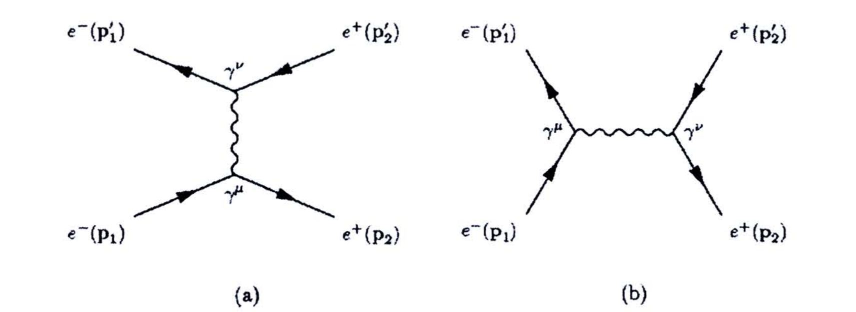
บทที่ 2

กระบวนการมูลฐานในทฤษฎีพลศาสตร์ไฟฟ้าควอนตัม

2.1 กระบวนการการกระเจิงแบบ Bhabha ในคิวอีดี

ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณากระบวนการกำเนิดอิเล็กตรอน-โพสิตรอนจากการชนกันของอิเล็กตรอน-โพสิตรอนในทฤษฎีสนามควอนตัม หรือ Bhabha scattering ซึ่งสามารถเขียนไฟน์แมนไดอะแกรมดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1: ไฟน์แมนไดอะแกรมของกระบวนการการกระเจิงแบบ Bhabha

แอมปลิจูด (amplitude) ที่สัมพันธ์กับกระบวนการในรูปที่ 2.1(a) สามารถเขียนเป็นสมการได้ โดยใช้ประโยชน์จาก vacuum-to-vacuum transition amplitude [Yongram, 2006] ซึ่งรูปไฟน์แมนไดอะแกรมรูปที่ 2.1 (a) สามารถเขียน vacuum-to-vacuum transition amplitude ในสแปซของตำแหน่ง (coordinate space) ดังนี้

$$ie^2 \int (\mathrm{d}x)[\bar{\eta}(x_1)S_+(x_1,x_2)\gamma^\mu S_+(x_2,x_3)\eta(x_3)]$$

$$\times\, (\mathrm{d}x')[\bar{\eta}(x'_1)S_+(x'_1,x'_2)\gamma^\nu S_+(x'_2,x'_3)\eta(x'_3)]D_{\mu\nu}(x_2,x'_2) \qquad (2.1)$$

โดยที่ $\eta(x)$ และ $\bar{\eta}(x)$ แทนแหล่งกำเนิดภายนอก (external source),

$$S_+(x,x') = i\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p^0}e^{ip(x-x')}(-\gamma p + m)$$

แทนตัวแผ่กระจายของอิเล็กตรอน (the propagator of electron) ,

$$D_{\mu\nu}(x,x') = \int \frac{dQ}{(2\pi)^4}\frac{g_{\mu\nu}}{Q^2 - i\varepsilon}e^{iQ(x-x')},\ \varepsilon \to +0$$

แทน ตัวแผ่กระจายไฟน์แมนของโฟตอน และโดยอาศัยประโยชน์จากการอินทิเกรต เราจะได้ว่า

$$\int (\mathrm{d}x')\bar{\eta}(x')S_+(x',x) = i\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{e^{-ipx}}{2p^0}\bar{\eta}(p)(-\gamma p + m), \quad x'^0 > x^0 \qquad (2.2)$$

และ

$$\int (\mathrm{d}x')S_+(x',x)\eta(x) = i\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{e^{ipx}}{2p^0}(-\gamma p + m)\eta(p), \quad x'^0 < x^0 \qquad (2.3)$$

