บทความวิจัย (Research Article)

สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 5^y \cdot 7^z = u^2$

On the Diophantine Equation $3^x + 5^y \cdot 7^z = u^2$

ศิริจันทร์ เวสารัชศาต*, อาซีดีน มะกูวิง, ณัฏฐ์ วสุรักขะ และ กิตติศักดิ์ ภัทรจิตรา

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

ศูนย์รังสิต ตำบลคลองหนึ่ง อำเภอคลองหลวง จังหวัดปทุมธานี 12120

Sirichan Vesarachasart*, Asidin Makuwing, Nat Wasurakka and Kittisak Phattharachittra

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University,

Rangsit centre, Khlong Nueng, Khlong Luang, Pathum Thani 12120

Received: November 28, 2018; Accepted: December 13, 2018

บทคัดย่อ

จุดประสงค์ของงานวิจัยนี้เพื่อแสดงว่า สมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 5^y \cdot 7^z = u^2$ มีผลเฉลย (x, y, z, u) ที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบเพียง 4 ชุดเท่านั้น ได้แก่ $(1, 0, 0, 2)$, $(2, 0, 1, 4)$, $(4, 2, 1, 16)$ และ $(14, 4, 1, 2188)$

คำสำคัญ : สมการไดโอแฟนไทน์; ส่วนตกค้างกำลังสอง; สัญลักษณ์เลอช็องดร์; ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบ

Abstract

The purpose of this research is to show that the Diophantine equation $3^x + 5^y \cdot 7^z = u^2$ has only four non-negative integer solutions (x, y, z, u), which are , $(1, 0, 0, 2)$, $(2, 0, 1, 4)$, $(4, 2, 1, 16)$ and $(14, 4, 1, 2188)$.

Keywords: diophantine equation; quadratic residue; Legendre symbol; non-negative integer solution

1. คำนำ

ในทศวรรษที่ผ่านมามีผู้ให้ความสนใจศึกษาปัญหาเกี่ยวกับสมการไดโอแฟนไทน์เป็นอย่างมาก นักวิจัยจำนวนมากได้ศึกษาหาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ในหลากหลายสมการ ตัวอย่าง เช่น ปี ค.ศ. 2012 Sroysang ได้หาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 5^y = z^2$ ซึ่งพบว่าสมการนี้มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบ (x, y, z) เพียงผลเฉลยเดียว คือ $(1, 0, 2)$

ต่อมาในปี ค.ศ. 2013 Rabago ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์สองสมการ คือ $3^x + 19^y = z^2$ และ $3^x + 91^y = z^2$ ซึ่งพบว่าผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบ (x, y, z) ของสมการ $3^x + 19^y = z^2$ คือ $(1, 0, 2)$ และ $(4, 1, 10)$ ส่วน

**Corresponding author: sirichan@mathstat.sci.tu.ac.th*

สมการ $3^x + 91^y = z^2$ มีผลเฉลยเป็น $(1,0,2)$ และ $(2,1,10)$

หลังจากนั้นในปี ค.ศ. 2015 Xu และ Deng ได้ศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 5^y \cdot 19^z = u^2$ เมื่อ x, y, z และ u เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบ จากการศึกษาพวกเขาพบว่าสมการนี้มีผลเฉลย (x, y, z, u) ทั้งหมด 3 ชุด ได้แก่ $(1,0,0,2)$, $(4,0,1,10)$ และ $(2,2,1,22)$

ถัดมาในปี ค.ศ. 2016 Rabago ก็ได้ศึกษาผลเฉลยของสมการ $2^x + 17^y = z^2$ และพบว่าสมการนี้มีผลเฉลย (x, y, z) เพียงแค่ห้าชุด คือ $(3,1,5)$, $(5,1,7)$, $(6,1,9)$, $(7,3,71)$ และ $(9,1,23)$ ต่อมาในปี ค.ศ. 2017 Asthana และ Singh ได้หาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 13^y = z^2$ ซึ่งพบว่ามีเพียง $(x, y, z) = (1,0,2)$, $(1,1,4)$, $(3,2,14)$ และ $(5,1,16)$ ที่เป็นผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์นี้

