บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

ในบทนี้ได้กล่าวถึงวิธีดำการวิจัย โดยในหัวข้อ 3.1 ได้แสดงฟังก์ชันแบ่งส่วนของปั๊มอิเล็กตรอนเดี่ยวเพื่อนำไปสู่การประยุกต์ใช้ในการคำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ย ส่วนในหัวข้อ 3.2 หัวข้อ 3.3 ได้แสดงวิธีการแปลงแอกชันให้อยู่ในรูปไม่ต่อเนื่องเพื่อใช้ในการคำนวณด้วยวิธีควอนตัมมอนติคาร์โลเพื่อประยุกต์ใช้คำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ย

3.1 ฟังก์ชันแบ่งส่วนของปั๊มอิเล็กตรอนเดี่ยว

เพื่อคำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยของปั๊มอิเล็กตรอนเดี่ยวด้วยวิธีการควอนตัมมอนติคาร์โลฟังก์ชันแบ่งส่วนของปั๊มอิเล็กตรอนเดี่ยวได้ถูกเขียนในรูปฟังก์ชันนัลอินทริกรัลตามสมการ [12]

$$Z = \sum_{k_L, k_R=-\infty}^{\infty} \int_{\varphi_L(0)}^{\varphi_L(0)+2\pi k_L} D\left[\varphi_L(\tau)\right] \int_{\varphi_R(0)}^{\varphi_R(0)+2\pi k_R} D\left[\varphi_R(\tau)\right] e^{-S_{eff}[\boldsymbol{\varphi}(\tau)]} e^{-2\pi i\left(\mathbf{n}_g \mathbf{k}^T\right)} \tag{3.1}$$

โดยที่ $\mathbf{n}_g = (\mathrm{n}_{0L}, \mathrm{n}_{0\mathrm{R}})$ และ $\mathbf{k} = (k_L, k_R)$ เมื่อ $S_{eff}\left[\boldsymbol{\varphi}(\tau)\right]$ เป็นแอ็กชันยังผล นิยามสมการสมการ

$$S_{eff}\left[\boldsymbol{\varphi}(\tau)\right] = S_C^0\left[\boldsymbol{\varphi}(\tau)\right] + S_{tun}\left[\boldsymbol{\varphi}(\tau)\right] \tag{3.2}$$

เมื่อ $S_C^0\left[\boldsymbol{\varphi}(\tau)\right]$ เป็นคูลอมบ์แอ็กชัน แสดงได้ดังสมการ

$$S_C^0\left[\boldsymbol{\varphi}(\tau)\right] = \int_0^{\beta E_C} d\tau \dot{\boldsymbol{\varphi}} \mathbf{E} \dot{\boldsymbol{\varphi}}^T \tag{3.3}$$

เมื่อ

$$\mathbf{E} = \frac{E_C}{2e^2}\begin{pmatrix} C_{\Sigma L} & -C_{\Sigma M} \\ -C_{\Sigma M} & C_{\Sigma R} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} E_L & -E_M \\ -E_M & E_R \end{pmatrix}$$

สัญลักษณ์ $\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \left(\dot{\varphi}_L(\tau), \dot{\varphi}_R(\tau)\right)$ ในงานวิจัยได้กำหนดพลังงานการเพิ่มประจุ [12]

$$E_C = g_0\left(\frac{E_L}{g_L} + \frac{E_M}{g_M} + \frac{E_R}{g_R}\right) \tag{3.4}$$

เมื่อ $g_0^{-1} = g_L^{-1} + g_M^{-1} + g_R^{-1}$ ส่วนแอกชันของการทะลุผ่าน $S_{tun}\left[\boldsymbol{\varphi}(\tau)\right]$ เป็นไปตามสมการ

$$S_{tun}\left[\boldsymbol{\varphi}(\tau)\right]=-\int_0^{\beta E_C}d\tau\int_0^{\beta E_C}d\tau'\alpha(\tau-\tau')\begin{pmatrix}g_L\cos(\varphi_L(\tau)-\varphi_L(\tau'))+g_R\cos(\varphi_R(\tau)-\varphi_R(\tau'))\\+g_M\cos(\varphi_L(\tau)-\varphi_R(\tau)-\varphi_L(\tau')+\varphi_R(\tau'))\end{pmatrix}$$

(3.5)

