วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh 63(696) กันยายน – ธันวาคม 2561
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

ปัญหาเรขาคณิตกับเกมวางเหรียญ ตอนที่ 1

Some Geometric Problems Related to Faustian Round Table Coin Game (1)

กีรติ ศรีอมร
Kirati Sriamorn

Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science,
Chulalongkorn University, Patumwan, Bangkok, 10330, Thailand

Email: Kirati.S@chula.ac.th

บทคัดย่อ

ในบทความนี้ เราจะแนะนำเกมหนึ่ง ซึ่งเป็นที่รู้จักกันในชื่อ “เกมวางเหรียญบนโต๊ะกลม” อีกทั้ง เราจะกล่าวถึงปัญหาทางเรขาคณิตต่าง ๆ ที่ตามมา ซึ่งปัญหาเหล่านี้จะนำไปสู่ทฤษฎีบทที่สำคัญหลากหลายทฤษฎีบทในสาขาของเรขาคณิตวิยุต โดยเราจะให้คำนิยามของ “การบรรจุ” “การปิดทับ” “จำนวนนิวตัน (หรือจำนวนตัวสัมผัส)” “จำนวนตัวบล็อก” และ “จำนวนจุดส่องสว่าง” รวมไปถึง แนะนำข้อสรุปสำคัญ ๆ ที่เกี่ยวข้องกับคำนิยามเหล่านี้ โดยจุดมุ่งหมายของบทความนี้ เพื่อนำเสนอคำศัพท์และแนวคิดพื้นฐาน ซึ่งใช้กันอย่างแพร่หลายในสาขาของเรขาคณิตวิยุต รวมถึงกระตุ้นให้บุคคลทั่วไปมีความเข้าใจและสนใจในสาขานี้มากขึ้นอีกด้วย

คำสำคัญ: การบรรจุ การปิดทับ จำนวนนิวตัน จำนวนตัวสัมผัส จำนวนตัวบล็อก จำนวนจุดส่องสว่าง ข้อคาดเดาของ Hadwiger ข้อคาดเดาของ Zong

ABSTRACT

In this article, we introduce a game, called Faustian round table coin game, and ask some questions related to this game. In addition, we give the definitions of related terms, e.g. packings, coverings, Newton numbers (or kissing numbers), blocking numbers and numbers of light-sources. Furthermore, we show the results related to these concepts. The goal of this article is to present some basic concepts and tools widely used in discrete geometry.

Keywords: Packing, covering, Newton number, Kissing number, Blocking number, Number of light-source, Hadwiger's conjecture, Zong's conjecture

1. บทนำ

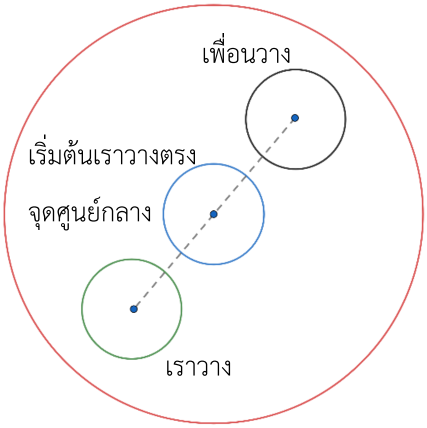
สมัยที่สมาร์ทโฟนยังไม่แพร่หลาย เรามักจะตื่นเต้นกับการสรรหาเกมต่าง ๆ มาเล่นกับเพื่อน ๆ ที่โรงเรียน เพื่อเป็นการคั่นเวลาระหว่างพัก ซึ่งมีตั้งแต่เกมที่ไม่ได้ใช้ความคิดอะไรมากนัก เช่น กระโดดเชือก กระต่ายขาเดียว แปะแข็ง โมราเรียกชื่อ หมากเก็บ ไปจนถึงเกมที่ใช้ความคิดมากขึ้น อย่างเช่น หมากรุก หมากฮอส หมากข้าม เป็นต้น