เราแปลงสมการที่ (2.1) โดยอาศัย สมการที่ (2.2) และ (2.3) ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการที่ (2.1) ในสเปซโมเมนตัม (momentum space) ได้ดังนี้

$$ie^2 \int dx_2 e^{i(p_1+p_2)x_2} dx'_2 e^{i(-p'_1-p'_2)x'_2}\left[i\int \frac{d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p_2^0}\bar{\eta}(-p_2)(\gamma p_2 + m)\,\gamma^\mu\right.$$

$$\times\, i\int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p_1^0}(-\gamma p_1 + m)\eta(p_1) i\int \frac{d^3\mathbf{p}'_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p_1'^0}\bar{\eta}(p'_1)(-\gamma p'_1 + m)\gamma^\nu$$

$$\left.\times\, i\int \frac{d^3\mathbf{p}'_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p_2'^0}(\gamma p'_2 + m)\eta(-p'_2)\right] D_{\mu\nu}(x_2,x'_2) \qquad (2.4)$$

ในสมการที่ (2.4) เนื่องจากการอินทิเกรตห่างจากแหล่งกำเนิดมาก ๆ ดังนั้น อันตรกิริยาที่เกิดขึ้นช้ากว่าการกำเนิดและเร็วกว่าการวัดจากเครื่องวัด ดังนั้นเราจะได้ว่าบริเวณเกิดอันตรกิริยา

อธิบายได้ดังนี้

$$i\sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{m}{p^0}}\bar{\eta}(p)u(\mathbf{p},\sigma_-) = i\eta^*_{\mathbf{p}\sigma_-}; \quad e^- \text{ detection} \tag{2.5}$$

$$i\sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{m}{p^0}}\bar{u}(\mathbf{p},\sigma_-)\eta(p) = i\eta_{\mathbf{p}\sigma_-}; \quad e^- \text{ emission} \tag{2.6}$$

$$i\sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{m}{p^0}}\bar{v}(\mathbf{p},\sigma_+)\eta(-p) = i\eta_{\mathbf{p}\sigma_+}; \quad e^+ \text{ detection} \tag{2.7}$$

$$i\sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{m}{p^0}}\bar{\eta}(-p)v(\mathbf{p},\sigma_+) = i\eta^*_{\mathbf{p}\sigma_+}; \quad e^+ \text{ emission} \tag{2.8}$$

และรูปแบบมาตรฐานของผลรวมสปินทั้งหมดของอิเล็กตรอนและโพสิตรอน สามารถเขียนได้ตามลำดับสมการดังนี้

$$(2m)\sum_\sigma u(\mathbf{p},\sigma)\bar{u}(\mathbf{p},\sigma) = (-\gamma p + m) \tag{2.9}$$

$$(2m)\sum_\sigma v(\mathbf{p},\sigma)\bar{v}(\mathbf{p},\sigma) = -(\gamma p + m) \tag{2.10}$$

โดยที่ $u(\mathbf{p},\sigma)$, $\bar{u}(\mathbf{p},\sigma)$ และ $v(\mathbf{p},\sigma)$, $\bar{v}(\mathbf{p},\sigma)$ แทน four-spinors ของอนุภาคเริ่มต้น, อนุภาคสุดท้าย ของ อิเล็กตรอนและโพสิตรอน ตามลำดับ โดยการแทนสมการที่ (2.5) - (2.10) ลงในสมการที่ (2.4) เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
& ie^2\int\frac{dQ}{(2\pi)^4}\frac{1}{Q^2-i\varepsilon}\int dx_2 e^{i(p_1+p_2-Q)x_2}\int dx'_2 e^{i(-p'_1-p'_2+Q)x'_2} \\
& \times\sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3}\frac{m}{p_2^0}}\, i\eta^*_{\mathbf{p}_2\sigma_2}\bar{v}(\mathbf{p}_2,\sigma_2)\gamma^\mu\sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3}\frac{m}{p_1^0}}\, i\eta_{\mathbf{p}_1\sigma_1}\bar{u}(\mathbf{p}_1,\sigma_1) \\
& \times\sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}'_1}{(2\pi)^3}\frac{m}{p_1'^0}}\, i\eta^*_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1}u(\mathbf{p}'_1,\sigma'_1)\gamma_\mu\sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}'_2}{(2\pi)^3}\frac{m}{p_2'^0}}\, i\eta_{\mathbf{p}'_2\sigma'_2}v(\mathbf{p}'_2,\sigma'_2)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