โดยที่

$$\alpha(\tau-\tau')=\left[4(\beta E_C)^2\sin^2\left(\frac{\pi}{\beta E_C}(\tau-\tau')\right)\right]^{-1} \tag{3.6}$$

จากสมการ (3.1) พบว่า เงื่อนไขขอบเขตของการหาค่าปริพันธ์มีค่าเพิ่มขึ้นเป็นจำนวนเท่าของ 2π กล่าวคือ $2\pi k_L$ และ $2\pi k_R$ ซึ่งค่า k_L และ k_R ถูกเรียกว่า ค่าตัวเลขไวน์ดิง เพื่อความสะดวกในการประมวลผล กล่าวคือ เพื่อให้เงื่อนไขขอบเขตของการคำนวณค่าปริพันธ์มีเพียงขอบเขตเดี่ยวได้ กำหนดให้

$$\xi_L(\tau)=\varphi_L(\tau)-v_{k_L}\tau \text{ และ } \xi_R(\tau)=\varphi_R(\tau)-v_{k_R}\tau \tag{3.7}$$

เมื่อ $v_{k_L}=2\pi k_L/(\beta E_C)$ และ $v_{k_R}=2\pi k_R/(\beta E_C)$ โดยมีเงื่อนไขขอบเขตเป็น

$$\xi_L(0)=\xi_L(\beta E_C) \text{ และ } \xi_R(0)=\xi_R(\beta E_C) \tag{3.8}$$

ดังนั้น สมการ (3.1) สามารถเขียนใหม่ได้ดังสมการ

$$Z=\sum_{k_L,k_R=-\infty}^{\infty}\oint D\left[\boldsymbol{\xi},\mathbf{k}\right]e^{-S_{eff}[\boldsymbol{\xi},\mathbf{k}]}e^{-2\pi i\left(\mathbf{n}_g\mathbf{k}^T\right)} \tag{3.9}$$

จากการเปลี่ยนตัวแปรในสมการ (3.7) ทำให้แอ็กชันในสมการ (3.2), (3.3) และ (3.5) เขียนใหม่ได้ดังสมการ

$$S_{eff}\left[\boldsymbol{\xi},\mathbf{k}\right]=S_C^0\left[\boldsymbol{\xi},\mathbf{k}\right]+S_{tun}\left[\boldsymbol{\xi},\mathbf{k}\right] \tag{3.10}$$

โดยที่

$$S_C^0\left[\boldsymbol{\xi},\mathbf{k}\right]=\frac{4\pi^2}{\beta E_C}\mathbf{kEk}^T+\int_0^{\beta E_C}d\tau\dot{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{E}\dot{\boldsymbol{\xi}}^T \tag{3.11}$$

และ

$$\begin{aligned}S_{tun}\left[\boldsymbol{\xi},\mathbf{k}\right]=&-\int_0^{\beta E_C}d\tau\int_0^{\beta E_C}d\tau'\alpha(\tau-\tau')\\&\times\begin{pmatrix}g_L\cos(\xi_L(\tau)-\xi_L(\tau')+v_{k_L}k_L)\\+g_M\cos(\xi_L(\tau)-\xi_R(\tau)-\xi_L(\tau')+\xi_R(\tau')+(v_{k_L}-v_{k_R})(\tau-\tau'))\\+g_R\cos(\xi_R(\tau)-\xi_R(\tau')+v_{k_R}k_R)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{3.12}$$

เมื่อเมทริกซ์ $\boldsymbol{\xi} = (\xi_L \ \xi_R)$ และตัวแปร ξ_L กับ ξ_R สอดคล้องกับตัวแปร φ_L กับ φ_R ตามลำดับ

3.2 จำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในปั๊มอิเล็กตรอนเดี่ยว

จำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยของปั๊มอิเล็กตรอนเดี่ยวสามารถนิยามได้จากผลรวมของจำนวนอิเล็กตรอนในเกาะโลหะฝั่งซ้ายและฝั่งขวาดังสมการ

$$< n_{total} > = < n_L > + < n_R > \tag{3.13}$$

จากสมการ (2.35) จำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในควอนตัมดอทฝั่งซ้ายสามารถคำนวณได้ดังสมการ

$$\langle n_L \rangle = n_{L0} - \frac{E_{CM}}{E_{CL}}\left(\langle n_R \rangle - n_{R0}\right) + \frac{1}{2\beta E_{CL}}\frac{\partial \ln Z}{\partial n_{L0}} \tag{3.14}$$