สำหรับในบทความวิจัยนี้เราสนใจศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 5^y \cdot 7^z = u^2$ เมื่อ x, y, z และ u เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบ และพบว่าผลเฉลยที่สอดคล้องกับสมการไดโอแฟนไทน์นี้มีเพียงแค่ 4 ชุดเท่านั้น คือ $(x, y, z, u) = (1,0,0,2)$, $(2,0,1,4)$, $(4,2,1,16)$ และ $(14,4,1,2188)$

2. ความรู้พื้นฐาน

หัวข้อนี้กล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีบทสำคัญที่ได้นำมาใช้ในงานวิจัยนี้ โดยไม่ได้พิสูจน์ทฤษฎีบท แต่ผู้สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากเอกสารอ้างอิง

บทนิยาม 2.1 (Burton, 2007) ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะซึ่งเป็นจำนวนเต็มคี่ และ a เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $(a, p) = 1$ จะกล่าวว่า a เป็นส่วนตกค้างกำลังสอง (quadratic residue) ของ p ถ้ามีจำนวนเต็ม $x \in \{1, 2, 3, \ldots, p-1\}$ ที่ทำให้ $x^2 \equiv a \pmod{p}$

บทนิยาม 2.2 (Burton, 2007) ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะซึ่งเป็นจำนวนเต็มคี่ และ a เป็นจำนวนเต็มที่ $(a, p) = 1$ สัญลักษณ์เลอช็องดร์ (Legendre symbol) (a/p) นิยามดังนี้

$$(a/p) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } a \text{ เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ } p \\ -1 & \text{ถ้า } a \text{ ไม่เป็นส่วนตกค้างกำลังสองของ } p \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 2.1 (Burton, 2007) ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะซึ่งเป็นจำนวนเต็มคี่ a และ b เป็นจำนวนเต็มใด ๆ แล้วสัญลักษณ์เลอช็องดร์มีสมบัติดังนี้

(1) ถ้า $a \equiv b \pmod{p}$ แล้ว $(a/p) = (b/p)$

(2) $(a^2/p) = 1$

(3) $(a/p) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$

(4) $(ab/p) = (a/p)(b/p)$

(5) $(1/p) = 1$ และ $(-1/p) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$

และผลจากทฤษฎีบท 2.1 จะได้ว่า $(a^n/p) = (a/p)^n$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ

ทฤษฎีบท 2.2 (Rabago, 2013) ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบ (x, z) เพียงผลเฉลยเดียวของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x + 1 = z^2$ คือ $(1,2)$

3. ผลการศึกษา

การศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์

$$3^x + 5^y \cdot 7^z = u^2 \tag{1}$$

เมื่อ x, y, z และ u เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบ พบว่าเราสามารถหาผลเฉลยของ (1) ได้ ซึ่งผลเฉลยจะมีเพียงแค่สี่ชุดเท่านั้น ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1 สมการไดโอแฟนไทน์ (1) มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบเพียงแค่ 4 ชุด เท่านั้น คือ $(x, y, z, u) = (1,0,0,2)$,

$(2,0,1,4)$, $(4,2,1,16)$ และ $(14,4,1,2188)$

พิสูจน์ แบ่งการพิจารณาสมการไดโอแฟนไทน์ (1) ออกเป็น 4 กรณี ดังนี้

กรณี1 ถ้า $y=0=z$ จาก (1) จะได้ $3^x+1=u^2$ โดยทฤษฎีบท 2.2 ได้ว่า $x=1$ และ $u=2$ ดังนั้นผลเฉลยของ (1) สำหรับกรณีนี้ คือ $(x,y,z,u)=(1,0,0,2)$