อินทิเกรต x_2 และ x'_2 เราสามารถเขียนอยู่ในรูปของเดลต้าฟังก์ชันดังนี้

$$\int dx_2 e^{i(p_1+p_2-Q)x_2} = (2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-Q) \tag{2.12}$$

$$\int dx'_2 e^{i(-p'_1-p'_2-Q)x'_2} = (2\pi)^4\delta^4(-p'_1-p'_2+Q) \tag{2.13}$$

จากสมการที่ (2.12) และ (2.13) เราจะได้ว่า

$$ie^2(2\pi)^4\delta(p_1+p_2-k_1-k_2)i\frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2k_1^0}J_\nu(k_1)i\frac{d^3k_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{2k_2^0}J_\mu(k_2)$$

$$\times\, i\frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3}\frac{m}{p_1^0}i\frac{d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3}\frac{m}{p_2^0}\bar{\eta}(p_1)u(p_1,\sigma_1)\bar{u}(p_1,\sigma_1)\left[\gamma^\nu\frac{(-\gamma(k_2-p_2)+m)}{(k_2-p_2)^2+m^2}\gamma^\mu\right]$$

$$\times\, v(p_2,\sigma_2)\bar{v}(p_2,\sigma_2)\eta(-p_2) \qquad (2.14)$$

ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการอธิบายไฟน์แมนไดอะแกรมรูปที่ 2.1 (a) ได้ดังนี้

$$ie^2(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p'_1-p'_2)\sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3}\frac{m}{p_2^0}}\sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3}\frac{m}{p_1^0}}\sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}'_1}{(2\pi)^3}\frac{m}{p_1'^0}}\sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}'_2}{(2\pi)^3}\frac{m}{p_2'^0}}$$

$$\times\, i\eta^*_{\mathbf{p}_2\sigma_2}i\eta^*_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1}i\eta_{\mathbf{p}_1\sigma_1}i\eta_{\mathbf{p}'_2\sigma'_2}[\bar{v}(\mathbf{p}_2,\sigma_2)\gamma^\mu u(\mathbf{p}_1,\sigma_1)][\bar{u}(\mathbf{p}'_1,\sigma'_1)\gamma_\mu v(\mathbf{p}'_2,\sigma'_2)]\frac{1}{(p_1+p_2)^2} \qquad (2.15)$$

เช่นเดียวกันไฟน์แมนไดอะแกรมรูปที่ 2.1 (b) สามารถเขียน vacuum-to-vacuum transition amplitude ในสเปซของตำแหน่ง (coordinate space) ดังนี้

$$ie^2\int(dx)[\bar{\eta}(x_1)S_+(x_1,x_2)\gamma^\mu S_+(x_2,x_3)\eta(x_3)]$$

$$\times\,(dx')[\bar{\eta}(x'_1)S_+(x'_1,x'_2)\gamma^\nu S_+(x'_2,x'_3)\eta(x'_3)]D_{\mu\nu}(x_2,x'_2) \qquad (2.16)$$

เราแปลงสมการที่ (2.16) โดยอาศัย สมการที่ (2.2) และ (2.3) ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการที่ (2.16) ในสเปซโมเมนตัม (momentum space) ได้ดังนี้

$$-\,ie^2\int dx_2e^{i(p_1-p'_1)x_2}dx'_2e^{i(p_2-p'_2)x'_2}\left[i\int\frac{d^3\mathbf{p}'_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p_1'^0}\bar{\eta}(p'_1)(-\gamma p'_1+m)\,\gamma^\mu\right.$$

$$\times\, i\int\frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p_1^0}(-\gamma p_1+m)\eta(p_1)i\int\frac{d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p_2^0}\bar{\eta}(-p_2)(\gamma p_2+m)\gamma^\nu$$

$$\left.\times\, i\int\frac{d^3\mathbf{p}'_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p_2'^0}(\gamma p'_2+m)\eta(-p'_2)\right]D_{\mu\nu}(x_2,x'_2) \qquad (2.17)$$

