วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh 63(696) กันยายน – ธันวาคม 2561

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

http//:www.mathassociation.net Email: MathThaiOrg@gmail.com

ความเชื่อมโยงของกราฟเคย์เลย์ของผลคูณตรงระหว่างสองกรุปวัฏจักร

Connectivity of Cayley Graphs of Direct Product between two Cyclic Groups

ชานนท์ พรมสกล

Chanon Promsakon

Department of Mathematic, Faculty of Applied Science,

King Mongkul's University of Technology North Bangkok

Email: chanon.p@sci.kmutnb.ac.th

บทคัดย่อ

ในบทความนี้จะศึกษาสมบัติของกราฟเคย์เลย์ $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$ ของผลคูณตรงของกรุปวัฏจักรสองกรุป เมื่อ m และ n เป็นจำนวนนับใดๆ ที่ไม่เท่ากับ 1 โดยมุ่งเน้นไปที่การเป็นกราฟเชื่อมโยง พร้อมทั้งหาเงื่อนไขที่ทำให้กราฟดังกล่าวเป็นกราฟแฮมิลตันและกราฟออยเลอร์

คำสำคัญ: กราฟเคย์เลย์ กราฟแฮมิลตัน กราฟออยเลอร์ ผลคูณเทนเซอร์

ABSTRACT

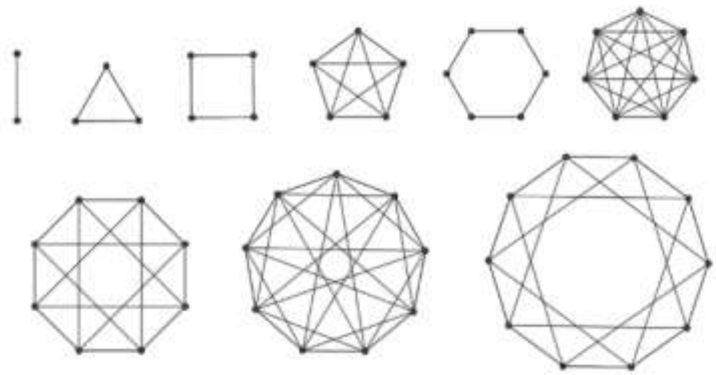
In this paper, we study properties of Cayley graphs $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$ of direct product between two cyclic groups where m and n are natural numbers which are not 1 emphasising their connectivity. Moreover, we find conditions to make them be Hamiltonian and Eulerian.

Keywords: Cayley graph, Hamilton graph, Euler graph, Tensor product

1. บทนำ

กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1 และ $\mathbb{Z}_n$ แทนเซตของจำนวนเต็มมอดุโล n และ U_n เป็นเซตของยูนิต (สมาชิกที่มีตัวผกผันการคูณใน $\mathbb{Z}_n$) ทั้งหมดใน $\mathbb{Z}_n$ **กราฟเคย์เลย์ยูนิต**ของ $\mathbb{Z}_n$ เขียนแทนด้วย G_n คือกราฟที่มีจุดยอดเป็นสมาชิกใน $\mathbb{Z}_n$ และจุดยอด u และจุดยอด v จะประชิดกันก็ต่อเมื่อ $u - v \in U_n$

ยกตัวอย่างเช่นในกรณีที่ $n = 4$ จะได้ $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$ และ $U_4 = \{1,3\}$ ดังนั้นจุดยอด 1 ประชิดกับจุดยอด 2 และจุดยอด 4 แต่ไม่ประชิดกับจุดยอด 3 รูปกราฟที่ได้คือ C_4 นอกจากนี้ รูปที่ 1 แสดงกราฟของเคย์เลย์ยูนิตที่มีอันดับตั้งแต่ 2 ถึง 10



รูปที่ 1 กราฟเคย์เลย์ยูนิตที่มีอันดับตั้งแต่ 2 ถึง 10

สำหรับงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับกราฟเคย์เลย์ยูนิตนั้นมีอยู่มากมาย แต่ผู้วิจัยมุ่งเน้นไปที่สมบัติพื้นฐานและสมบัติที่เกี่ยวข้องกับความเชื่อมโยงที่แสดงในบทความวิชาการของ Bogges [1] ในเรื่อง The structure of unitary Cayley graphs บางส่วนของทฤษฎีบทที่ใช้อ้างอิงในงานวิจัยฉบับนี้ขอแสดงไว้ ณ ที่นี้