กรณี 2 ถ้า $y=0$ และ $z>0$ จาก (1) จะได้

$$3^x+7^z=u^2 \tag{2}$$

จาก (2) ได้ว่า $3^x-u^2=-7^z$ จึงทำให้ $3^x\equiv u^2 \pmod 7$ โดยอาศัยบทนิยาม 2.2 และทฤษฎีบท 2.1 จะได้ $(-1)^x=(3/7)^x=(3^x/7)=(u^2/7)=1$ ดังนั้น x เป็นจำนวนเต็มคู่ สมมติให้ $x=2x_1$ เมื่อ x_1 เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ เมื่อแทนลงใน (2) จะได้ $3^{2x_1}+7^z=u^2$ หรือ $u^2-3^{2x_1}=7^z$ ทำให้ได้ว่า $(u-3^{x_1})(u+3^{x_1})=7^z$ เนื่องจาก 7 เป็นจำนวนเฉพาะ จึงได้ว่าจะมีจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ a และ b ที่ทำให้ $u+3^{x_1}=7^a$ และ $u-3^{x_1}=7^b$ โดยที่ $a>b\ge 0$ และ $a+b=z$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $2\cdot 3^{x_1}=7^a-7^b=7^b(7^{a-b}-1)$ เราจึงได้ $b=0$ ดังนั้น $u-3^{x_1}=1,\ u+3^{x_1}=7^z$ และได้ว่า

$$2\cdot 3^{x_1}=7^z-1 \tag{3}$$

จาก (3) ถ้า $z=1$ แล้วจะได้ $x_1=1$ และ $u=4$ ดังนั้นผลเฉลย (x,y,z,u) ของ (1) กรณีที่ $z=1$ ก็คือ $(2,0,1,4)$ ส่วนกรณี $z>1$ โดยอาศัยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $7^z-1=(7-1)(7^{z-1}+7^{z-2}+\cdots+7+1)=(7-1)\sum_{i=0}^{z-1}7^i$ เนื่องจาก $7^z\equiv 1 \pmod 3$ ทำให้ $7^{z-1}+7^{z-2}+\cdots+7+1\equiv 1+1+\cdots+1+1\equiv z \pmod 3$ และจาก (3) ยังได้อีกว่า $2\cdot 3^{x_1}=7^z-1\equiv (7-1)z \pmod 3$ นั่นคือ $z\equiv 0 \pmod 3$ จึงสมมติให้ $z=3z_1$ เมื่อ z_1 เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น $2\cdot 3^{x_1}=7^z-1=7^{3z_1}-1=(7^3-1)\sum_{i=0}^{z_1-1}(7^3)^i=2\cdot 3^2\cdot 19\sum_{i=0}^{z_1-1}(7^3)^i$ ซึ่งทำให้ (1) ไม่มีผลเฉลยสำหรับกรณีนี้ สรุปได้ว่าสำหรับกรณี $y=0$ และ $z>0$ ได้ผลเฉลยของ (1) คือ $(x,y,z,u)=(2,0,1,4)$

กรณี 3 ถ้า $y>0$ และ $z=0$ จาก (1) จะได้

$$3^x+5^y=u^2 \tag{4}$$

จาก (4) จะได้ $3^x\equiv u^2 \pmod 5$ โดยอาศัยบทนิยาม 2.2 และทฤษฎีบท 2.1 จะได้ $(-1)^x=(3/5)^x=(3^x/5)=(u^2/5)=1$ สมมติให้ $x=2x_2$ เมื่อ x_2 เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ แทนลงใน (4) ได้ $9^{x_2}+5^y=u^2$ เนื่องจาก $9^{x_2}+5^y\equiv 2 \pmod 4$ แต่ $u^2\equiv 0,1 \pmod 4$ จึงทำให้สมการ (1) ไม่มีผลเฉลยสำหรับกรณีนี้

กรณี 4 ถ้า $y,z>0$ ในทำนองเดียวกันกับกรณี 2 และ 3 จึงสมมติให้ $x=2x_3$ เมื่อ x_3 เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ จาก (1) จะได้ $3^{2x_3}+5^y\cdot 7^z=u^2$ ดังนั้น $(u-3^{x_3})(u+3^{x_3})=5^y\cdot 7^z$ แบ่งการพิจารณาออกได้ทั้งหมดอีก 4 กรณี ดังนี้