โดยการแทนสมการที่ (2.5) - (2.10) ลงในสมการที่ (2.17) เราจะได้ว่า

$$ie^2 \int \frac{dQ}{(2\pi)^4} \frac{1}{Q^2 - i\varepsilon} \int dx_2 e^{i(p_1 - p'_1 - Q)x_2} \int dx'_2 e^{i(p_2 - p'_2 + Q)x'_2}$$

$$\times \sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}'_1}{(2\pi)^3} \frac{m}{p_1'^0}} i\eta_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1} \bar{u}(\mathbf{p}'_1, \sigma'_1)\gamma^\mu \sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{m}{p_1^0}} i\eta^*_{\mathbf{p}_1\sigma_1} u(\mathbf{p}_1, \sigma_1)$$

$$\times \sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \frac{m}{p_2^0}} i\eta_{\mathbf{p}_2\sigma_2} \bar{v}(\mathbf{p}_2, \sigma_2)\gamma_\mu \sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}'_2}{(2\pi)^3} \frac{m}{p_2'^0}} i\eta^*_{\mathbf{p}'_2\sigma'_2} v(\mathbf{p}'_2, \sigma'_2) \tag{2.18}$$

จากสมการที่ (2.12) - (2.14) ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการอธิบายไฟน์แมนไดอะแกรมรูปที่ 2.1 (b) ได้ดังนี้

$$- ie^2(2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \frac{m}{p_2^0}} \sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{m}{p_1^0}} \sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}'_1}{(2\pi)^3} \frac{m}{p_1'^0}} \sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}'_2}{(2\pi)^3} \frac{m}{p_2'^0}}$$

$$\times i\eta^*_{\mathbf{p}_2\sigma_2} i\eta^*_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1} i\eta_{\mathbf{p}_1\sigma_1} i\eta_{\mathbf{p}'_2\sigma'_2} [\bar{u}(\mathbf{p}'_1, \sigma'_1)\gamma^\mu u(\mathbf{p}_1, \sigma_1)][\bar{v}(\mathbf{p}_2, \sigma_2)\gamma_\mu v(\mathbf{p}'_2, \sigma'_2)] \frac{1}{(p_1 - p'_1)^2} \tag{2.19}$$

ดังนั้น เราจะได้ transition amplitude ของกระบวนการ เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

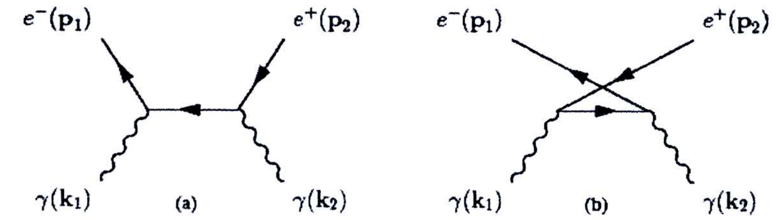
$$ie^2(2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \frac{m}{p_2^0}} \sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{m}{p_1^0}} \sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}'_1}{(2\pi)^3} \frac{m}{p_1'^0}} \sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}'_2}{(2\pi)^3} \frac{m}{p_2'^0}}$$

$$\times i\eta^*_{\mathbf{p}_2\sigma_2} i\eta^*_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1} i\eta_{\mathbf{p}_1\sigma_1} i\eta_{\mathbf{p}'_2\sigma'_2} \left\{ [\bar{v}(\mathbf{p}_2, \sigma_2)\gamma^\mu u(\mathbf{p}_1, \sigma_1)][\bar{u}(\mathbf{p}'_1, \sigma'_1)\gamma_\mu v(\mathbf{p}'_2, \sigma'_2)] \frac{1}{(p_1 + p_2)^2} \right.$$

$$\left. - [\bar{u}(\mathbf{p}'_1, \sigma'_1)\gamma^\mu u(\mathbf{p}_1, \sigma_1)][\bar{v}(\mathbf{p}_2, \sigma_2)\gamma_\mu v(\mathbf{p}'_2, \sigma'_2)] \frac{1}{(p_1 - p'_1)^2} \right\} \tag{2.20}$$