ทฤษฎีบทที่ 1 [1] กราฟ G_n เป็นกราฟปกติที่ทุกจุดยอดมีดีกรีเท่ากับ $\phi(n)$ ทุกจำนวนนับ n ที่มีค่ามากกว่า 1 (เมื่อ $\phi(n)$ คือ ฟังก์ชันฟีออยเลอร์ของ n)

ทฤษฎีบทที่ 2 [1] กราฟ G_n เป็นกราฟเชื่อมโยงทุกค่า n

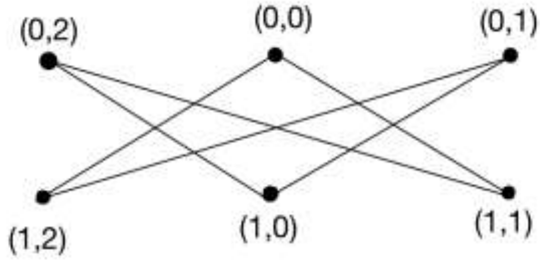
ทฤษฎีบทที่ 3 กราฟ G_n เป็นกราฟสองส่วน ก็ต่อเมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคู่

บทพิสูจน์ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มคู่ ดังนั้นจึงได้ว่าทุกจำนวนเต็มคู่ u ตัวหารร่วมมากระหว่าง u และ n ไม่ใช่ 1 เป็นผลทำให้ u ไม่เป็นสมาชิกใน U_n หรือพูดอีกอย่างได้ว่า สมาชิกทุกตัวใน U_n ต้องเป็นจำนวนเต็มคี่ เป็นผลทำให้จุดยอดสองจุดที่ประชิดกันต้องเป็นจุดยอดที่มีความเป็นคู่และคี่ที่ต่างกัน ดังนั้นเมื่อแบ่ง $\mathbb{Z}_n$ ออกเป็นส่วนของจำนวนเต็มคู่และส่วนของจำนวนเต็มคี่ จะได้ว่าจุดยอดในส่วนเดียวกันจะไม่ประชิดกันและทำให้ G_n เป็นกราฟสองส่วน

ต่อไปสมมติให้ n เป็นจำนวนเต็มคี่ ดังนั้นเห็นได้ชัดว่า $1,2 \in U_n$ จะเห็นได้ว่า 0 ประชิดกับจุด 1 และ 2 และเช่นเดียวกัน 1 ประชิดกับ 2 จึงทำให้ G_n มี C_3 เป็นกราฟย่อยและไม่เป็นกราฟสองส่วน $\square$

ขอปิดท้ายในบทนำนี้ด้วยการกล่าวถึงกราฟเคย์เลย์ $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$ ของผลคูณตรงของกรุปวัฏจักรสองกรุป ก่อนอื่นจะกล่าวถึงกรุปที่เกิดจากผลคูณตรงระหว่างกรุปวัฏจักรสองกรุป $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ ที่มีการดำเนินการบวกนิยามโดย $(x,y)+(a,b)=(x+a,y+b)$ ทุก $x,a \in \mathbb{Z}_m$ และ $y,b \in \mathbb{Z}_m$ เอกลักษณ์การบวกเป็น $(0,0)$ และตัวผกผันการบวกของ (x,y) คือ $-(x,y)=(-x,-y)$ นั่นเอง ส่วนกราฟเคย์เลย์ของ $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ บนเซต $U_m \times U_n$ เขียนแทนด้วย $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$ คือกราฟที่มีจุดยอดเป็นสมาชิกใน $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ และจุดยอด (u_1,v_1) ประชิดกับจุดยอด (u_2,v_2) ก็ต่อเมื่อ $(u_1,v_1)-(u_2,v_2) \in U_m \times U_n$