และจากสมการ (2.36) จำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในควอนตัมดอทฝั่งขวาสามารถคำนวณได้ดังสมการ

$$\langle n_R \rangle = n_{R0} - \frac{E_{CM}}{E_{CR}}\left(\langle n_L \rangle - n_{L0}\right) + \frac{1}{2\beta E_{CR}}\frac{\partial \ln Z}{\partial n_{R0}} \tag{3.15}$$

เมื่อแทนสมการ (3.9) ลงสมการ (3.14) และสมการ (3.15) พร้อมกับใช้เงื่อนไขขอบเขต $\boldsymbol{\xi}(\beta E_C) = \boldsymbol{\xi}(0) = 0$ จำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในเกาะโลหะฝั่งซ้ายสามารถเขียนใหม่ได้ดังสมการ

$$\langle n_L \rangle = n_{L0} - \frac{E_{CM}}{E_{CL}}\left(\langle n_R \rangle - n_{R0}\right) - \frac{i\pi}{\beta E_{CL}}\langle k_L \rangle \tag{3.16}$$

และจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในเกาะโลหะฝั่งขวา

$$\langle n_R \rangle = n_{R0} - \frac{E_{CM}}{E_{CR}}\left(\langle n_L \rangle - n_{L0}\right) - \frac{i\pi}{\beta E_{CR}}\langle k_R \rangle \tag{3.17}$$

เมื่อนำสมการ (3.16) แทนลงในสมการ (3.17) พบว่าจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในควอนตัมดอทฝั่งขวา

$$\langle n_R \rangle = n_{R0} - \frac{4i\pi}{\beta E_C}\left(E_R \langle k_R \rangle - E_M \langle k_L \rangle\right) \tag{3.18}$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อนำสมการ (3.17) แทนลงในสมการ (3.16) สามารถเขียนสมการแสดงจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในควอนตัมดอทฝั่งซ้าย

$$\langle n_L \rangle = n_{L0} - \frac{4i\pi}{\beta E_C}\left(E_L \langle k_L \rangle - E_M \langle k_R \rangle\right) \tag{3.19}$$

โดยที่ $E_L = C_{\Sigma L}E_C/2e^2$, $E_R = C_{\Sigma R}E_C/2e^2$ และ $E_M = C_M E_C/2e^2$ ค่าคาดหมายของจำนวนไวน์ดิงน์ นิยามตามสมการ

$$\langle k_i \rangle = \frac{1}{Z}\sum_{k_L,k_R=-\infty}^{\infty}\oint D[\boldsymbol{\xi},\mathbf{k}]e^{-S_{eff}[\xi,\mathbf{k}]}k_i\, e^{-2\pi i\left(\mathbf{n}_g\bullet\mathbf{k}^T\right)} \tag{3.20}$$

เมื่อเมทริกซ์ $k_i = (k_L, k_R)$ และ $e^{-2\pi i\left(\mathbf{n}_g\mathbf{k}^T\right)}$ จากเอกลักษณ์ของออยเลอร์ (Euler's identity)

$$e^{-2\pi i\left(\mathbf{n}_g\mathbf{k}^T\right)} = \cos(2\pi\mathbf{n}_g\mathbf{k}^T) - i\sin(2\pi\mathbf{n}_g\mathbf{k}^T) \tag{3.21}$$

ดังนั้นสมการ (3.20) สามารถเขียนใหม่ได้

$$\langle k_I \rangle = \frac{1}{Z}\sum_{k_L,k_R=-\infty}^{\infty} k_I\oint D[\boldsymbol{\xi},\mathbf{k}]e^{-S_{eff}[\xi,\mathbf{k}]}\left(\cos(2\pi\mathbf{n}_g\mathbf{k}^T) - i\sin(2\pi\mathbf{n}_g\mathbf{k}^T)\right) \tag{3.22}$$

และ

$$Z = \sum_{k_L,k_R=-\infty}^{\infty}\oint D[\boldsymbol{\xi},\mathbf{k}]e^{-S_{eff}[\xi,\mathbf{k}]}\left(\cos(2\pi\mathbf{n}_g\mathbf{k}^T) - i\sin(2\pi\mathbf{n}_g\mathbf{k}^T)\right) \tag{3.23}$$