2.2 กระบวนการผลิตคู่อิเล็กตรอน-โพสิตรอนในคิวอีดี

ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณากระบวนการผลิตคู่อิเล็กตรอน-โพสิตรอนจากการชนกันของอิเล็กตรอน-โพสิตรอนในทฤษฎีสนามควอนตัม ซึ่งสามารถเขียนไฟน์แมนไดอะแกรมดังรูปที่ 2.2 แอมปลิจูด (amplitude) ที่สัมพันธ์กับกระบวนการในรูปที่ 2.2 (a) สามารถเขียนเป็นสมการได้ โดยใช้ประโยชน์จาก vacuum-to-vacuum transition amplitude [Yongram, 2006] ซึ่งรูปไฟน์แมนไดอะแกรมรูปที่ 2.2 (a) สามารถเขียน vacuum-to-vacuum transition amplitude ในสแปซ



รูปที่ 2.2: ไฟน์แมนไดอะแกรมของกระบวนการผลิตคู่อิเล็กตรอน-โพสิตรอน

ของตำแหน่ง (coordinate space) ดังนี้

$$ie^2 \int (dx)(dx')(dy)(dz)(dy')(dz')J^{\rho}(x')D_{\nu\rho}(y',x')J^{\alpha}(x)D_{\mu\alpha}(y,x)$$

$$\times\ [\bar{\eta}(z)S_+(z,y)\gamma^{\nu}S_+(y,y')\gamma^{\mu}S_+(y',z')\eta(z')] \tag{2.21}$$

และโดยอาศัยประโยชน์จากการอินทิเกรต

$$\int (\mathrm{d}x')\bar{\eta}(x')S_+(x',x) = i\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{e^{-ipx}}{2p^0}\bar{\eta}(p)(-\gamma p+m), \quad x'^0 > x^0 \tag{2.22}$$

และ

$$\int (\mathrm{d}x')S_+(x',x)\eta(x) = i\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{e^{ipx}}{2p^0}(-\gamma p+m)\eta(p), \quad x'^0 < x^0 \tag{2.23}$$

เราแปลงสมการที่ (2.21) โดยอาศัย สมการที่ (2.22) และ (2.23) ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการที่ (2.21) ในสเปซโมเมนตัม (momentum space) ได้ดังนี้

$$ie^2 \int (dy)e^{i(k_1-p_1)y}(dy')e^{i(k_2-p_2)y'}i\int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2k_1^0}J_{\nu}(k_1)i\int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{2k_2^0}J_{\mu}(k_2)$$

$$\times\, i\int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p_1^0}\bar{\eta}(p_1)(-\gamma p_1+m)\gamma^{\nu} i\int \frac{(dp)}{(2\pi)^4}\frac{e^{i(y-y')p}(-\gamma p+m)}{p^2+m^2}\gamma^{\mu}$$

$$\times\, i\int \frac{d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p_2^0}(\gamma p_2+m)\eta(-p_2) \tag{2.24}$$

ในสมการที่ (2.24) เนื่องจากการอินทิเกรตห่างจากแหล่งกำเนิดมากๆ ดังนั้น อันตรกิริยาที่เกิดขึ้นช้ากว่าการกำเนิดและเร็วกว่าการวัดจากเครื่องวัด ดังนั้นเราจะได้ว่าบริเวณเกิดอันตร