ในที่นี้ เราจะขอแนะนำเกมหนึ่งที่สามารถนำไปเล่นกับเพื่อน ๆ ในยามว่างได้ โดยเกมนี้เป็นที่รู้จักกันในชื่อ "เกมวางเหรียญบนโต๊ะกลม" (Faustian round table coin game) ซึ่งอุปกรณ์ในการเล่นประกอบด้วย โต๊ะกลมหนึ่งตัว และเหรียญที่มีขนาดเท่ากันจำนวนหนึ่ง (มากพอที่จะวางได้เต็มโต๊ะ) โดยวิธีการเล่นคือ ผู้เล่นแต่ละคนจะผลัดกันวางเหรียญทีละเหรียญลงไปบนโต๊ะที่เตรียมไว้ โดยห้ามขยับ วางทับเหรียญที่วางไว้แล้วก่อนหน้า หรือห้ามส่วนใดส่วนหนึ่งของเหรียญอยู่นอกโต๊ะ ซึ่งใครก็ตามที่ไม่สามารถวางเหรียญลงบนโต๊ะได้เป็นคนแรกก็จะเป็นฝ่ายแพ้ไป

คำถามคือ ในกรณีที่เราเล่นกันเพียงสองคนกับเพื่อน จะมีกลยุทธ์ดี ๆ ในการเอาชนะเพื่อนได้เสมอหรือไม่ และกลยุทธ์ที่ว่านั้นเป็นอย่างไร

คำตอบคือ ในกรณีที่เราเป็นคนเริ่มวางเป็นคนแรก เราจะมีวิธีที่สามารถเอาชนะเพื่อนของเราได้เสมอ (ถ้าโต๊ะใหญ่พอที่จะวางเหรียญแรกได้) โดยวิธีการคือ เราจะวางเหรียญแรกให้จุดศูนย์กลางของเหรียญอยู่ที่จุดศูนย์กลางของโต๊ะ หลังจากนั้น ไม่ว่าเพื่อนจะวางเหรียญที่จุดใด เราจะทำการวางเหรียญตรงตำแหน่งที่สะท้อนเทียบกับจุดศูนย์กลางมาจากตำแหน่งที่เพื่อนวาง (รูปที่ 1.1) เนื่องจาก

โต๊ะที่เราใช้เป็นรูปวงกลม ดังนั้น ตราบใดที่เพื่อนของเราสามารถวางเหรียญได้ เราก็จะสามารถวางเหรียญตามวิธีดังกล่าวได้เสมอ ซึ่งนั่นหมายความว่า เพื่อนของเราจะต้องเป็นฝ่ายจนมุมก่อนอย่างแน่นอน



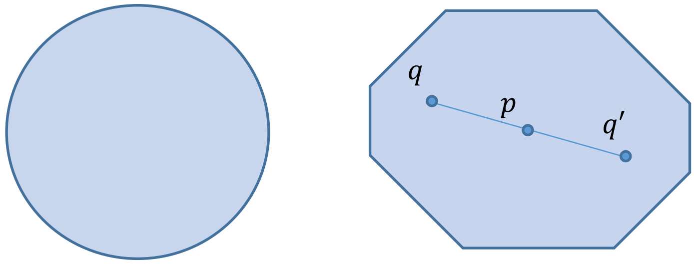
รูปที่ 1.1 เราสามารถวางตรงตำแหน่งที่สมมาตรกับตำแหน่งที่เพื่อนวางได้เสมอ

2. ปัญหาทางเรขาคณิตที่เกี่ยวข้องกับเกมวางเหรียญ

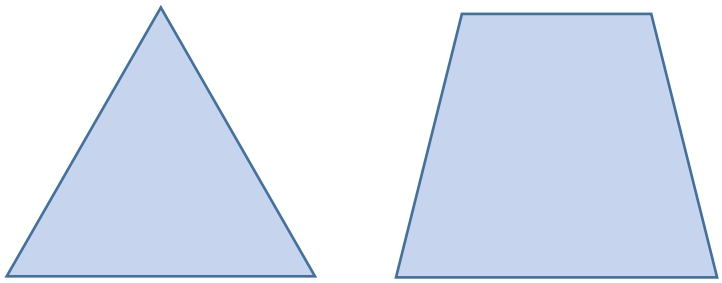
จากปัญหาเกมวางเหรียญ (พิจารณาเฉพาะกรณีที่เล่นกันสองคน) เราอาจจะเกิดคำถามขึ้นได้ว่า "ถ้าเปลี่ยนโต๊ะเป็นรูปทรงอื่น ๆ ที่ไม่ใช่วงกลม แล้วเราจะยังมีกลยุทธ์ดี ๆ ไว้เอาชนะเพื่อนของเราได้เสมออยู่หรือไม่ และกลยุทธ์ดังกล่าวเป็นอย่างไร" ที่จริงแล้ว ถ้าเราพิจารณาอย่างรอบคอบ จะเห็นได้ว่า กลยุทธ์ที่เราแนะนำไว้ในหัวข้อ 1 ใช้เพียงสมบัติที่เกี่ยวกับ "ความสมมาตรเทียบกับจุดศูนย์กลาง" ของวงกลมเท่านั้น โดยไม่ได้ใช้สมบัติเฉพาะอื่นใดของวงกลมเลย