กรณี 4.1 ให้ $u-3^{x_3}=1$ และ $u+3^{x_3}=5^y\cdot 7^z$ จะได้

$$2\cdot 3^{x_3}=5^y\cdot 7^z-1 \tag{5}$$

จาก (5) พบว่า $2\cdot 3^{x_3}\equiv 0 \pmod 3$ และ $5^y\cdot 7^z-1\equiv 2^y-1 \pmod 3$ ถ้า $y\equiv 1 \pmod 2$ แล้วทำให้ $5^y\cdot 7^z-1\equiv 1 \pmod 3$ ซึ่งทำให้ (5) ไม่มีผลเฉลย จึงได้ $y\equiv 0 \pmod 2$ ในทำนองเดียวกันเมื่อพิจารณา (5) ภายใต้การมอดุโล 4 และ 8 ทำให้ได้ $z\equiv 1 \pmod 2$ และ $x_3\equiv 1 \pmod 2$ ตามลำดับ ดังนั้น $x_3\equiv 1 \pmod 2$, $y\equiv 0 \pmod 2$ และ $z\equiv 1 \pmod 2$ ซึ่งทำให้ $x_3\equiv 1,3,5,7 \pmod 8$, $y\equiv 0,2,4,6 \pmod 8$ และ $z\equiv 1,3,5,7 \pmod 8$ จากนั้นพิจารณากรณีย่อยตามกรณีของ x_3 พบว่า ถ้า $x_3\equiv 1,5 \pmod 8$ แล้วเมื่อพิจารณา (5) ภายใต้การมอดุโล 5 จะทำให้ (5) ไม่มีผลเฉลย ดังนั้น

$x_3 \equiv 3,7 \pmod 8$ ต่อมาเนื่องจาก $y \equiv 0,2,4,6 \pmod 8$, $z \equiv 1,3,5,7 \pmod 8$ และ $x_3 \equiv 3,7 \pmod 8$ ทำให้ได้ว่า

$y \equiv 0,2,4,6,8,10 \pmod{12}$,

$z \equiv 1,3,5,7,9,11 \pmod{12}$ และ

$x_3 \equiv 3,7,11 \pmod{12}$

ถ้า $x_3 \equiv 3,11 \pmod{12}$ แล้วเมื่อพิจารณา (5) ภายใต้การมอดุโล 7 จะได้ว่า $2 \cdot 3^{x_3} \equiv 3,5 \pmod 7$ แต่ $5^y \cdot 7^z - 1 \equiv 6 \pmod 7$ ทำให้ (5) ไม่มีผลเฉลย ดังนั้น $x_3 \equiv 7 \pmod{12}$ ในทำนองเดียวกัน พิจารณา (5) ภายใต้การมอดุโล 13, 9 และ 16 โดยที่ $x_3 \equiv 7 \pmod{12}$, $y \equiv 0,2,4,6,8,10 \pmod{12}$ และ $z \equiv 1,3,5,7,9,11 \pmod{12}$ จะได้ว่า $y \equiv 4 \pmod{12}$ และ $z \equiv 1 \pmod{12}$ ต่อไปจะแสดงว่า $z = 1$ สมมติว่า $z > 1$ จาก $x_3 \equiv 7 \pmod{12}$, $y \equiv 4 \pmod{12}$ และ $z \equiv 1 \pmod{12}$ ทำให้ได้

$x_3 \equiv 1,7,13,19,25,31,37 \pmod{42}$,

$y \equiv 4,10,16,22,28,34,40 \pmod{42}$ และ

$z \equiv 1,7,13,19,25,31,37 \pmod{42}$

พิจารณา (5) ภายใต้การมอดุโล 43 เมื่อ x_3 และ y เป็นตามกรณีย่อยข้างต้น พบว่า $2 \cdot 3^{x_3} \equiv 6,10,23,24,40 \pmod{43}$ เมื่อ $x_3 \equiv 1,13,25,31,37 \pmod{42}$ และ $5^y \cdot 7^z - 1 \equiv 1,7,21,26,41 \pmod{43}$ เมื่อ $y \equiv 16,22,28,34,40 \pmod{42}$ ซึ่งทำให้ (5) ไม่มีผลเฉลย จึงเหลือเพียงสองกรณีเท่านั้นที่สอดคล้องกับ (5) คือ $x_3 \equiv 7 \pmod{42}$, $y \equiv 4 \pmod{42}$ หรือ $x_3 \equiv 19 \pmod{42}$, $y \equiv 10 \pmod{42}$ เมื่อพิจารณา x_3 ที่เป็นไปตามสองกรณีข้างต้นจะได้ $2 \cdot 3^{x_3} \equiv 13,27 \pmod{49}$ แต่เนื่องจาก $z > 1$ ทำให้ได้ว่า $7^z \equiv 0 \pmod{49}$ ซึ่งทำให้ $5^y \cdot 7^z - 1 \equiv 48 \pmod{49}$ ดังนั้น (5) ไม่มีผลเฉลย จึงสรุปว่า $z = 1$ และเมื่อแทนลงใน (5) จะได้