กิริยาอธิบายได้ดังนี้

$$i\sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{m}{p^0}}\bar{\eta}(p)u(\mathbf{p},\sigma_-) = i\eta^*_{\mathbf{p}\sigma_-}; \quad e^- \text{ detection} \tag{2.25}$$

$$i\sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{m}{p^0}}\bar{u}(\mathbf{p},\sigma_-)\eta(p) = i\eta_{\mathbf{p}\sigma_-}; \quad e^- \text{ emission} \tag{2.26}$$

$$i\sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{m}{p^0}}\bar{v}(\mathbf{p},\sigma_+)\eta(-p) = i\eta_{\mathbf{p}\sigma_+}; \quad e^+ \text{ detection} \tag{2.27}$$

$$i\sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{m}{p^0}}\bar{\eta}(-p)v(\mathbf{p},\sigma_+) = i\eta^*_{\mathbf{p}\sigma_+}; \quad e^+ \text{ emission} \tag{2.28}$$

และรูปแบบมาตรฐานของผลรวมสปินทั้งหมดของอิเล็กตรอนและโพสิตรอน สามารถเขียนได้ตามลำดับสมการดังนี้

$$(2m)\sum_\sigma u(\mathbf{p},\sigma)\bar{u}(\mathbf{p},\sigma) = (-\gamma p + m) \tag{2.29}$$

$$(2m)\sum_\sigma v(\mathbf{p},\sigma)\bar{v}(\mathbf{p},\sigma) = -(\gamma p + m) \tag{2.30}$$

โดยที่ $u(\mathbf{p},\sigma)$, $\bar{u}(\mathbf{p},\sigma)$ และ $v(\mathbf{p},\sigma)$, $\bar{v}(\mathbf{p},\sigma)$ แทน four-spinors ของอนุภาคเริ่มต้น, อนุภาคสุดท้าย ของ อิเล็กตรอนและโพสิตรอน ตามลำดับ อินทิเกรต x_2 และ x_2' เราสามารถเขียนอยู่ในรูปของเดลต้าฟังก์ชันดังนี้

$$\int dx_2 e^{i(p_1+p_2-Q)x_2} = (2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-Q) \tag{2.31}$$

$$\int dx'_2 e^{i(-p'_1-p'_2-Q)x'_2} = (2\pi)^4\delta^4(-p_1'-p_2'+Q) \tag{2.32}$$

จากสมการที่ (2.31) และ (2.32) เราจะได้ว่า

$$\int \frac{dQ}{(2\pi)^4}\frac{1}{Q^2}(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-Q)(2\pi)^4\delta^4(-p'_1-p'_2+Q)$$

$$= (2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p'_1-p'_2)\frac{1}{(p_1+p_2)^2} \tag{2.33}$$

โดยการแทนสมการที่ (2.25) - (2.32) ลงในสมการที่ (2.24) เราจะได้ว่า

$$\int \frac{dQ}{(2\pi)^4}\frac{1}{Q^2}(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-Q)(2\pi)^4\delta^4(-p'_1-p'_2+Q)$$

$$= (2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p'_1-p'_2)\frac{1}{(p_1+p_2)^2} \tag{2.34}$$

ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการอธิบายไฟน์แมนไดอะแกรมรูปที่ 2.2 (a) ได้ดังนี้

$$ie^2(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p'_1-p'_2)\sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3}\frac{m}{p_2^0}}\sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3}\frac{m}{p_1^0}}\sqrt{\frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{k_1^0}}\sqrt{\frac{d^3k_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{k_2^0}}$$

$$\times J_{k_1\lambda}J_{k_2\lambda}\eta^*_{\mathbf{p}_2\sigma_2}\eta^*_{\mathbf{p}_1\sigma_1}\bar{u}(\mathbf{p}_1,\sigma_1)\left[e_\nu\gamma^\nu\frac{(-\gamma(k_2-p_2)+m)}{(k_2-p_2)^2+m^2}\gamma^\mu e_\mu\right]v(\mathbf{p}_2,\sigma_2) \quad (2.35)$$

เช่นเดียวกันไฟน์แมนไดอะแกรมรูปที่ 2.2 (b) สามารถเขียน vacuum-to-vacuum transition amplitude ในสแปซของตำแหน่ง (coordinate space) ดังนี้

$$ie^2\int(dx)(dx')(dy)(dz)(dy')(dz')J^\rho(x')D_{\nu\alpha}(y,x)J^\alpha(x)D_{\mu\rho}(y',x')$$

$$\times[\bar{\eta}(z)S_+(z,y')\gamma^\mu S_+(y',y)\gamma^\nu S_+(y,z')\eta(z')] \quad (2.36)$$