ยกตัวอย่างเช่น $Cay(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, U_2 \times U_3)$ เป็นกราฟอันดับ 6 ที่ดีกรีของจุดยอดทุกจุดเท่ากับ 2 ดังนั้นจำนวนเส้นเชื่อมเท่ากับ 6 เส้น สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2 กราฟ $Cay(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, U_2 \times U_3)$

ในหัวข้อถัดไปผู้วิจัยจะกล่าวถึงสมบัติของกราฟเคย์เลย์ของกรุป $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ บนเซตของยูนิต $U_m \times U_n$ โดยศึกษาลักษณะ ความเชื่อมโยง การเป็นกราฟออยเลอร์ และการเป็นกราฟแฮมิลตัน ส่วนพื้นฐานความรู้ทางด้านทฤษฎีกราฟผู้วิจัยยึดตามหนังสือของ Douglas [2] และพื้นฐานทางด้านพีชคณิตนามธรรมยึดตามหนังสือของ Dummit and Foote [3]

2. การเป็นกราฟเชื่อมโยงของ $\boldsymbol{Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)}$

ขอเริ่มโดยการกล่าวถึงสมบัติพื้นฐานของ $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$ ได้แก่ จำนวนจุดยอด จำนวนเส้น และดีกรีของจุดยอด

เห็นได้ชัดว่าจุดยอด (x, y) ในกราฟ $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$ จะประชิดกับจุดยอด $(u_m + x, u_n + y)$ เสมอทุก $u_m \in U_m, u_n \in U_n$ ดังนั้นจึงได้ว่าดีกรีของจุดยอดใด ๆ ย่อมเท่ากันเสมอ นั่นคือ $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$ เป็นกราฟปกติ

ทฤษฎีบทที่ 4 กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนนับที่มีค่ามากกว่า 1 จะได้ว่า
กราฟ $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$ เป็นกราฟปกติที่มีดีกรีเท่ากับ $\phi(m)\phi(n)$

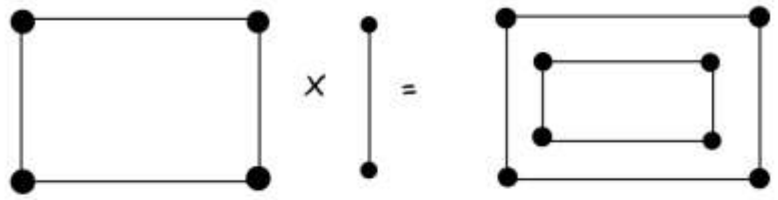
บทพิสูจน์ จากที่กล่าวไว้ตอนต้นว่า (x, y) จะประชิดกับจุดยอด $(u_m + x, u_n + y)$ เสมอทุก $u_m \in U_m, u_n \in U_n$ เพราะฉะนั้นดีกรีของทุกจุดใน $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$ มีค่าเท่ากันโดยเท่ากับขนาดของ $U_m \times U_n$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\phi(m)\phi(n)$ เพราะฉะนั้นสรุปได้ว่ากราฟ $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$ เป็นกราฟปกติที่มีดีกรีเท่ากับ $\phi(m)\phi(n)$ $\square$

บทแทรกที่ 1 กราฟ $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$ มีอันดับและขนาดเท่ากับ mn และ $\frac{1}{2}mn\phi(m)\phi(n)$ ตามลำดับ

บทพิสูจน์ จำนวนจุดยอดเป็นผลโดยตรงจากบทนิยามของกราฟเคย์เลย์ ส่วนจำนวนเส้นนั้นหาได้จากทฤษฎีบทที่ 4 $\square$

ต่อไปจะขอกล่าวถึงตัวดำเนินการบนกราฟที่ชื่อว่า ผลคูณเทนเซอร์ กำหนด G_1 และ G_2 เป็นกราฟ **ผลคูณเทนเซอร์** (tensor product) ระหว่าง G_1 และ G_2 คือกราฟที่มีเซตของจุดยอดเป็น $G_1 \times G_2$ และจุดยอด (u_1, v_1) กับจุดยอด (u_2, v_2) จะประชิดกัน ก็ต่อเมื่อ จุดยอด u_1 ประชิดกับจุดยอด u_2 ใน G_1 และจุดยอด v_1 ประชิดกับจุดยอด v_2 ใน G_2