ต่อไปนี้ เราจะแนะนำบทนิยามทางคณิตศาสตร์ของคำว่า "สมมาตรเทียบกับจุดศูนย์กลาง" (centrally symmetric)

บทนิยาม 2.1 ให้ S เป็นสับเซตใด ๆ ของปริภูมิ n มิติ $\mathbb{R}^n$
ถ้ามีจุด p เป็นจุดใน S ที่มีสมบัติว่า ทุก ๆ จุด q ใน S จะมีจุด q' ใน S ที่ทำให้ p เป็นจุดกึ่งกลางระหว่าง q และ q' จะเรียก S ว่า *สมมาตรเทียบกับจุดศูนย์กลาง* p



รูปที่ 2.1 ตัวอย่างของเซตบนปริภูมิสองมิติซึ่งสมมาตรเทียบกับจุดศูนย์กลาง



รูปที่ 2.2 ตัวอย่างของเซตบนปริภูมิสองมิติซึ่งไม่สมมาตรเทียบกับจุดศูนย์กลาง

จะเห็นได้ว่า เราสามารถนำกลยุทธ์ที่แนะนำไว้ในหัวข้อ 1 มาใช้ในกรณีที่โต๊ะเป็นรูปทรงอื่น ๆ ที่สมมาตรเทียบกับจุดศูนย์กลาง (เช่น โต๊ะรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า โต๊ะรูปหกเหลี่ยมด้านขนาน เป็นต้น) ได้

คำถามคือ ในกรณีที่โต๊ะ**ไม่ได้**มีรูปร่างที่สมมาตรเทียบกับจุดศูนย์กลาง เราจะยังมีวิธีในการเอาชนะเพื่อนได้เสมออยู่หรือไม่ ยกตัวอย่างเช่น ในกรณีที่โต๊ะมีรูปร่างเป็นรูปสามเหลี่ยม เราควรจะใช้กลยุทธ์ในการวางเหรียญอย่างไร ควรเริ่มวางก่อนหรือวางทีหลัง หรือมีกรณีไหนหรือไม่ ที่ไม่ว่าใครจะเป็นฝ่ายวางก่อนหรือหลัง ต่างก็มีโอกาสแพ้หรือชนะด้วยกันทั้งคู่ ปัญหาเหล่านี้ล้วนเป็นปัญหาที่น่าสนใจทั้งสิ้น

ในกรณีทั่ว ๆ ไป เราจะพบว่า วิธีการที่จะเอาชนะเพื่อน น่าจะต้องขึ้นอยู่กับรูปทรงและขนาดของโต๊ะอย่างแน่นอน นอกจากนี้แล้ว เราอาจจะเกิดคำถามขึ้นในใจว่า

(ก) เราสามารถวางเหรียญลงไปบนโต๊ะที่กำหนดมาให้ ได้มากที่สุดเป็นจำนวนกี่เหรียญ

(ข) เหรียญเหรียญหนึ่งสามารถวางติดกับเหรียญอื่นพร้อม ๆ กันได้มากที่สุดกี่เหรียญ

(ค) ถ้าเราต้องการที่จะวางเหรียญ เพื่อกีดกันไม่ให้คนอื่นมาวางเหรียญติดกับเหรียญตรงกลางที่กำหนดมาให้ได้ เราจะต้องใช้เหรียญมาวางกันอย่างน้อยที่สุดกี่เหรียญ