$$2 \cdot 3^{x_3} + 1 = 7 \cdot 5^y \tag{6}$$

ต่อไปจะแสดงว่า $y = 4$ โดยสมมติให้ $y > 4$ จะได้ $7 \cdot 5^y \equiv 0 \pmod{3125}$ จึงทำให้ (6) ไม่มีผลเฉลย ดังนั้น $y = 4$ เมื่อแทนลงใน (6) จะได้ $x_3 = 7$ และจาก (1) จะได้ $u = 2188$ ดังนั้นผลเฉลยของ (1) ในกรณีนี้ คือ $(x,y,z,u) = (14,4,1,2188)$

กรณี 4.2 ให้ $u - 3^{x_3} = 5^y$ และ $u + 3^{x_3} = 7^z$ จะได้

$$2 \cdot 3^{x_3} = 7^z - 5^y \tag{7}$$

ทำนองเดียวกันกับกรณี 4.1 เมื่อพิจารณา (7) ภายใต้การมอดุโล 3, 4 และ 8 จะได้ $y \equiv 0 \pmod 2$, $z \equiv 1 \pmod 2$ และ $x_3 \equiv 1 \pmod 2$ เนื่องจาก $2 \cdot 3^{x_3} \equiv 1,4 \pmod 5$ แต่ $7^z - 5^y \equiv 2,3 \pmod 5$ จึงได้ว่า (7) ไม่มีผลเฉลย ดังนั้นสำหรับกรณีนี้ (1) จึงไม่มีผลเฉลย

กรณี 4.3 ให้ $u - 3^{x_3} = 7^z$ และ $u + 3^{x_3} = 5^y$ จะได้

$$2 \cdot 3^{x_3} = 5^y - 7^z \tag{8}$$

ในทำนองเดียวกับกรณี 4.1 และ 4.2 เมื่อพิจารณา (8) ภายใต้การมอดุโล 3, 4 และ 8 จะได้ $y \equiv 0 \pmod 2$, $z \equiv 1 \pmod 2$ และ $x_3 \equiv 0 \pmod 2$ ถ้า $x_3 = 0$ แล้วจาก (8) ได้ว่า $2 = 5^y - 7^z$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ต่อไปจะแสดงว่า $x_3 = 2$ สมมติให้ $x_3 > 2$ เนื่องจาก $y \equiv 0 \pmod 2$, $z \equiv 1 \pmod 2$ และ $x_3 \equiv 0 \pmod 2$ ทำให้ได้ $y \equiv 0,2,4,6,8,10,12,14,16 \pmod{18}$, $z \equiv 1,3,5,7,9,11,13,15,17 \pmod{18}$ และ $x_3 \equiv 0,2,4,6,8,10,12,14,16 \pmod{18}$ ตามลำดับ

เมื่อพิจารณา (8) ภายใต้การมอดุโล 76 พบว่ามีกรณีย่อยที่สอดคล้องกับ (8) ทั้งหมด 12 กรณีย่อย ดังนี้