เมื่อพิจารณาผลคูณเทนเซอร์ระหว่าง C_4 และ K_2 จะได้ผลลัทธ์ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 ผลคูณเทนเซอร์ระหว่าง C_4 และ K_2

ในปี ค.ศ.1963 Weichsel [4] ได้นำเสนองานวิจัยที่มีชื่อว่า The Kronecker product of graphs ซึ่งเป็นอีกชื่อหนึ่งของ Tensor product นั่นเอง ในงานวิจัยได้กล่าวถึงสมบัติการเป็นกราฟเชื่อมโยงไว้ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 5 [4] กำหนดให้ G และ H เป็นกราฟเชื่อมโยงจะได้ว่าผลคูณเทนเซอร์ระหว่าง G และ H เป็นกราฟเชื่อมโยง ก็ต่อเมื่อ หนึ่งในกราฟนั้นไม่เป็นกราฟสองส่วน (มีวงคี่เป็นกราฟย่อย)

เมื่อพิจาณาผลคูณเทนเซอร์ในรูปที่ 3 พบว่า ทั้ง C_4 และ K_2 ต่างก็เป็นกราฟสองส่วน จึงทำให้ $C_4 \times K_2$ ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง และมีทั้งหมด 2 ส่วนประกอบ ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทของ Weichsel เช่นเดียวกันในทฤษฎีบทที่ 6

ทฤษฎีบทที่ 6 [4] ถ้า G และ H เป็นกราฟเชื่อมโยงที่ไม่มีวงคี่เป็นกราฟย่อย แล้ว $G \times H$ เป็นกราฟไม่เชื่อมโยงและมี 2 ส่วนประกอบ

ในปี ค.ศ. 1997 Gravier [5] ได้ศึกษาสมบัติการเป็นกราฟแฮมิลตันของกราฟผลคูณเทนเซอร์ ในงานตีพิมพ์ที่มีชื่อว่า Hamiltonicity of cross product of two Hamiltonain graphs เขาได้ให้เงื่อนไขการเป็นกราฟแฮมิลตันของกราฟผลคูณเทนเซอร์ซึ่งผู้วิจัยจะนำมาอ้างถึง

บทตั้งที่ 1 [5] กำหนดให้ G และ H เป็นกราฟแฮมิลตันที่มีอันดับเท่ากับ m และ n ตามลำดับ ถ้า m และ n ไม่เป็นจำนวนเต็มคู่ทั้งคู่ จะได้ว่าผลคูณเทนเซอร์ระหว่าง G และ H เป็นกราฟแฮมิลตัน

จากบทนิยามและตัวอย่างทำให้เห็นได้ว่า เงื่อนไขที่ทำให้จุดยอด (u_1, v_1) ประชิดกับจุดยอด (u_2, v_2) นั้นคือจุดยอด u_1, u_2 ต้องประชิดกันใน G_m และจุดยอด v_1, v_2 ต้องประชิดกันใน

G_n นั่นเอง ซึ่งสอดคล้องกับการประชิดกันของสองจุดในกราฟผลคูณเทนเซอร์ จึงทำให้เราได้ลักษณะทั่วไปของกราฟ $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$ ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 7 กำหนด m และ n เป็นจำนวนนับที่มีค่ามากกว่า 1 จะได้ว่า

$$Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n) \equiv G_m \times G_n$$

บทพิสูจน์ เห็นได้ชัดว่าเซตของจุดยอดของ $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$ และ $G_m \times G_n$ เท่ากับ $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ ต่อไปจะแสดงว่าเซตของเส้นทั้งคู่เท่ากัน โดยการสมมติ $a, x \in \mathbb{Z}_m$ และ $b, y \in \mathbb{Z}_n$ เพื่อความสะดวกจะใช้สัญลักษณ์ G แทนกราฟ $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$

$$\begin{aligned}(a,b)(x,y) \in E(G) &\leftrightarrow (a,b)-(x,y) \in U_m \times U_n \\ &\leftrightarrow (a-x, b-y) \in U_m \times U_n \\ &\leftrightarrow a-x \in U_m \wedge b-y \in U_n \\ &\leftrightarrow ax \in E(G_m) \wedge by \in E(G_n) \\ &\leftrightarrow (a,b)(x,y) \in E(G_m \times G_n)\end{aligned}$$