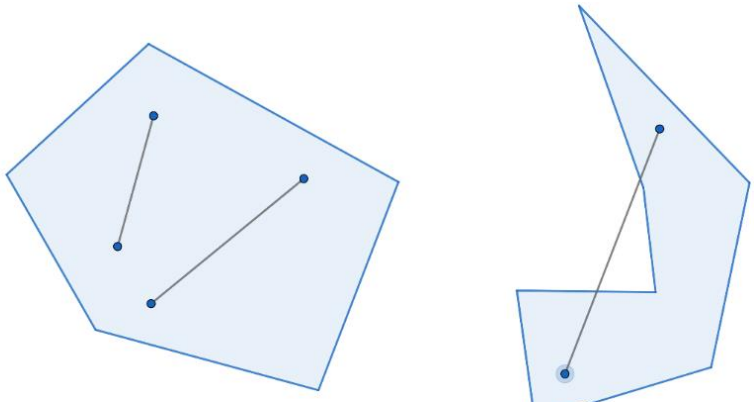
คำถามสามคำถามนี้ จะนำเราไปสู่ทฤษฎีบทที่สำคัญหลายทฤษฎีบทในสาขาของเรขาคณิตวิยุต (discrete geometry) ซึ่งคำถามแรก จะเป็นแนวคิดเบื้องต้นสำหรับการนิยามสิ่งที่ทางคณิตศาสตร์เรียกกันว่า "การบรรจุ" (packing) ส่วนคำถามที่สองและสาม จะนำไปสู่การนิยามจำนวนที่เรียกว่า "จำนวนนิวตัน" (Newton number) และ "จำนวนตัวบล็อก" (blocking number) ตามลำดับ

ที่จริงแล้ว เราสามารถทำการขยายรูปแบบการเล่นของเกมวางเหรียญให้กว้างขึ้นออกไปได้อีก ตัวอย่างเช่น เราสามารถอนุญาตให้เหรียญแต่ละเหรียญไม่จำเป็นต้องมีขนาดเท่ากันหมด หรือไม่จำเป็นต้องเป็นรูปวงกลมเท่านั้น แต่เป็นรูปใดก็ได้ เช่นรูปสามเหลี่ยม รูปหลายเหลี่ยม รูปวงรีเป็นต้น หรืออาจจะขยายเกมไปเป็นรูปแบบสามมิติ เช่น วางลูกปิงปองบนพื้นผิวของลูกบอล เป็นต้น

ในสาขาของเรขาคณิตวิยุต เรามักจะสนใจศึกษารูปทรงทางเรขาคณิตที่เรียกว่า "รูปทรงนูน"

บทนิยาม 2.2 ให้ S เป็นสับเซตใด ๆ ของ $\mathbb{R}^n$ เราจะกล่าวว่า S เป็น*เซตนูน* (convex set) n มิติ ก็ต่อเมื่อส่วนของเส้นตรงที่ลากเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด ๆ ในเซต S จะต้องเป็นสับเซตของเซต S และในกรณีที่ S ไม่ใช่เซตนูน เราจะกล่าวว่า S เป็น*เซตเว้า* (concave set)

บทนิยาม 2.3 ให้ S เป็นเซตนูน n มิติ เราจะกล่าวว่า S เป็น*รูปทรงนูน* (convex body) n มิติ ถ้า S เป็นเซตกระชับ (compact set) ซึ่งมีภายใน (interior) ไม่เป็นเซตว่าง



รูปที่ 2.3 ตัวอย่างของเซตนูนสองมิติ (ซ้าย) และเซตเว้าสองมิติ (ขวา)

สังเกตว่าจากบทนิยาม จะเห็นว่า ความแตกต่างที่ชัดเจนระหว่าง "เซตนูน" กับ "รูปทรงนูน" คือ เซตนูนอาจจะเป็นเซตเปิด (open set) หรือเป็นเซตที่ไม่มีขอบเขตได้ แต่ว่ารูปทรงนูนจะต้องเป็นเซตปิด (closed set) และต้องมีขอบเขตเท่านั้น ตัวอย่างของรูปทรงนูนในปริภูมิสองมิติ เช่น วงกลม

วงรี รูปสามเหลี่ยม รูปหลายเหลี่ยมที่มุมภายในทุกมุมไม่เกิน $180°$ เป็นต้น สำหรับตัวอย่างของรูปทรงนูนในปริภูมิสามมิติ เช่น ทรงกลม ทรงกรวย พีระมิด ทรงกระบอก เป็นต้น

3. การบรรจุ

ปัญหาเกี่ยวกับการบรรจุสิ่งของเป็นปัญหาที่เกิดขึ้นในทุกยุคทุกสมัย และมีประยุกต์ใช้ในหลากหลายด้าน ไม่ว่าจะเป็นทางด้านเศรษฐกิจ ด้านการทหาร ด้านสถาปัตยกรรม หรือว่าด้านวิทยาศาสตร์ ตัวอย่างเช่น ปัญหาเกี่ยวกับการบรรจุผลไม้เพื่อส่งออก ปัญหาเกี่ยวกับการขนส่งวัสดุอุปกรณ์ ปัญหาการออกแบบบรรจุภัณฑ์ รวมไปถึง ในหัวข้อที่แล้ว เราได้แนะนำเกี่ยวกับปัญหาเกมวางเหรียญ ซึ่งเราจะต้องทำการวางเหรียญลงบนโต๊ะไม่ให้เกิดการซ้อนทับกัน และห้ามไม่ให้เหรียญเกินออกมานอกบริเวณของโต๊ะ จะเห็นได้ว่าปัญหาเหล่านี้ ต่างก็เป็นปัญหาเกี่ยวกับการบรรจุทั้งสิ้น