จากสมการ (3.18) และ (3.19) ค่าคาดหมายของ $\langle k_I \rangle$ ในสมการ (3.22) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบสำหรับการประมวลผลด้วยวิธีการควอนตัมมอนติคาร์โลได้ดังสมการ

$$\begin{aligned}\langle k_i \rangle &= \frac{\sum_{\{\xi,\mathbf{k}\}\Rightarrow\rho(\xi,\mathbf{k})} k_i[\cos\left(2\pi(k_L n_{0L} + k_R n_{0R})\right) - i\sin\left(2\pi(k_L n_{0L} + k_R n_{0R})\right)]}{\sum_{\{\xi,\mathbf{k}\}\Rightarrow\rho(\xi,\mathbf{k})}[\cos\left(2\pi(k_L n_{0L} + k_R n_{0R})\right) - i\sin\left(2\pi(k_L n_{0L} + k_R n_{0R})\right)]} \\ &= \frac{-i\sum_{\{\xi,\mathbf{k}\}\Rightarrow\rho(\xi,\mathbf{k})} k_i\sin\left(2\pi(k_L n_{0L} + k_R n_{0R})\right)}{\sum_{\{\xi,\mathbf{k}\}\Rightarrow\rho(\xi,\mathbf{k})}\cos\left(2\pi(k_L n_{0L} + k_R n_{0R})\right)}\end{aligned} \tag{3.24}$$

โดยพจน์ของ $\sum_{\{\xi,\mathbf{k}\}\Rightarrow\rho(\xi,\mathbf{k})} k_i\cos\left(2\pi(k_L n_{0L} + k_R n_{0R})\right)$ และ $\sum_{\{\xi,\mathbf{k}\}\Rightarrow\rho(\xi,\mathbf{k})} i\sin\left(2\pi(k_L n_{0L} + k_R n_{0R})\right)$ มีค่าเท่ากับศูนย์เนื่องจากคุณสมบัติของฟังก์ชันคี่ (odd function) โดยสัญลักษณ์ $\{\boldsymbol{\xi},\mathbf{k}\} \Rightarrow \rho(\boldsymbol{\xi},\mathbf{k})$

หมายถึงตัวแปร $\boldsymbol{\xi}$ และ $\mathbf{k}$ ที่ถูกสุ่มด้วยระเบียบวิธีของเมโทรโปลิส โดยใช้ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น $\rho\left(\boldsymbol{\xi},\mathbf{k}\right)=Z^{-1}\exp\left[-S_{eff}[\boldsymbol{\xi},\mathbf{k}]\right]$

3.3 ค่าแอ็กชันในรูปแบบที่ไม่ต่อเนื่อง

ในการคำนวณค่าคาดหมายในสมการ (3.24) ด้วยวิธีประมวลเชิงตัวเลข ค่าแอ็กชันต้องถูกเขียนให้อยู่ในรูปไม่ต่อเนื่อง โดยการใช้ผลรวมของรีมันน์ (Riemann's sum) กล่าวคือ แบ่งช่วง βE_C ออกเป็น N ช่วง ช่วงละเท่าๆกัน โดยมีความกว้าง $\Delta\tau$ ซึ่งค่า N ถูกเรียกว่า ตัวเลขทรอตเตอร์ (Trotter's number) [22] และกำหนดให้ $\xi_j=\xi\left(\tau_j\right)$ โดยที่ $\tau_j=j\Delta\tau$ ดังนั้นค่าแอ็กชันสามารถเขียนใหม่ได้ดังสมการ [12]

$$\begin{aligned}S_C^0[\xi_L,\xi_R,k_L,k_R]=&\frac{NE_L}{\beta E_C}\sum_{j=1}^{N}(\xi_{\mathrm{L},j}-\xi_{L,j-1})^2+\frac{4\pi^2k_L^2E_L}{\beta E_C}\\&+\frac{NE_R}{\beta E_C}\sum_{j=1}^{N}(\xi_{\mathrm{R},j}-\xi_{\mathrm{R},j-1})^2+\frac{4\pi^2k_R^2E_R}{\beta E_C}\\&-\frac{2NE_m}{\beta E_C}\sum_{j=1}^{N}(\xi_{\mathrm{L},j}-\xi_{L,j-1})(\xi_{\mathrm{R},j}-\xi_{\mathrm{R},j-1})-\frac{8\pi^2k_Lk_RE_m}{\beta E_C}\end{aligned}\tag{3.25}$$