$x_3 \equiv 0 \pmod{18}$, $y \equiv 14 \pmod{18}$, $z \equiv 1,7,13 \pmod{18}$,

$x_3 \equiv 2 \pmod{18}$, $y \equiv 2 \pmod{18}$, $z \equiv 1,7,13 \pmod{18}$,

$x_3 \equiv 4 \pmod{18}$, $y \equiv 4 \pmod{18}$, $z \equiv 1,7,13 \pmod{18}$,

$x_3 \equiv 4 \pmod{18}$, $y \equiv 12 \pmod{18}$, $z \equiv 3,9,15 \pmod{18}$,

$x_3 \equiv 6\,(\mathrm{mod}\,18),\ y \equiv 2\,(\mathrm{mod}\,18),\ z \equiv 5,11,17\,(\mathrm{mod}\,18)$,
$x_3 \equiv 8\,(\mathrm{mod}\,18),\ y \equiv 8\,(\mathrm{mod}\,18),\ z \equiv 5,11,17\,(\mathrm{mod}\,18)$,
$x_3 \equiv 10\,(\mathrm{mod}\,18),\ y \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,18),\ z \equiv 1,7,13\,(\mathrm{mod}\,18)$,
$x_3 \equiv 10\,(\mathrm{mod}\,18),\ y \equiv 10\,(\mathrm{mod}\,18),\ z \equiv 5,11,17\,(\mathrm{mod}\,18)$,
$x_3 \equiv 12\,(\mathrm{mod}\,18),\ y \equiv 8\,(\mathrm{mod}\,18),\ z \equiv 3,9,15\,(\mathrm{mod}\,18)$,
$x_3 \equiv 14\,(\mathrm{mod}\,18),\ y \equiv 14\,(\mathrm{mod}\,18),\ z \equiv 3,9,15\,(\mathrm{mod}\,18)$,
$x_3 \equiv 16\,(\mathrm{mod}\,18), y \equiv 6\,(\mathrm{mod}\,18),\ z \equiv 5,11,17(\mathrm{mod}\,18)$ และ
$x_3 \equiv 16\,(\mathrm{mod}\,18),\ y \equiv 16\,(\mathrm{mod}\,18),\quad z \equiv 3,9,15\,(\mathrm{mod}\,18)$

พิจารณา (8) ภายใต้การมอดุโล 7 เมื่อ x_3, y และ z เป็นไปตามกรณีข้างต้น พบว่าถ้า $x_3 \equiv 0,6,12\,(\mathrm{mod}\,18)$ และ $y \equiv 4,10,16\,(\mathrm{mod}\,18)$ แล้ว (8) ไม่มีผลเฉลย สำหรับกรณีที่เหลือซึ่งสอดคล้องกับ (8) ทำให้ได้ $x_3 \equiv 2,20\,(\mathrm{mod}\,36)$, $y \equiv 2,20\,(\mathrm{mod}\,36),\ z \equiv 1,7,13,19,25,31\,(\mathrm{mod}\,36)$; $x_3 \equiv 4,22\,(\mathrm{mod}\,36),\ y \equiv 12,30\,(\mathrm{mod}\,36)$, $z \equiv 3,9,15,21,27,33\,(\mathrm{mod}\,36)$; $x_3 \equiv 8,26\,(\mathrm{mod}\,36)$, $y \equiv 8,26\,(\mathrm{mod}\,36),\ z \equiv 5,11,17,23,29,35\,(\mathrm{mod}\,36)$; $x_3 \equiv 10,28\,(\mathrm{mod}\,36),\ y \equiv 0,18\,(\mathrm{mod}\,36)$, $z \equiv 1,7,13,19,25,31\,(\mathrm{mod}\,36)$; $x_3 \equiv 14,32\,(\mathrm{mod}\,36)$, $y \equiv 14,32\,(\mathrm{mod}\,36),\ z \equiv 3,9,15,21,27,33\,(\mathrm{mod}\,36)$ และ $x_3 \equiv 16,34\,(\mathrm{mod}\,36),\ y \equiv 6,24\,(\mathrm{mod}\,36)$, $z \equiv 5,11,17,23,29,35\,(\mathrm{mod}\,36)$

ในทำนองเดียวกันพิจารณา (8) ภายใต้การมอดุโล 37 เมื่อ x_3, y และ z เป็นตาม 6 กรณีนี้ พบว่าจะเหลือเพียงสองกรณีเท่านั้นที่สอดคล้องกับ (8) ได้แก่ $x_3 \equiv 2,20\,(\mathrm{mod}\,36), y \equiv 2\,(\mathrm{mod}\,36)$, $z \equiv 1,19\,(\mathrm{mod}\,36)$ และ $x_3 \equiv 10,28\,(\mathrm{mod}\,36)$, $y \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,36), z \equiv 1,19\,(\mathrm{mod}\,36)$ พิจารณาทั้ง 2 กรณีย่อย ดังต่อไปนี้