สิ่งที่เราสังเกตได้ก็คือ “การบรรจุ” จะมีสมบัติร่วมกันอยู่สองประการ ประการแรกคือ สิ่งของที่บรรจุจะต้องอยู่ในภาชนะที่ใช้ในการบรรจุ และประการที่สอง สิ่งของสองชิ้นใด ๆ จะซ้อนทับกันได้เฉพาะบริเวณขอบเท่านั้น ต่อไปนี้เราจะให้บทนิยามทางคณิตศาสตร์ของ “การบรรจุ”

บทนิยาม 3.1 ให้ S เป็นสับเซตของ $\mathbb{R}^n$ และ $K_1, K_2, K_3, \ldots$ เป็นรูปทรงนูน n มิติ เราจะกล่าวว่า $\{K_i\}$ เป็น*การบรรจุ* (packing) ของ S ถ้า

$$\bigcup_{i\geq 1} K_i \subset S$$

และ $Int(K_i) \cap Int(K_j) = \emptyset$ เมื่อ $i \neq j$ โดยในที่นี้ $Int(K)$ หมายถึง ภายในของเซต K

ข้อควรสังเกตคือ ในบทนิยามนี้ K_i แต่ละเซตไม่จำเป็นต้องมีรูปทรงเหมือนกัน เช่น K_1 อาจจะเป็นรูปสามเหลี่ยม ในขณะที่ K_2 เป็นรูปวงกลมเป็นต้น แต่ในกรณีที่ K_i มีรูปทรงที่เหมือนกันหมด เราจะมีชื่อเรียกพิเศษให้กับการบรรจุประเภทนี้ แต่ก่อนอื่น เราจะมานิยามคำว่า “รูปทรงเหมือนกัน” กันก่อน โดยในทางคณิตศาสตร์ เราจะใช้คำว่า “เท่ากันทุกประการ” (congruence)

บทนิยาม 3.2 ให้ K, K' เป็นสับเซตของ $\mathbb{R}^n$ ถ้า K' เกิดจากการเคลื่อนที่คงรูป (rigid motion) ของ K (นั่นคือ K' ได้มาจาก K โดยผ่านการเลื่อนขนาน การหมุน หรือการพลิก) แล้วเราจะกล่าวว่า K' เป็น*สำเนาแบบเท่ากันทุกประการ* (congruent copy) ของ K หรือกล่าวสั้น ๆ ว่า K' เป็น*สำเนา*ของ K

บทนิยาม 3.3 กำหนดให้ K เป็นรูปทรงนูนใด ๆ ถ้า $\{K_i\}$ เป็นการบรรจุของ S โดยที่ K_i ทุกเซตต่างก็เป็นสำเนาของ K แล้วเราจะกล่าวว่า $\{K_i\}$ เป็น*การบรรจุของ S ด้วย K*

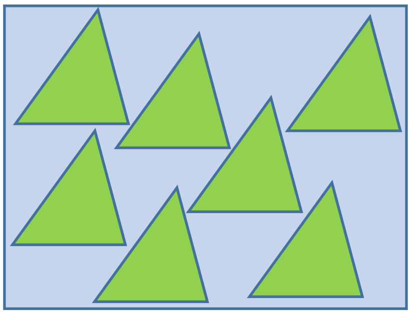
กล่าวง่าย ๆ ก็คือ "การบรรจุของ S ด้วย K" ก็คือการนำเอาสำเนาของ K ไปบรรจุลงใน S นั่นเอง ตัวอย่างเช่น ในกรณีของเกมวางเหรียญ เราสามารถมองว่าเหรียญแต่ละเหรียญต่างก็เป็นสำเนาของเหรียญเหรียญหนึ่งนั่นเอง

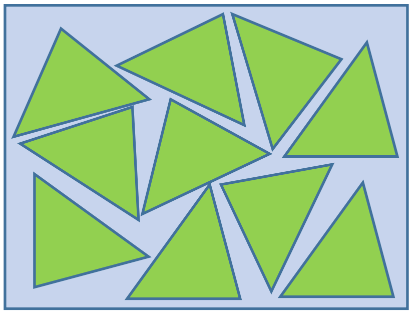
ในบางกรณี เราอาจจะสนใจเฉพาะกรณีที่อนุญาตให้ทำการเลื่อนขนานเพียงอย่างเดียวเท่านั้น