และสมการ

$$\begin{aligned}S_{tun}[\xi_L,\xi_R,k_L,k_R]=&-\sum_{j,j'=1}\alpha_{j-j'}g_L\cos\left[\xi_{L,j}-\xi_{L,j'}+\frac{2\pi k_L}{N}(j-j')\right]\\&+\sum_{j,j'=1}\alpha_{j-j'}g_M\cos\left[(\xi_{R,j}-\xi_{\mathrm{R},j'})-(\xi_L-\xi_{\mathrm{L},j'})+\frac{2\pi(k_R-k_L)}{N}(j-j')\right]\\&-\sum_{j,j'=1}\alpha_{j-j'}g_R\cos\left[\xi_{\mathrm{R},j}-\xi_{\mathrm{R},j'}+\frac{2\pi k_R}{N}(j-j')\right]\end{aligned}\tag{3.26}$$

โดยที่เคอร์เนลการทะลุผ่าน (tunneling kernel) นิยามตามสมการ

$$\alpha_{j-j'}=\left[4N^2\sin^2\left(\frac{\pi(j-j')}{N}\right)\right]^{-1}\tag{3.27}$$

พิจารณาสมการ (3.26) ในกรณี ที่ค่า $j=j'$ ค่าแอ็กชันของการทะลุผ่านมีค่าลู่ออก ทำให้ไม่สามารถทำการประมวลผลเชิงตัวเลขได้โดยตรง เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าวให้ใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $\cos(x)=1-2\sin^2(x/2)$ และ

$$\int_0^{\beta E_C}d\tau\int_0^{\beta E_C}d\tau'\alpha(\tau-\tau')=0\tag{3.28}$$

ทำให้พจน์แรกของการกระจายมีค่าเป็นศูนย์ เมื่อพิจารณาพจน์ $2\sin^2(x/2)$ ที่ได้จากการกระจายในสมการ (3.26) พร้อมทั้งกำหนดให้

$$\Omega_i(\tau_j,\tau_{j'})=\frac{1}{2}\left[\xi_i(\tau_j)-\xi_i(\tau_{j'})+\frac{2\pi k_i}{\beta E_C}(\tau_j-\tau_{j'})\right] \text{ เมื่อ } i\in\{L,R\} \tag{3.29}$$

เมื่อแทนค่า Ω_i ลงในสมการ (3.26) จากนั้นพิจารณาสมการดังกล่าวในกรณีที่ลิมิตของ j ลู่เข้าสู่ j' โดยพจน์แรกในสมการ (3.26) สามารถเขียนได้ดังสมการ

$$g_L\lim_{\tau_j\to\tau_{j'}}2\alpha(\tau_j-\tau_{j'})\sin^2[\Omega_L(\tau_j,\tau_{j'})]=g_L\lim_{\tau_j\to\tau_{j'}}\frac{1}{2N^2}\frac{\sin^2\left[\Omega_L(\tau_j,\tau_{j'})\right]}{\sin^2\left[\dfrac{\pi}{\beta E_C}(\tau_j-\tau_{j'})\right]} \tag{3.30}$$

ในกรณีลิมิตที่ $\tau_j\to\tau_{j'}$ จะได้

$$\begin{aligned}g_L\lim_{\tau_j\to\tau_{j'}}2\alpha(\tau_j-\tau_{j'})\sin^2[\Omega_L(\tau_j,\tau_{j'})]&=g_L\frac{(\beta E_C)^2}{8\pi^2N^2}\dot{\Omega}_L^2(\tau_j,\tau_{j'})\\&=g_L\frac{1}{8\pi^2}\left[\left(\xi_{j,L}-\xi_{j-1,L}\right)^2+\frac{4\pi k_L}{N}\left(\xi_{j,L}-\xi_{j-1,L}\right)+\frac{4\pi^2k_L^2}{N^2}\right]\\&=g_L\frac{1}{8\pi^2}\left[\left(\xi_{j,L}-\xi_{j-1,L}\right)^2+\frac{4\pi^2k_L^2}{N^2}\right]\end{aligned} \tag{3.31}$$