กรณี 4.3.1 ให้ $x_3 \equiv 2,20\,(\mathrm{mod}\,36), y \equiv 2\,(\mathrm{mod}\,36)$ และ $z \equiv 1,19\,(\mathrm{mod}\,36)$ เนื่องจาก $2 \cdot 3^{x_3} \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,27)$ แต่ $5^y - 7^z \equiv 18\,(\mathrm{mod}\,27)$ จึงทำให้ (8) ไม่มีผลเฉลย

กรณี 4.3.2 ให้ $x_3 \equiv 10,28\,(\mathrm{mod}\,36), y \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,36)$ และ $z \equiv 1,19\,(\mathrm{mod}\,36)$ เนื่องจาก $2 \cdot 3^{x_3} \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,27)$ แต่ $5^y - 7^z \equiv 21\,(\mathrm{mod}\,27)$ จึงทำให้ (8) ไม่มีผลเฉลย

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $x_3 = 2$ เมื่อแทนลงใน (8) จะได้

$$18 = 5^y - 7^z \qquad (9)$$

เนื่องจาก $y \equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 2)$ และ $z \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$ จะได้ $y \equiv 0,2,4,\ldots,58\,(\mathrm{mod}\ 60)$ และ $z \equiv 1,3,5,\ldots,59\,(\mathrm{mod}\ 60)$ ถ้า $y \equiv 0,4,8,12,16,20,24,28,32,36,40,44,48,52,56\,(\mathrm{mod}\ 60)$ แล้วจะได้ $5^y - 7^z \equiv 10(\mathrm{mod}\,16)$ ซึ่งทำให้ (9) ไม่มีผลเฉลย ดังนั้น $y \equiv 2,6,10,14,18,22,26,30,34,38,42,46,50,54,58\,(\mathrm{mod}\ 60)$ ถ้า $z \equiv 3,5,7,9,11,15,17,19,21,23,27,29,31,33,35,39,41,43,45,47,51,53,55,57,59\,(\mathrm{mod}\ 60)$ แล้ว $5^y - 7^z \equiv 4,6,10,14,20\,(\mathrm{mod}\,26)$ ทำให้ (9) ไม่มีผลเฉลย ดังนั้น $z \equiv 1,13,25,37,49\,(\mathrm{mod}\ 60)$ ในทำนองเดียวกัน พิจารณา (9) ภายใต้การมอดุโล 61 จะได้กรณีย่อยที่เป็นไปได้ทั้งหมดสี่กรณีดังนี้

$y \equiv 2\,(\mathrm{mod}\,60), z \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,60)$,

$y \equiv 14\,(\mathrm{mod}\,60), z \equiv 13\,(\mathrm{mod}\,60)$,

$y \equiv 18\,(\mathrm{mod}\,60), z \equiv 25\,(\mathrm{mod}\,60)$

และ $y \equiv 42\,(\mathrm{mod}\,60), z \equiv 49\,(\mathrm{mod}\,60)$

สำหรับกรณี $y \equiv 14\,(\mathrm{mod}\,60), z \equiv 13\,(\mathrm{mod}\,60)$ และกรณี $y \equiv 18\,(\mathrm{mod}\,60), z \equiv 25\,(\mathrm{mod}\,60)$ จะได้ว่า $5^y - 7^z \equiv 6,38\,(\mathrm{mod}\,62)$ ซึ่งทำให้ (9) ไม่มีผลเฉลย ส่วนถ้า $y \equiv 42\,(\mathrm{mod}\,60), z \equiv 49\,(\mathrm{mod}\,60)$ แล้ว $5^y - 7^z \equiv 6\,(\mathrm{mod}\,66)$ จึงทำให้ (9) ไม่มีผลเฉลยเช่นกัน ดังนั้น $y \equiv 2\,(\mathrm{mod}\,60), z \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,60)$