บทนิยาม 3.4 ให้ K, K' เป็นสับเซตของ $\mathbb{R}^n$ ถ้า K' เกิดจากการเลื่อนขนานของ K แล้วเราจะกล่าวว่า K' เป็น*สำเนาแบบเลื่อนขนาน* (translative copy) ของ K

บทนิยาม 3.5 กำหนดให้ K เป็นรูปทรงนูนใด ๆ ถ้า $\{K_i\}$ เป็นการบรรจุของ S โดยที่ K_i ทุกเซตต่างก็เป็นสำเนาแบบเลื่อนขนานของ K แล้วเราจะกล่าวว่า $\{K_i\}$ เป็น*การบรรจุแบบเลื่อนขนาน* (translative packing) ของ S ด้วย K

จะเห็นได้ว่า ในกรณีที่ K เป็นรูปวงกลม "การบรรจุแบบ*เลื่อนขนาน*ของ S ด้วย K" ไม่ได้แตกต่างไปจาก "การบรรจุของ S ด้วย K" เลย เนื่องจากรูปที่เราได้จากการหมุนหรือการพลิกของรูปวงกลมนั้น คือรูปวงกลมเหมือนเดิมนั่นเอง แต่ในกรณีทั่วไป เช่น กรณีที่ K เป็นรูปสามเหลี่ยม เราจะเห็นได้ไม่ยากว่า "การบรรจุแบบเลื่อนขนานของ S ด้วย K" แตกต่างจาก "การบรรจุของ S ด้วย K" อย่างชัดเจน

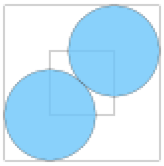
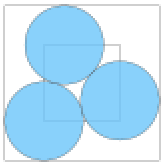
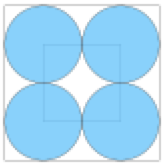
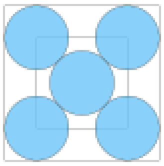


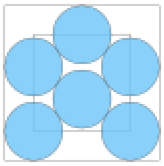
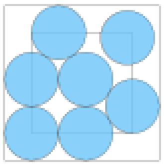
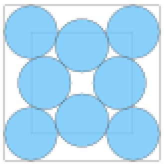
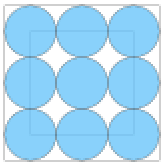
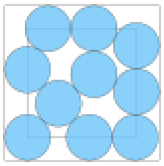
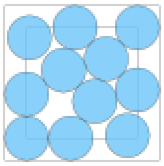
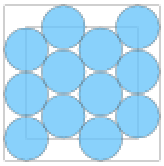
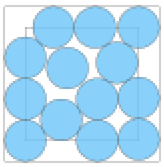


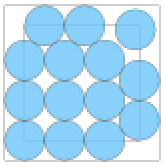
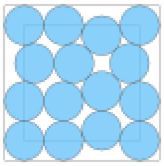
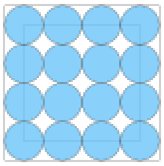
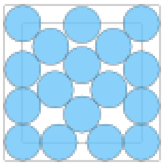
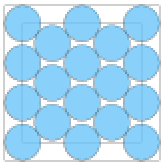
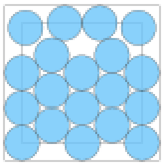
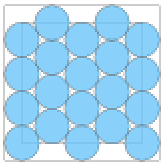
รูปที่ 3.1 การบรรจุแบบเลื่อนขนานของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าด้วยรูปสามเหลี่ยม (ซ้าย)
และ การบรรจุของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าด้วยรูปสามเหลี่ยม (ขวา)