โดยที่ผลรวมของพจน์ $\left(4\pi k_L/N\right)[\xi_{j,L}-\xi_{j-1,L}]=0$ เนื่องจากเป็น $\xi_{j,L}$ เป็นตัวแปรสุ่ม ส่วนพจน์ที่สองในสมการ (3.26) สามารถคำนวณด้วยทำนองเดียวกล่าวคือ

$$-g_M\lim_{\tau_j\to\tau_{j'}}2\alpha(\tau_j-\tau_{j'})\sin^2[\Omega_R(\tau_j,\tau_{j'})]=\frac{-g_M}{8\pi^2}\left[\begin{aligned}&\left(\xi_{j,L}-\xi_{j-1,L}\right)^2+\frac{4\pi^2k_L^2}{N^2}\\&+\left(\xi_{j,\mathrm{R}}-\xi_{j-1,\mathrm{R}}\right)^2+\frac{4\pi^2k_R^2}{N^2}\\&-2\left(\xi_{j,R}-\xi_{j-1,R}\right)\left(\xi_{j,L}-\xi_{j-1,L}\right)+\frac{4\pi^2k_Rk_L}{N^2}\end{aligned}\right] \tag{3.32}$$

และพจน์ที่สามของสมการ (3.26) สามารถคำนวณได้ตามสมการ

$$g_R\lim_{\tau_j\to\tau_{j'}}2\alpha(\tau_j-\tau_{j'})\sin^2[\Omega_L(\tau_j,\tau_{j'})]=g_R\frac{1}{8\pi^2}\left[\left(\xi_{j,\mathrm{R}}-\xi_{j-1,\mathrm{R}}\right)^2+\frac{4\pi^2k_R^2}{N^2}\right] \tag{3.33}$$

เมื่อนำสมการ (3.31) (3.32) และ (3.33) แทนลงใน (3.26) พบว่าค่าที่ได้มีลักษณะคล้ายกับคูลอมบ์แอ็กชันในสมการ (3.25) เพื่อความสะดวกจึงได้รวมพจน์ดังกล่าวเข้าด้วยกัน ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของแอ็กชันสามารถเขียนได้เป็น

$$S_{j=j'}[\xi_L,\xi_R,k_L,k_R]=\varepsilon_L\sum_{j=1}^{N}(\xi_{L,j}-\xi_{L,j-1})^2+\kappa_L k_L^2+\varepsilon_R\sum_{j=1}^{N}(\xi_{\mathrm{R},j}-\xi_{\mathrm{R},j-1})^2+\kappa_R k_R^2$$
$$-\varepsilon_M\sum_{j=1}^{N}(\xi_{\mathrm{L},j}-\xi_{\mathrm{L},j-1})(\xi_{\mathrm{R},j}-\xi_{\mathrm{R},j-1})+\kappa_M k_L k_R \qquad (3.34)$$

โดยที่ $$\varepsilon_L=\frac{NE_L}{\beta E_C}+\frac{g_L-g_M}{8\pi^2}, \qquad \kappa_L=\frac{4\pi^2 E_L}{\beta E_C}+\frac{g_L-g_M}{2N^2} \qquad (3.35)$$

$$\varepsilon_R=\frac{NE_R}{\beta E_C}+\frac{g_R-g_M}{8\pi^2}, \qquad \kappa_R=\frac{4\pi^2 E_R}{\beta E_C}+\frac{g_R-g_M}{2N^2} \qquad (3.36)$$

$$\varepsilon_M=\frac{2NE_M}{\beta E_C}-\frac{g_M}{4\pi^2}, \qquad \kappa_M=\frac{8\pi^2 E_M}{\beta E_C}-\frac{g_M}{N^2} \qquad (3.37)$$

ส่วนในกรณีที่ $j\neq j'$ เมื่อใช้คุณสมบัติ $\sum_{j,j'}=2\sum_{j>j'}$ พบว่า

$$S_{tun}[\xi_L,\xi_R,k_L,k_R]=-2\sum_{j>j'}\alpha_{j-j'}g_L\cos\left[\xi_{L,j}-\xi_{L,j'}+\frac{2\pi k_L}{N}(j-j')\right]$$
$$+2\sum_{j>j'}\alpha_{j-j'}g_M\cos\left[(\xi_{R,j}-\xi_{\mathrm{R},j'})-(\xi_{L,j}-\xi_{\mathrm{L},j'})+\frac{2\pi(k_R-k_L)}{N}(j-j')\right] \qquad (3.38)$$
$$-2\sum_{j>j'}\alpha_{j-j'}g_R\cos\left[\xi_{\mathrm{R},j}-\xi_{\mathrm{R},j'}+\frac{2\pi k_R}{N}(j-j')\right]$$

ค่าแอ็กชันในสมการ (3.34) และสมการ (3.38) จะถูกนำไปคำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ย โดยผลการคำนวณได้แสดงไว้ในบทที่ 4