD = \frac{3}{2}MN$ ถ้าวงกลมจุดศูนย์กลาง D รัศมี DC ตัด NP และ MP ที่จุด L และ K ตามลำดับ ดังรูปที่ 3.3 จะได้ว่า L แบ่ง NP และ K แบ่ง MP ออกเป็นอัตราส่วนทอง



รูปที่ 3.3 การสร้างอัตราส่วนทองของ Hung [6]

ในปี ค.ศ. 2008 Dung [1] นำเสนอการสร้างอัตราส่วนทองจากวงกลมสองวงที่ซ้อนทับกันภายใต้เงื่อนไขบางประการของวงกลม กล่าวคือ กำหนดให้ O เป็นจุดกึ่งกลางของ AD และ C เป็นจุดบน OD วงกลมจุดศูนย์กลาง C รัศมี CD ตัด AD ที่จุด B และ M เป็นจุดกึ่งกลางของ BO เส้นตั้งฉากกับ AD ที่จุด M ตัดวงกลมจุดศูนย์กลาง C ที่จุด Z และ Y และตัดวงกลมจุดศูนย์กลาง O รัศมี OD ที่จุด T และ X ดังรูปที่ 3.4 ถ้า $\frac{DC}{DA} = \frac{1}{3}$ จะได้ว่า Z แบ่ง TX ออกเป็นอัตราส่วนทอง



รูปที่ 3.4 การสร้างอัตราส่วนทองของ Dung [1]

4. การซ้อนทับของเหรียญ 25 สตางค์ และเหรียญ 5 บาท

การเกิดขึ้นของอัตราส่วนทอง ที่เราสามารถพบเห็นได้มีอยู่หลากหลาย ในส่วนนี้จะแสดงให้เห็นการเกิดของอัตราส่วนทองจากการซ้อนทับของเหรียญ 25 สตางค์ และเหรียญ 5 บาท โดยส่วนของขอบเหรียญ 25 สตางค์ สัมผัสกับขอบเหรียญ 5 บาท ดังรูปที่ 4.1

รูปที่ 4.1 การซ้อนทับของเหรียญ 25 สตางค์ และเหรียญ 5 บาท

เราพบว่าการซ้อนทับกันของเหรียญทั้งสองเหรียญในลักษณะนี้นั้น เกิดอัตราส่วนทองขึ้นอย่างน่าประหลาดใจ ซึ่งการค้นพบนี้อาศัยจากข้อมูลของสำนักกษาปณ์ กรมธนารักษ์ กระทรวงการคลัง ดังรูปที่ 4.2

สำนักกษาปณ์
www.royalthaimint.net

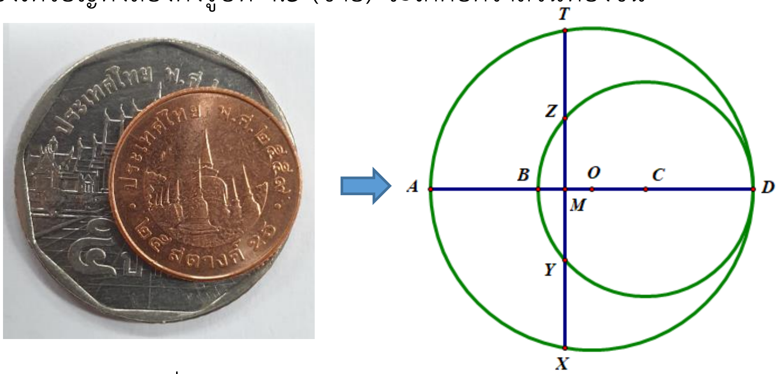
เกี่ยวกับสำนักกษาปณ์ | ข่าวสาร | ผลิตภัณฑ์ | ขั้นตอนการผลิต | การให้บริการ | ความรู้เรื่องกษาปณ์ | ศูนย์การเรียนรู้

ผลิตภัณฑ์ >> เหรียญกษาปณ์หมุนเวียน

5 บาท		พระอุโบสถ วัดเบญจมบพิตรดุสิตวนาราม	คิวโปรนิกเกิลสอดไส้ทองแดง (Cupronickel clad copper)	24	6.0
25 สตางค์		พระบรมธาตุเจดีย์ นครศรีธรรมราช จ.นครศรีธรรมราช	ทองแดงชุบเคลือบไส้เหล็ก (Copper plated steel)	16	1.9

รูปที่ 4.2 ข้อมูลของสำนักกษาปณ์ กรมธนารักษ์ กระทรวงการคลัง

จากข้อมูลพบว่าขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางเหรียญ 25 สตางค์ และเหรียญ 5 บาทเป็น 16 มิลลิเมตร และ 24 มิลลิเมตร ตามลำดับ อัตราส่วนของเส้นผ่านศูนย์กลางของเหรียญ 25 สตางค์ต่อเส้นผ่านศูนย์กลางของเหรียญ 5 บาท เป็น **2 : 3** ซึ่งอัตราส่วนนี้สอดคล้องกับงานวิจัยของ Dung [1] ดังนั้นการซ้อนทับกันของเหรียญทั้งสองดังรูปที่ 4.3 (ซ้าย) จะเกิดอัตราส่วนทองขึ้น