ให้ $y = 60m + 2$ และ $z = 60n + 1$ สำหรับบางจำนวนเต็ม m และ n ที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ จาก (9) ได้ว่า $5^{60m+2} - 7^{60n+1} = 18$ หรือ $25 \cdot 5^{60m} - 7 \cdot 7^{60n} = 25 - 7$ ทำให้ได้ว่า

$$25(5^{60m}-1)=7(7^{60n}-1) \qquad (10)$$

เนื่องจาก $7^{60n}-1\equiv 0 \pmod{125}$ จึงได้ $7^{60n}-1=125k$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k และยังได้อีกว่า $25(5^{60m}-1)=7(125k)=875k$ ดังนั้น $5^{60m}-1=35k$ ทำให้ได้ $m=0$ เมื่อแทนลงใน (10) จะได้ $7^{60n}=1$ นั่นคือ $n=0$ ซึ่งทำให้ $y=2$ และ $z=1$ จาก (1) จะได้ $u=16$ ดังนั้นผลเฉลยของ (1) ก็คือ $(x,y,z,u)=(4,2,1,16)$

กรณี 4.4 ถ้าให้ $u-3^{x_3}=5^y\cdot 7^z$ และ $u+3^{x_3}=1$ แล้ว $2\cdot 3^{x_3}=1-5^y\cdot 7^z$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง จึงทำให้ (1) ไม่มีผลเฉลยสำหรับกรณีนี้

จากกรณี 4.1-4.4 เราสรุปได้ว่าสำหรับกรณี 4 ถ้า $y,z>0$ แล้ว (1) มีผลเฉลย (x,y,z,u) ทั้งหมด 2 ชุด ได้แก่ $(4,2,1,16)$ และ $(14,4,1,2188)$

นอกจากนี้เราสามารถนำผลที่ได้จากทฤษฎีบท 3.1 มาพิจารณาผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์บางสมการได้ดังบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 3.2 ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มไม่เป็นจำนวนลบ (x,y,z) ของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x+5^y=z^2$ คือ $(1,0,2)$

พิสูจน์ แทน $z=0$ และ $u=z$ ลงในทฤษฎีบท 3.1 ซึ่งผลเฉลยที่ได้ยังคงสอดคล้องกับผลการศึกษาในรายการอ้างอิง (Sroysang, 2012)

บทแทรก 3.3 ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มไม่เป็นจำนวนลบ (x,y,z) ของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x+7^y=z^2$ คือ $(2,1,4)$

พิสูจน์ แทน $y=0$ และ $u=z$ ลงในทฤษฎีบท 3.1 จะได้ผลเฉลย $(x,y,z)=(2,1,4)$

บทแทรก 3.4 ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มไม่เป็นจำนวนลบ (x,y,z) ของสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x+7\cdot 5^y=z^2$ คือ $(4,2,16)$ และ $(14,4,2188)$

พิสูจน์ แทน $z=1$ และ $u=z$ ลงในทฤษฎีบท 3.1 จะได้ผลเฉลย $(x,y,z)=(4,2,16)$, $(14,4,2188)$

4. สรุปผลการศึกษา

การศึกษานี้พบว่าสมการไดโอแฟนไทน์ $3^x+5^y\cdot 7^z=u^2$ เมื่อ x,y,z และ u เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบ มีผลเฉลยทั้งหมด 4 ชุดเท่านั้น คือ $(1,0,0,2)$, $(2,0,1,4)$, $(4,2,1,16)$ และ $(14,4,1,2188)$

5. รายการอ้างอิง

Asthana, S. and Singh, M.M., 2017, On the Diophantine equation $3^x+13^y=z^2$, Int. J. Pure Appl. Math. 114: 301-304.

Burton, D.M., 2007, Elementary Number Theory, 6th Ed., McGraw-Hill Companies, Inc., New York.

Rabago, J.F.T., 2016, On the Diophantine equation $2^x+17^y=z^2$, J. Indonesian Math. Soc. 22(2): 85-88.

Rabago, J.F.T., 2013, On two Diophantine equations $3^x+19^y=z^2$ and $3^x+91^y=z^2$, Int. J. Math. Sci. Comput. 3(1): 28-29.

Sroysang, B., 2012, On the Diophantine equation $3^x+5^y=z^2$, Int. J. Pure Appl. Math. 81: 605-608.

Xu, A.J. and Deng, M.J., 2015, On the Diophantine equation $3^x+5^y\cdot 19^z=u^2$, J. Prog. Res. Math. 5: 578-581.