จึงสรุปได้ว่า $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n) \equiv G_m \times G_n$ □

จากทฤษฎีบทที่ 7 ทำให้สามารถศึกษาสมบัติของ $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$ โดยการศึกษาสมบัติของ $G_m \times G_n$ เริ่มต้นจากเงื่อนไขที่ทำให้กราฟ $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$ เป็นกราฟเชื่อมโยง โดยการอ้างอิงทฤษฎีบทที่ 5 และ 7

ทฤษฎีบทที่ 8 กราฟ $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$ เป็นกราฟเชื่อมโยงก็ต่อเมื่อ m หรือ n เป็นจำนวนนับคี่

บทพิสูจน์ สมมติว่าทั้ง m และ n เป็นจำนวนนับคู่ จากทฤษฎีบทที่ 2 และ 3 สรุปได้ว่าทั้ง G_m และ G_n เป็นกราฟเชื่อมโยง และเป็นกราฟสองส่วน จึงเป็นผลทำให้ $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n) \equiv G_m \times G_n$ ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง จากทฤษฎีบทที่ 5 ในทางกลับกันสมมติ m เป็นจำนวนนับคี่ ดังนั้น G_m ไม่เป็นกราฟสองส่วน และทำให้ $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n) \equiv G_m \times G_n$ เป็นกราฟเชื่อมโยง □

3. การเป็นกราฟออยเลอร์และการเป็นกราฟแฮมิลตันของ $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$

สำหรับกราฟ G ใดๆ จะเรียก G ว่า **กราฟออยเลอร์** เมื่อกราฟ G นั้นมีวงจร (circuit) ที่บรรจุทุกเส้นเชื่อมของ G ในนั้น ซึ่งลักษณะของกราฟออยเลอร์ถูกแสดงในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 9 [2] กราฟ G เป็นกราฟออยเลอร์ ก็ต่อเมื่อ G เป็นกราฟเชื่อมโยงที่จุดทุกจุดใน G มีดีกรีเป็นจำนวนเต็มคู่

ต่อไปเป็นเงื่อนไขของการเป็นกราฟออยเลอร์ของ $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$

ทฤษฎีบทที่ 10 กราฟ $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$ เป็นกราฟออยเลอร์ ก็ต่อเมื่อ m หรือ n เป็นจำนวนนับคี่

บทพิสูจน์ จากทฤษฎีบทที่ 8 เห็นได้ว่า m หรือ n เป็นจำนวนนับคี่ เป็นเงื่อนไขจำเป็นของการเป็นกราฟเชื่อมโยง ดังนั้นจึงเป็นเงื่อนไขจำเป็นของการเป็นกราฟออยเลอร์ด้วยเช่นกัน ต่อไปจะแสดงว่า m หรือ n เป็นจำนวนนับคี่ เป็นเงื่อนไขเพียงพอที่จะสรุปว่า $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$ เป็นกราฟออยเลอร์ โดยสมมติ m เป็นจำนวนนับคี่ $(m \geq 3)$ ดังนั้น $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$ เป็นกราฟเชื่อมโยง จากที่ทราบอยู่แล้วว่า $\phi(m)$ เป็นจำนวนเต็มคู่เสมอ เพราะฉะนั้นดีกรีของจุดในกราฟ $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$ ที่มีค่าเท่ากับ $\phi(m)\phi(n)$ เป็นจำนวนเต็มคู่เสมอ จึงสรุปได้ว่า $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$ เป็นกราฟออยเลอร์ $\square$

กราฟแฮมิลตัน คือกราฟที่มีวงบรรจุทุกจุดยอดของกราฟนั้น (spanning cycle) โดยเรียกวงดังกล่าวว่า **วงแฮมิลตัน** (Hamiltonian cycle) กราฟแฮมิลตันที่รู้จักได้แก่ กราฟวง (C_n) กราฟแบบบริบูรณ์ (K_n) เป็นต้น ต่อไปจะแสดงให้เห็นว่ากราฟ G_n เป็นกราฟแฮมิลตันทุกจำนวนนับ n ใด ๆ ที่มากกว่า 1