ปัญหาเกี่ยวกับการบรรจุ เป็นปัญหาที่นักคณิตศาสตร์ให้ความสนใจ และศึกษากันมาอย่างยาวนาน ซึ่งแน่นอนว่าในปัจจุบันมีข้อสรุปมากมายที่เกี่ยวข้องกับเรื่องนี้ โดยปัญหาหนึ่งที่เราสนใจก็คือการบรรจุรูปวงกลมลงในรูปทรงต่าง ๆ ที่กำหนด ตัวอย่างเช่น ปัญหาเกี่ยวกับการบรรจุรูปวงกลมลงในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส สิ่งที่นักคณิตศาสตร์สนใจคือ ความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เล็กที่สุดที่สามารถบรรจุรูปวงกลมหนึ่งหน่วยจำนวน n รูปเข้าไปได้ ซึ่งมีนักคณิตศาสตร์หลายท่าน อาทิ Schaer, Goldberg, Wengerodt, Graham ให้ความสนใจกับปัญหานี้ ในปี 1999 Eckard [5] ได้เขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เพื่อในการช่วยคำนวณหาความยาวด้านที่ดีสุดของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยเขาได้คำนวณหาคำตอบ (ซึ่งอาจจะไม่ดีที่สุด) สำหรับกรณี $n \leq 10000$ ซึ่งมีเพียงกรณีที่ $n \leq 30$ และ $n = 36$ เท่านั้นที่ได้รับการพิสูจน์แล้วว่าคำตอบที่ได้เป็นคำตอบที่ดีที่สุด โดยตารางด้านล่างแสดงคำตอบที่ดีที่สุดสำหรับกรณีที่ $n \leq 20$

ตารางที่ 3.1 จำนวนของวงกลมกับความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เล็กที่สุดที่สามารถบรรจุวงกลมจำนวนดังกล่าวลงไปได้

จำนวนของวงกลม	**ความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส**	**รูปแบบการวาง**
1	2	
2	$2 + \sqrt{2} \approx 3.414 \ldots$	
3	$2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} \approx$	
4	4	
5	$2 + 2\sqrt{2} \approx 4.828 \ldots$	

จำนวนของวงกลม	ความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส	รูปแบบการวาง
6	$2+\dfrac{12}{\sqrt{13}} \approx 5.328\ldots$	
7	$4+\sqrt{3} \approx 5.732\ldots$	
8	$2+\sqrt{2}+\sqrt{6} \approx 5.862\ldots$	
9	6	
10	$6.747\ldots$	
11	$7.022\ldots$	
12	$2+15\sqrt{\dfrac{2}{17}} \approx 7.144\ldots$	
13	$7.463\ldots$	

จำนวนของวงกลม	ความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส	รูปแบบการวาง
14	$6+\sqrt{3} \approx 7.732 \ldots$	
15	$4+\sqrt{2}+\sqrt{6} \approx 7.863 \ldots$	
16	8	
17	$8.532 \ldots$	
18	$2+\frac{24}{\sqrt{13}} \approx 8.656 \ldots$	
19	$8.907 \ldots$	
20	$\frac{130}{17}+\frac{16}{17}\sqrt{2} \approx 8.978 \ldots$	

ที่มา : https://en.m.wikipedia.org/wiki/Circle_packing_in_a_square (วันที่ค้นข้อมูล : 20 พฤศจิกายน 2561)

นอกจากนี้ Eckard [6] ยังได้เขียนโปรแกรมเพื่อคำนวณหาความยาวของรัศมีของวงกลมที่เล็กที่สุดที่สามารถบรรจุรูปวงกลมหนึ่งหน่วยจำนวน n รูปลงไปได้ โดยข้อสรุปที่ได้มีเพียงกรณี $n \leq 13$ และ $n = 19$ เท่านั้นที่ได้รับการพิสูจน์แล้วว่าคำตอบที่ได้เป็นคำตอบที่ดีที่สุด

นอกจากปัญหาเกี่ยวกับการบรรจุวงกลมแล้ว ยังมีการสนใจศึกษาเกี่ยวกับการบรรจุรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปสามเหลี่ยม หรือแม้แต่รูปทรงนูนทั่ว ๆ ไปลงในรูปทรงต่าง ๆ ที่ต้องการ ซึ่งรูปทรงของภาชนะที่ใช้ในการบรรจุ ก็มีอยู่หลากหลาย เช่น รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า รูปสามเหลี่ยม รูปวงกลม หรือในบางครั้ง เรายังสนใจศึกษาในกรณีที่ภาชนะบรรจุของเราเป็นระนาบทั้งระนาบอีกด้วย

4. สรุป

ในบทความนี้ เราได้แนะนำเกมวางเหรียญ รวมทั้งกล่าวถึงปัญหาสามปัญหาที่เกี่ยวข้อง คือ