เราแปลงสมการที่ (2.36) โดยอาศัย สมการที่ (2.22) และ (2.23) ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการที่ (2.36) ในสเปซโมเมนตัม (momentum space) ได้ดังนี้

$$ie^2\int(dy)e^{i(k_1-p_2)y}(dy')e^{i(k_2-p_1)y'}i\int\frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2k_1^0}J_\nu(k_1)i\int\frac{d^3k_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{2k_2^0}J_\mu(k_2)$$

$$\times i\int\frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p_1^0}\bar{\eta}(p_1)(-\gamma p_1+m)\gamma^\mu i\int\frac{(dp)}{(2\pi)^4}\frac{e^{ip(y'-y)}(-\gamma p+m)}{p^2+m^2}\gamma^\nu$$

$$\times i\int\frac{d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p_2^0}(\gamma p_2+m)\eta(-p_2) \quad (2.37)$$

โดยการแทนสมการที่ (2.25) - (2.30) ลงในสมการที่ (2.37) เราจะได้ว่า

$$ie^2(2\pi)^4\delta(p_1+p_2-k_1-k_2)i\frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2k_1^0}J_\nu(k_1)i\frac{d^3k_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{2k_2^0}J_\mu(k_2)$$

$$\times i\frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3}\frac{m}{p_1^0}i\frac{d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3}\frac{m}{p_2^0}\bar{\eta}(p_1)u(p_1,\sigma_1)\bar{u}(p_1,\sigma_1)\left[\gamma^\mu\frac{(-\gamma(k_1-p_2)+m)}{(k_1-p_2)^2+m^2}\gamma^\nu\right]$$

$$\times v(p_2,\sigma_2)\bar{v}(p_2,\sigma_2)\eta(-p_2) \quad (2.38)$$

จากสมการที่ (2.32) - (2.34) ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการอธิบายไฟน์แมนไดอะแกรมรูปที่ 2.2(b) ได้ดังนี้

$$ie^2(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p'_1-p'_2)\sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3}\frac{m}{p_2^0}}\sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3}\frac{m}{p_1^0}}\sqrt{\frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{k_1^0}}\sqrt{\frac{d^3k_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{k_2^0}}$$

$$\times J_{k_1\lambda}J_{k_2\lambda}\eta^*_{\mathbf{p}_2\sigma_2}\eta^*_{\mathbf{p}_1\sigma_1}\bar{u}(\mathbf{p}_1,\sigma_1)\left[e_\mu\gamma^\mu\frac{(-\gamma(k_1-p_2)+m)}{(k_1-p_2)^2+m^2}\gamma^\nu e_\nu\right]v(\mathbf{p}_2,\sigma_2) \quad (2.39)$$

ดังนั้น เราจะได้ transition amplitude ของกระบวนการ เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$ie^2(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p'_1-p'_2)\sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3}\frac{m}{p_2^0}}\sqrt{\frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3}\frac{m}{p_1^0}}\sqrt{\frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{k_1^0}}\sqrt{\frac{d^3k_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{k_2^0}}J_{k_1\lambda}J_{k_2\lambda}$$

$$\times\, \eta^*_{\mathbf{p}_2\sigma_2}\eta^*_{\mathbf{p}_1\sigma_1}\bar{u}(\mathbf{p}_1,\sigma_1)\left[\gamma^\mu\frac{(-\gamma(k_1-p_2)+m)}{(k_1-p_2)^2+m^2}\gamma^\nu+\gamma^\nu\frac{(-\gamma(k_2-p_2)+m)}{(k_2-p_2)^2+m^2}\gamma^\mu\right]v(\mathbf{p}_2,\sigma_2)e_\mu e_\nu \tag{2.40}$$