ทฤษฎีบทที่ 11 ทุกจำนวนนับ n ที่มากกว่า 1 จะได้ว่า กราฟ G_n เป็นกราฟแฮมิลตัน

บทพิสูจน์ เนื่องจาก $\mathbb{Z}_n$ เป็นกรุปวัฏจักรที่มีตัวก่อกำเนิดเป็นสมาชิกใดๆ ใน U_n ดังนั้น $\{u, 2u, 3u, \dots, (n-1)u, 0\}$ เท่ากับ $\mathbb{Z}_n$ เมื่อ u เป็นสมาชิกใน U_n และจะพบว่าสองจุดที่อยู่ติดกันในเซตดังกล่าว มีผลต่างเท่ากับ u เพราะฉะนั้นสองจุดนั้นเป็นจุดยอดที่ประชิดกัน จึงสรุปได้ว่า $\{u, 2u, 3u, \dots, (n-1)u, 0\}$ คือเซตของจุดยอดของวง และทำให้ G_n เป็นกราฟแฮมิลตัน $\square$

ต่อไปจะแสดงเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่จะทำให้ $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$ เป็นกราฟแฮมิลตัน

ทฤษฎีบทที่ 12 กราฟ $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$ เป็นกราฟแฮมิลตัน ก็ต่อเมื่อ m หรือ n เป็นจำนวนนับคี่

บทพิสูจน์ ถ้า m และ n เป็นจำนวนนับคู่ ทำให้ $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$ ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง นั่นคือ $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$ ไม่เป็นกราฟแฮมิลตัน ดังนั้น m หรือ n เป็นจำนวนนับคี่ จึงเป็นเงื่อนไขที่จำเป็นในการเป็นกราฟแฮมิลตันของ $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$ ต่อไปสมมติให้ m เป็นจำนวนนับคี่ จากทฤษฎีบทที่ 11 จะได้ว่าทั้ง G_m และ G_n เป็นกราฟแฮมิลตัน จากบทตั้งที่ 1 จึงได้ว่า $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n) \equiv G_m \times G_n$ เป็นกราฟแฮมิลตัน ☐

ในผลงานชิ้นนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาสมบัติพื้นฐาน ความเชื่อมโยงของกราฟ $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$ โดยเริ่มต้นจากลักษณะของกราฟดังกล่าว จากนั้นได้ศึกษาหาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการเป็นกราฟเชื่อมโยง กราฟออยเลอร์ และกราฟแฮมิลตัน ซึ่งทั้งหมดสามารถสรุปได้เป็นทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 13 กำหนด m และ n เป็นจำนวนนับที่มีค่ามากกว่า 1 จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. จำนวนนับ m หรือ n เป็นจำนวนนับคี่
2. กราฟ $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$ เป็นกราฟเชื่อมโยง
3. กราฟ $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$ เป็นกราฟออยเลอร์
4. กราฟ $Cay(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, U_m \times U_n)$ เป็นกราฟแฮมิลตัน

4. กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ เลขทุน 6142105

เอกสารอ้างอิง

[1] Megan, B. Tiffany, J.-H. Isidora, J. and Rachel, K. (2008). The Structure of Unitary Cayley Graphs. *SUMSRI Journal,* 1, 1 - 23.

[2] Douglas, B. W. (2001). *Introduction to Graph Theory*. 2nd ed. Upper Saddle River, NJ : Prentice-Hall.

[3] Dummit, D. S. and Foote, R. M. (2004). *Abstract Algebra.* Hoboken, NJ : John Wiley & Sons.

[4] Weichsel, P. M. (1963). The Kronecker Product of Graphs. *Proc. Amer. Math. Soc.* 13, 47 - 52.

[5] Sylvain, G. (1997). Hamiltonicity of Cross Product of Two Hamiltonain Graphs. *Discrete Mathematics*, 170, 253 - 257.