(ก) เราสามารถวางเหรียญลงไปบนโต๊ะที่กำหนดมาให้ ได้มากที่สุดเป็นจำนวนกี่เหรียญ

(ข) เหรียญเหรียญหนึ่งสามารถวางติดกับเหรียญอื่นพร้อม ๆ กันได้มากที่สุดกี่เหรียญ

(ค) ถ้าเราต้องการที่จะวางเหรียญ เพื่อกีดกันไม่ให้คนอื่นมาวางเหรียญติดกับเหรียญตรงกลางที่กำหนดมาให้ได้ เราจะต้องใช้เหรียญมาวางกันอย่างน้อยที่สุดกี่เหรียญ

โดยเราได้กล่าวไปแล้วด้านบนว่า คำถามแรก นำเราไปสู่การนิยามสิ่งที่เรียกว่า “การบรรจุ” ซึ่งปัญหาเกี่ยวกับการบรรจุ มีอยู่มากมายหลากหลายแบบ และเป็นที่สนใจของนักคณิตศาสตร์ทั่วโลก

ในตอนต่อไป เราจะพิจารณาคำถามที่สองและสาม พร้อมทั้งให้บทนิยามของ “จำนวนนิวตัน” และ “จำนวนตัวบล็อก” ซึ่งเป็นจำนวนที่นักเรขาคณิตวิยุตรวมไปถึงนักเคมีหลายท่านให้ความสนใจ

เอกสารอ้างอิง

[1] Brass, P., Moser, W. and Pach, J. (2005) *Research Problems in Discrete Geometry.* New York: Springer-Verlag.

[2] Boltjansky, V. G., Martini, H., and Soltan, P. (1997). *Excursions into Combinatorial Geometry.* Berlin: Springer.

[3] Böröczky, Jr. K. (2004). *Finite Packing and Covering.* Cambridge: Cambridge University Press.

[4] Dalla, L., Larman, D. G., Mani-Levitska, P. and Zong, C. M. (2000). *The Blocking Numbers of Convex Bodies.* Discrete Comput. Geom., 24: 267 - 277.

[5] Eckard, S. (2011). *The Best-Known Packings of Equal Circles in a Square.* Retrieved November 20, 2918, from http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/packing/csq/csq.html.

[6] Eckard, S. (2014). *The Best-Known Packings of Equal Circles in a Circle.* Retrieved November 20, 2918, from http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/packing/ccinew/cci.html

[7] Gohberg, I. Ts. and Markus, A. S. (1960). *A certain problem about the covering of convex sets with homothetic ones*. Izvestiya Moldavskogo Filiala Akademii Nauk SSSR (In Russian).

[8] Grünbaum, B. (1963). *Borsuk's Problem and Related Questions.* Proc. Symp. Pure Math., 7: 271 - 283.

[9] Levenshtein, V. I. (1979). *On Bounds for Packings in n-dimensional Euclidean Space.* Dokl. Akad. Nauk SSSR 245, 6: 1299 - 1303 (in Russian).

[10] Levi, F. W. (1955). *Überdeckung eines Eibereiches durch Parallelverschiebungen seines offenen Kerns.* Archiv der Mathematik, 6 (5): 369 - 370.

[11] Musin, O. R. (2008). *The Kissing Number in Four Dimensions.* Ann. Math. (2) 168: 1 - 32.

[12] Shannon, C. E. (1959). *Probability of Error for Optimal Codes in a Gaussian Channel.* Bell System Tech. J., 38: 611 - 656.

[13] Odlyzko, A. M. and Sloane, N. J. A. (1979). *New Bounds on the Number of Unit Spheres that can touch a Unit Sphere in n dimensions.* J. Comb. Theory Ser. A, 26: 210 - 214.

[14] Wyner, J. M. (1965). *Capabilities of Bounded Discrepancy Decoding.* Bell System Tech. J., 44: 1061 - 1122.

[15] Yu, L. and Zong, C. M. (2009). *On the Blocking Number and the Covering Number of a Convex Body.* Adv. Geom., 9: 13 - 29.

[16] Zong, C. M. (1996). *Strange Phenomena in Convex and Discrete Geometry.* New York: Springer.

[17] Zong, C. M. (1999). *Sphere Packings.* New York: Springer.

[18] Zong, C. M. (2006). *What is Known about Unit Cubes.* Bull. Amer. Math. Soc., 39: 533 - 555.

[19] Zong, C. M. (2006). *The Cube: A Window to Convex and Discrete Geometry.* Cambridge: Cambridge University Press.

[20] Zong, C. M. (2008). *The Kissing Numbers, Blocking Numbers and Covering Numbers of a Convex Body.* Contemp. Math., 453: 529 - 548.