รูปที่ 4.3 อัตราส่วนทองที่เกิดจากการซ้อนทับกันของเหรียญ 25 สตางค์ และ 5 บาท

บทพิสูจน์ ให้จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของเหรียญ 5 บาท

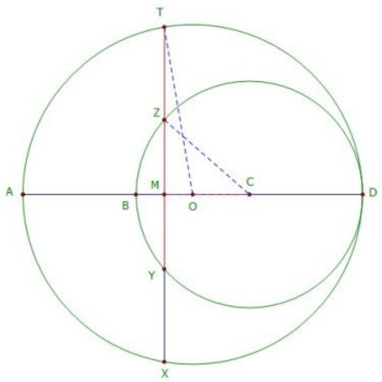
จุด C เป็นจุดศูนย์กลางของเหรียญ 25 สตางค์ และ เหรียญทั้งสองสัมผัสกันที่จุด D

จุด B และจุด A เป็นจุดบนขอบเหรียญ 25 สตางค์ และขอบของเหรียญ 5 บาท ที่ตรงข้ามกับจุด D

จุด M เป็นจุดกึ่งกลางของ OB

เส้นตั้งฉากที่จุด M ตัดขอบเหรียญ 25 สตางค์ ที่จุด Z และ Y และตัดขอบเหรียญ 5 บาท ที่จุด T และ X ดังรูปที่ 4.3 (ขวา)

จากเส้นผ่านศูนย์กลางเหรียญ 25 สตางค์ และเหรียญ 5 บาทเป็น 16 มิลลิเมตร และ 24 มิลลิเมตร ตามลำดับ จะได้ว่า $\frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{DA}} = \frac{1}{3}$



รูปที่ 4.4 ประกอบการพิสูจน์การซ้อนทับกันของเหรียญ 25 สตางค์ และ 5 บาท

โดยไม่เสียนัยทั่วไป ให้ $\mathrm{AD} = 3,\ \mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CD} = \mathrm{CZ} = 1$

เนื่องจาก O และ M เป็นจุดกึ่งกลางของ AD และ BO ตามลำดับ จะได้ $\mathrm{CM} = \frac{3}{4}$

พิจารณา $\Delta\mathrm{CMZ}$ โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ $\mathrm{ZM} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

เนื่องจาก $\mathrm{YZ} = 2\mathrm{ZM}$ จะได้ $\mathrm{YZ} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

พิจารณา $\Delta\mathrm{OMT}$ เนื่องจาก $\mathrm{AD} = 3$ จะได้ $\mathrm{OT} = \frac{3}{2}$ โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ $\mathrm{MT} = \frac{\sqrt{35}}{4}$

เนื่องจาก $\mathrm{TZ} = \mathrm{TM} - \mathrm{MZ}$ จะได้ $\mathrm{TZ} = \frac{\sqrt{35}-\sqrt{7}}{4}$

ดังนั้น $\frac{\mathrm{YZ}}{\mathrm{TZ}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{35}-\sqrt{7}} \ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

นั่นคือ Z แบ่ง TY ออกเป็นอัตราส่วนทอง ☐

5. ข้อเสนอแนะ

การนำเสนองานวิจัยต่าง ๆ เกี่ยวกับอัตราส่วนทองนี้ ผู้เขียนหวังว่าจะเป็นการจุดประกายให้กับนักเรียน นักศึกษา ตลอดจนครูอาจารย์ให้หันมาสนใจค้นหาวิธีสร้าง วิธีการแบ่ง ตลอดจนค้นหาการปรากฏของอัตราส่วนทองด้วยวิธีการของตนเอง เพื่อการพัฒนาองค์ความรู้ ตลอดจนค้นหาความงามทางเรขาคณิตต่อไป

เอกสารอ้างอิง

[1] Dung, N.T. (2008). Golden ratio with two unequal circles and a line II. Retrieved January 31, 2018, from http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/TwoUnequalCirclesAndLine2.shtml.

[2] Hofstetter, K. (2002). A simple construction of the golden section. *Forum Geom*, 2, p. 65 – 66.

[3] Hofstetter, K. (2003). A 5-step division of a segment in the golden section. *Forum Geom*, 3, p. 205 – 206.

[4] Hofstetter, K. (2004). Another 5-step division of a segment in the golden section. *Forum Geom*, 4, p. 21 – 22.

[5] Hofstetter, K. (2005). Divison of a segment in the golden section with ruler and rusty compass. *Forum Geom*, 5, p. 135 – 136.

[6] Hung, T. Q. (2015). The golden section in the inscribed square of an isosceles right triangle. *Forum Geom*, 15, p. 91– 92.

[7] Nniemeyer, J. (2011). A simple construction of the golden section, *Forum Geom*, 11, p. 53.